相関器で検出する位相較正(PCAL)信号の強度について

――スペアナ（分解能帯域幅ｆres）でPCAL信号をモニターし、バックグランドのノイズレベルよりPCAL信号がｈdB高く測定された場合、相関器で検出されるPCAL強度はどう表わせるか――

Ｔ．ＫＯＮＤＯ

ビデオ帯域幅を２MHz とすると相関器で検出されるPCAL強度は次式で表わされる。

$$\text{PCAL強度} = 0.05 \times \sqrt{f\,res\ (\mathrm{Hz})} \times 10^{h/20} \quad (\%)$$

―― 以下証明 ――

１．スペアナで測定するPCAL信号と雑音信号の比について

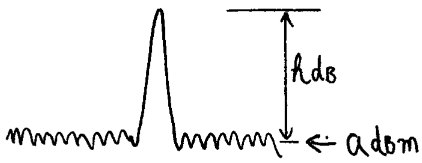

図１

分解能帯域幅ｆres(Hz) で測定した雑音信号レベルをａdBm （図１参照）とすると全帯域をＢとした場合の雑音信号レベル（ｂdBm)は次式で表わせる。

$$b = a + 10\log(B/f\,res) \quad (\mathrm{dBm}) \qquad (1)$$

PCAL信号パワーは（ａ＋ｈ）dBm であるから、PCAL信号強度（実効値）と雑音信号強度の比をＰＮＲとすると、

$$(PNR)^2 = a + h - b \quad (\mathrm{dB})$$
$$= h - 10\log(B/f\,res) \qquad (2)$$

したがってＰＮＲを真数で表現すると、

$$PNR = 10^{\{(h/20) - \log(B/f\,res)^{1/2}\}}$$
$$= (B/f\,res)^{-1/2}\, 10^{h/20} \qquad (3)$$

このＰＮＲをスペアナで測定したＰＮＲという意味で（ＰＮＲ）ｓ と書くことにする。今、Ｂ＝２MHz とすると、

$$(PNR)\,s = 0.07 \times \sqrt{f\,res} \cdot 10^{h/20} \quad (\%) \qquad (4)$$

２．相関器で検出するPCAL信号強度と雑音信号の比

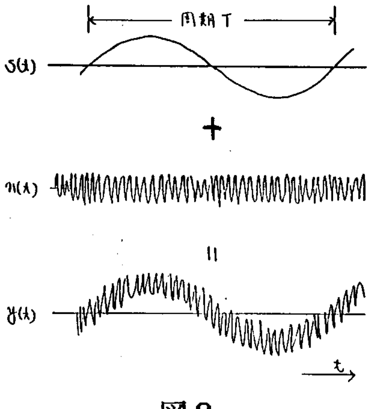

図２

「前提：信号帯域は０～Ｂ（Hz）に十分制限されている。さらにサンプリングはナイキスト周波数２Ｂで行われるとする。また受信器は理想的であり混変調等はないものとする。」

帯域０～Ｂの雑音信号｛n(t)｝を分散 σ^2 のガウ

ス雑音とする。PCAL信号 {s(t)} を周期T、振幅(p-p) 2A、初期位相θの正弦（余弦）波とする。雑音の重畳したPCAL信号をy(t)とすると、

$$y(t) = s(t) + n(t) \qquad (5)$$

と書ける（図2）。ただし、

$$s(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta\right) \qquad (6)$$

今、y（t）を周期Tで区切り、図3で示されるように、たてに並べて考えてみる。さらに時刻tとして、

$$kT \leqq kt < (k+1)T \quad : k = 0, 1, 2, \cdots\cdot$$

なるtを考える。このtを固定して、周期番号方向{k=0，1，2，・・・}にy（t）を見た場合、平均値がs（t）、分散σ^2で表わされるガウス分布雑音となっている。　したがって、y（t）が時刻tにxという値をとる確率をP（x｜t）とすると、

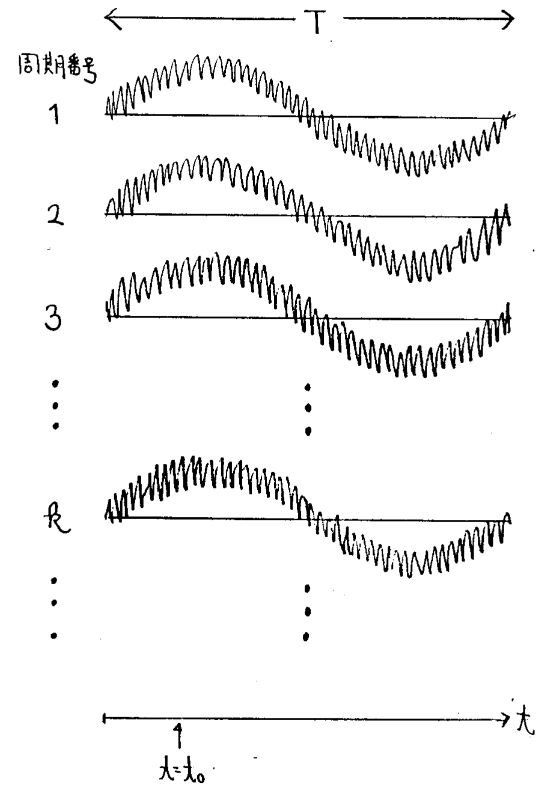

図3

$$P(x \mid t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\{-(x-s(t))^2/2\sigma^2\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\{-(x-A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\theta))^2/2\sigma^2\} \qquad (7)$$

さて、y（t）を1bitサンプリングして得られる時系列をg（t）とすると、

$$g(t) = \begin{cases} +1 & : \quad y(t) \geqq 0 \\ -1 & : \quad y(t) < 0 \end{cases} \qquad (8)$$

である。したがって1bitサンプリングのデータが時刻tで+1を取る確率はP（x｜t）でxが正となる確率に等しい。これをQ_+（t）とすると、

$$Q_+(t) = \int_0^{\infty} P(x \mid t)\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_0^{\infty}\exp\{-(x-A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\theta))^2/2\sigma^2\}\,dx \qquad (9)$$

ここで、$(x-A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\theta))/\sqrt{2}\sigma = z$と変数変換を行うと、

$$Q_+(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-z_0(t)}^{\infty}\exp\{-z^2\}\,dz \qquad (10)$$

ただし、
$$z_0(t) = \frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\theta\right) \qquad (11)$$

ここで、

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-s^2)\,ds$$

で定義される誤差関数を用いると、

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-s^2)\,ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-s^2)\,ds - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-s^2)\,ds$$
$$= 1 - \mathrm{erf}(x)$$

であるから、

$$Q_+(t) = \tfrac{1}{2}\left(1 - \mathrm{erf}(-z_0(t))\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}(z_0(t))\right) \qquad (12)$$
$$(\because\ \mathrm{erf}(-x) = -\mathrm{erf}(x))$$

したがって、1bit サンプリング後のデータが－１を取る確率を$Q_-(t)$とすると、

$$Q_-(t) = 1 - Q_+(t)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(1 - \mathrm{erf}(z_0(t))\right) \qquad (13)$$

さて、相関器ではｇ（ｔ）に対して、図４で示される関数Ｒ（ｔ）、Ｉ（ｔ）をかけ算して、正になった部分のビット数をカウントしている。ここでカウント値は必ずＴの整数倍を単位とする積分時間で出力される。この積分時間をℓT（$\ell = 1, 2, 3, \cdots$）とするとカウント値は$g(t)R(t)$または$g(t)I(t)$を$0 \sim \ell T$に亘って積分したときの期待値に等しくなる。この期待値をそれぞれE_r、E_iとすると、

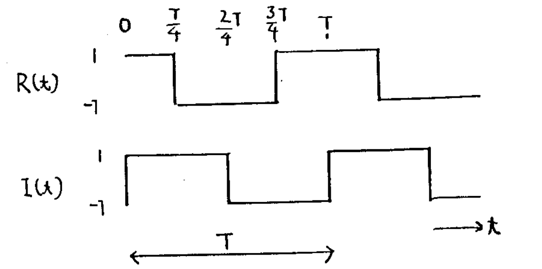

図４

$$E_r = \ell \left\{ \int_0^{T/4} Q_+(t)\,dt + \int_{T/4}^{3T/4} Q_-(t)\,dt + \int_{3T/4}^{T} Q_+(t)\,dt \right\} \qquad (14)$$

(14)式に(12)、(13)式を代入し整理すると、

$$E_r = \frac{\ell T}{2} + \frac{\ell}{2} \left\{ \int_0^{T/4} \mathrm{erf}(z_0(t))\,dt - \int_{T/4}^{3T/4} \mathrm{erf}(z_0(t))\,dt + \int_{3T/4}^{T} \mathrm{erf}(z_0(t))\,dt \right\}$$

実際に注入されているPCAL信号は$A/\sigma << 1$が十分に成り立つ。したがって$z_0(t) << 1$も十分に成り立っている。この場合は誤差関数は、

$$\mathrm{erf}(z_0(t)) \doteqdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} z_0(t)$$

と近似できる。したがって、

$$E_r = \frac{\ell T}{2} + \frac{\ell}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{T/4} z_0(t)\,dt - \int_{T/4}^{3T/4} z_0(t)\,dt + \int_{3T/4}^{T} z_0(t)\,dt \right\}$$
$$= \frac{\ell T}{2} + \frac{\ell A}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \left\{ \int_0^{T/4} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \theta\right) dt - \int_{T/4}^{3T/4} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \theta\right) dt + \int_{3T/4}^{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \theta\right) dt \right\}$$

積分を実行すると結局、

$$E_r = \frac{\ell T}{2} + \frac{2A\ell T}{\sqrt{2\pi}\,\pi\sigma} \cos\theta \qquad (15)$$

同様にしてＥｉ を求める。

$$\mathrm{Ei} = \ell \left\{ \int_0^{T/2} Q_+(t)\,dt + \int_{T/2}^{T} Q_-(t)\,dt \right\} \tag{16}$$

$$= \frac{\ell T}{2} + \frac{\ell}{2} \left\{ \int_0^{T/2} \mathrm{erf}(z_0(t))\,dt - \int_{T/2}^{T} \mathrm{erf}(z_0(t))\,dt \right\}$$

Ａ／σ<<１の近似を用いて、

$$= \frac{\ell T}{2} + \frac{\ell}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{T/2} z_0(t)\,dt - \int_{T/2}^{T} z_0(t)\,dt \right\}$$

$$= \frac{\ell T}{2} + \frac{\ell A}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \left\{ \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \theta\right)dt - \int_{T/2}^{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \theta\right)dt \right\}$$

$$= \frac{\ell T}{2} + \frac{2A\ell T}{\sqrt{2\pi}\,\pi\sigma} \sin\theta \tag{17}$$

バンド幅合成ソフトウェア（ＫＯＭＢ）ではPCAL信号が入っていないとした場合のカウント値つまり＋１、－１の出現確率が同じである雑音信号の期待値ℓＴ／２で規格化を行っている。したがって、Ｅｒ、Ｅｉ の規格化カウント値をそれぞれ、Ｐｒ、Ｐｉ とすると、

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mathrm{Er} - \ell T/2}{\ell T/2} = \frac{4A}{\sqrt{2\pi}\,\pi\sigma} \cos\theta$$

$$\mathrm{Pi} = -\frac{\mathrm{Ei} - \ell T/2}{\ell T/2} = \frac{4A}{\sqrt{2\pi}\,\pi\sigma} \sin\theta \tag{18}$$

(18)式で規格化されたカウント値を用いてＫＯＭＢではPCAL強度と位相を次式で求めている。

$$\text{PCAL強度} = (\mathrm{Pr}^2 + \mathrm{Pi}^2)^{1/2} = \frac{4A}{\sqrt{2\pi}\,\pi\sigma} = 0.507\ (A/\sigma) \tag{19}$$

$$\text{PCAL位相} = \arctan(\mathrm{Pi}/\mathrm{Pr}) \tag{20}$$

(19)式で表わされるPCAL強度を（ＰＮＲ）ｃ と書くことにする。

さて、スペアナで得られる（ＰＮＲ）ｓ は実効値の比であるから、Ａとσを使って表現すると、

$$(\mathrm{PNR})_s = A/(\sqrt{2}\,\sigma) \tag{21}$$

である。(21)式を(19)式に代入すると、

$$(\mathrm{PNR})_c = \frac{4}{\sqrt{\pi}\,\pi} (\mathrm{PNR})_s = 0.718\ (\mathrm{PNR})_s \tag{22}$$

つまり、１bit サンプリングおよび相関器での検出方法を通じて、ＰＮＲが０．７１８劣化することを意味している。さらに(22)式に (4)式を代入すると、

$$(\mathrm{PNR})_c = 0.05 \times \sqrt{f_{res}}\ 10^{h/20} \quad (\%) \tag{23}$$

が得られる。

実際にスペアナでPCAL信号を分解能帯域幅１kHzで測定した場合、バックグランドのノイズレベルより10dB高い場合、相関器で５％のPCAL強度として検出されているが、ｆres=1000、h=10として(23)式より（ＰＮＲ）ｃ を求めると５％となり、観測事実と良く一致する。