ゼロベースライン干渉計の相関関数から位相較正(PCAL)信号の影響を取り除く方法について

T．KONDO

規格化相関関数（1bit サンプリング損失（2／π）を補正済）から次式の値をひけば良い。

$$1.938\times C_{px}\cdot C_{py}\cdot\cos\{(\phi_{px}-\phi_{py})+(lag-4)\frac{2\pi}{400}\}$$

ここで、Cpx・・・相関器で検出したX局のPCAL信号強度
Cpy・・・　〃　Y　〃
φpx・・・相関器で検出したX局のPCAL信号位相
φpy・・・　〃　Y　〃
lag・・・ビット単位で表わした遅延

―― 以下証明 ――

1．PCAL信号を含んだ雑音信号の相互相関関数について

X局の信号をx(t)、Y局の信号をy(t)とし、それぞれ下式で表わす。

$$x(t)=A_{px}\cdot\cos(2\pi f_p t+\theta_{px})+n_x(t) \quad (1)$$

$$y(t)=A_{py}\cdot\cos(2\pi f_p t+\theta_{py})+n_y(t) \quad (2)$$

ここで、(1) (2) 式の右辺第1 項はPCAL信号を表わし、$n_x(t)$,$n_y(t)$ は分散σ_x^2、σ_y^2 の帯域0～BHzのガウス分布雑音である。x(t)、y(t)のフーリエ変換をX(f)、Y(f)とすると、

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,e^{-i2\pi ft}dt = P_x(f)+N_x(f) \quad (3)$$

$$Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\,e^{-i2\pi ft}dt = P_y(f)+N_y(f) \quad (4)$$

ただし、$P_x(f)$、$P_y(f)$はPCAL信号のフーリエ変換であり、

$$P_x(f)=\frac{A_{px}}{2}[\delta(f-f_p)e^{i\theta_{px}}+\delta(f+f_p)e^{-i\theta_{px}}] \quad (5)$$

$$P_y(f)=\frac{A_{py}}{2}[\delta(f-f_p)e^{i\theta_{py}}+\delta(f+f_p)e^{-i\theta_{py}}] \quad (6)$$

また、$N_x(f)$、$N_y(f)$は$n_x(t)$、$n_y(t)$のフーリエ変換である。x(t)、y(t)の相互相関関数をCxy(τ)とすると、Cxy(τ)はX(f)Y*(f) の逆フーリエ変換である。

$$X(f)Y^*(f) = P_x(f)P_y^*(f)+P_x(f)N_y^*(f)+N_x(f)P_y^*(f)+N_x(f)N_y^*(f) \quad (7)$$

$$=\frac{A_{px}A_{py}}{4}[\delta(f-f_p)^2\ e^{i(\theta_{px}-\theta_{py})}+\delta(f+f_p)^2\ e^{-i(\theta_{px}-\theta_{py})}]$$

$$+\frac{A_{px}}{2}[\delta(f-f_p)e^{i\theta_{px}}+\delta(f+f_p)e^{-i\theta_{px}}]N_y^*(f)$$

$$+\frac{A_{py}}{2}\left[\delta(f-f_p)e^{-i\theta_{py}}+\delta(f+f_p)e^{i\theta_{py}}\right]N_x(f)$$

$$+N_x(f)N_y^*(f)$$

ここで$\delta(s)^2=\delta(s)$であるから、

$$X(f)Y^*(f)=\frac{A_{px}A_{py}}{4}\left[\delta(f-f_p)e^{i(\theta_{px}-\theta_{py})}+\delta(f+f_p)e^{-i(\theta_{px}-\theta_{py})}\right]$$
$$+\frac{A_{px}}{2}\left[\delta(f-f_p)e^{i\theta_{px}}+\delta(f+f_p)e^{-i\theta_{px}}\right]N_y^*(f)$$
$$+\frac{A_{py}}{2}\left[\delta(f-f_p)e^{-i\theta_{py}}+\delta(f+f_p)e^{i\theta_{py}}\right]N_x(f)$$
$$+N_x(f)N_y^*(f) \quad (8)$$

したがって、

$$C_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)Y^*(f)\,e^{i2\pi f\tau}\,df$$
$$=\frac{A_{px}A_{py}}{2}\cos\{2\pi f_p\tau+(\theta_{px}-\theta_{py})\}$$
$$+\frac{A_{px}}{2}\left[e^{i\theta_{px}}N_y^*(f_p)e^{i2\pi f_p\tau}+e^{-i\theta_{px}}N_y^*(-f_p)\,e^{-i2\pi f_p\tau}\right]$$
$$+\frac{A_{py}}{2}\left[e^{-i\theta_{py}}N_x(f_p)e^{i2\pi f_p\tau}+e^{-i\theta_{py}}N_x(-f_p)\,e^{-i2\pi f_p\tau}\right]$$
$$+\gamma_{xy}(\tau) \quad (9)$$

ただし、$\gamma_{xy}(\tau)$は$n_x(t)$、$n_y(t)$の相互相関関数であり、

$$\gamma_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}N_x(f)N_y^*(f)\,e^{i2\pi f\tau}\,df \quad (10)$$

ここで$n_x(t)$、$n_y(t)$は実関数であるから、$N_x(f)$、$N_y(f)$は実数部偶、虚数部奇関数である。したがって、$N(-f)=N^*(f)$、$N^*(-f)=N(f)$である。よって、

$$C_{xy}(\tau)=\frac{A_{px}A_{py}}{2}\cos\{2\pi f_p\tau+(\theta_{px}-\theta_{py})\}$$
$$+\frac{A_{px}}{2}\left[N_y^*(f_p)e^{i(2\pi f_p\tau+\theta_{px})}+N_y(f_p)e^{-i(2\pi f_p\tau+\theta_{px})}\right]$$
$$+\frac{A_{py}}{2}\left[N_x(f_p)e^{i(2\pi f_p\tau-\theta_{py})}+N_x^*(f_p)e^{-i(2\pi f_p\tau-\theta_{py})}\right]$$
$$+\gamma_{xy}(\tau) \quad (11)$$

ここで(11)式右辺第２項について考えてみる。

$$右辺第２項=A_{px}\,|N_y(f_p)|\cos(2\pi f_p\tau+\theta_{px}-\theta_{ny}) \quad (12)$$

ただし、$\theta_{ny}=\arg\{N_y(f_p)\}$

$N_y(f_p)$は帯域０～BHzのガウス分布雑音の周波数f_pにおけるフーリエ成分である。したがって、$|N_y(f_p)|$はレーリー分布、θ_{ny}は０～２πの一様分布となる。したがって(12)式は積分により０となる。同様の考察から(11)式右辺第３項も０となる。結局、

$$C_{xy}(\tau)=\frac{A_{px}A_{py}}{2}\cos\{2\pi f_p\tau+(\theta_{px}-\theta_{py})\}+\gamma_{xy}(\tau) \quad (13)$$

規格化相互相関関数をRxy（τ）とすると、

$$Rxy(\tau)=\frac{Cxy(\tau)}{\sqrt{Cxx(0)Cyy(0)}}$$

$$=\frac{\frac{ApxApy}{2}\cos\{2\pi f_p\tau+(\theta_{px}-\theta_{py})\}+\gamma_{xy}(\tau)}{\left(\frac{Apx^2}{2}+\sigma_x^2\right)^{1/2}\left(\frac{Apy^2}{2}+\sigma_y^2\right)^{1/2}} \tag{14}$$

VLBIで取り扱う信号では$|Apx/\sigma_x|\ll 1$、$|Apy/\sigma_y|\ll 1$である。したがって、Rxy（τ）は次式で近似できる。

$$Rxy(\tau)=\frac{ApxApy}{2\sigma_x\sigma_y}\cos\{2\pi f_p\tau+(\theta_{px}-\theta_{py})\}+\frac{\gamma_{xy}(\tau)}{\sigma_x\sigma_y} \tag{15}$$

(15)式を次式のように書いておくことにする。

$$Rxy(\tau)=\mu_{xy}(\tau)+\rho_{xy}(\tau) \tag{15$'$}$$

ここで、$\mu_{xy}(\tau)$は(15)式の第１項であり、PCAL信号の相互相関関数、$\rho_{xy}(\tau)$は(15)式の第２項で雑音信号の相互相関関数である。

２．1bit サンプリング後の相互相関関数

1bit サンプリングにより相関係数が２／π小さくなることが知られているが、ここでは、PCAL信号同志の相関係数も1bit サンプリングによって、２／π劣化することを示す。

(1) (2) 式で定義される$x(t)$、$y(t)$が時刻tに$x\sim x+dx$、$y\sim y+dy$の範囲の値をとる確率をそれぞれ、$p(x\mid t)dx$、$p(y\mid t)dy$とすると、

$$p(x\mid t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\exp\{-(x-\mu_x(t))^2/2\sigma_x^2\} \tag{16}$$

$$p(y\mid t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y}\exp\{-(y-\mu_y(t))^2/2\sigma_y^2\} \tag{17}$$

ただし、$\mu_x(t)$、$\mu_y(t)$は次式で示されるPCAL信号である。

$$\left.\begin{aligned}\mu_x(t)&=a_{px}\cos(2\pi f_pt+\theta_{px})\\ \mu_y(t)&=a_{py}\cos(2\pi f_pt+\theta_{py})\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

(18)において、a_{px}、a_{py}をσ_x、σ_yに対する比（$a_{px}=Apx/\sigma_x$、$a_{py}=Apy/\sigma_y$）で定義し、(16)、(17)式において$\sigma_x=\sigma_y=1$とおいて議論を進めて行くことにする。この定義を用いると、

$$p(x\mid t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-(x-\mu_x(t))^2/2\} \tag{16$'$}$$

$$p(y\mid t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-(y-\mu_y(t))^2/2\} \tag{17$'$}$$

と書ける。(16)$'$、(17)$'$の結合確率密度関数を$p(x\mid t=t_1,\ y\mid t=t_2)$とすると、平均値$(\mu_x(t_1),\mu_y(t_2))$の正規分布の結合確率密度関数であるから、

$$p\ (x \mid t=t_1,\ y \mid t=t_2) = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\beta\right\} \tag{19}$$

ただし、

$$\beta = (x-\mu_x(t_1))^2 - 2\rho(x-\mu_x(t_1))(y-\mu_y(t_2)) + (y-\mu_y(t_2))^2$$

であり、ρ は $n_x(t_1)$、$n_y(t_2)$ の相関係数である。

さて、1bit サンプリング後の時系列を、

$$g_x(t) = \begin{cases} 1 & : \ x(t) \geqq 0 \\ -1 & : \ x(t) < 0 \end{cases} \tag{20}$$

$$g_y(t) = \begin{cases} 1 & : \ y(t) \geqq 0 \\ -1 & : \ y(t) < 0 \end{cases} \tag{21}$$

とすると、g_x、g_y の規格化相関係数 $r_{xy}(\tau)$ は、

$$r_{xy}(\tau) = \langle g_x(t)\, g_y(t-\tau) \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_x(t)\, g_y(t-\tau)\ p\ (x \mid t=t\ ,\ y \mid t=t-\tau)\, dxdy \tag{22}$$

で計算される。g_x、g_y の取り得る値（1または－1）に応じて積分領域を分けると、

$$r_{xy}(\tau) = Q_{++} + Q_{--} - Q_{+-} - Q_{-+} \tag{23}$$

ただし、

$$Q_{++} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} p\ (x \mid t=t\ ,\ y \mid t=t-\tau)\, dxdy$$

$$Q_{--} = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} p\ (x \mid t=t\ ,\ y \mid t=t-\tau)\, dxdy$$

$$Q_{+-} = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0} p\ (x \mid t=t\ ,\ y \mid t=t-\tau)\, dxdy$$

$$Q_{-+} = \int_{-\infty}^{0}\int_0^{\infty} p\ (x \mid t=t\ ,\ y \mid t=t-\tau)\, dxdy$$

(23)式の各項毎に積分を実行していく。

$$Q_{++} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi\ (1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\ \beta\right\} dxdy \tag{24}$$

ただし、

$$\beta = (x-\mu_x(t))^2 - 2\rho(x-\mu_x(t))(y-\mu_y(t-\tau)) + (y-\mu_y(t-\tau))^2$$

以下、ここでは $\mu_x(t) = \mu_x$、$\mu_y(t-\tau) = \mu_y$ と書くことにする。

ここで、

$$\zeta = x - \mu_x \quad 、\quad \eta = y - \mu_y$$

と変数変換を行う。

$$Q_{++}=\frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}}\int_{-\mu_x}^{\infty}\int_{-\mu_y}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\zeta^2-2\rho\zeta\eta+\eta^2)\right\}d\zeta\, d\eta$$

$$=\frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}}\int_{-\mu_x}^{\infty}\exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right)\left[\int_{-\mu_y}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(\eta-\rho\zeta)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}d\eta\right]d\zeta \qquad (26)$$

ここで$\frac{(\eta-\rho\zeta)}{(2(1-\rho^2))^{1/2}}=s$とおくと、$d\eta=\{2(1-\rho^2)\}^{1/2}ds$、$\eta$に関する積分領域は、

$-\frac{(\mu_y+\rho\zeta)}{(2(1-\rho^2))^{1/2}}\leqq s<\infty$　と変換される。したがって、

$$Q_{++}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\mu_x}^{\infty}\exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right)\left[\int_{-s_0}^{\infty}\exp(-s^2)\,ds\right]d\zeta \qquad (27)$$

ただし、$s_0=\frac{(\mu_y+\rho\zeta)}{(2(1-\rho^2))^{1/2}}$

ここで、

$$\mathrm{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z\exp(-s^2)ds$$

で定義される誤差関数を用いると、

$$Q_{++}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\mu_x}^{\infty}\exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1+\mathrm{erf}(s_0))\,d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\mu_x}^{\infty}\left(1+\mathrm{erf}\left(\frac{(\mu_y+\rho\zeta)}{(2(1-\rho^2))^{1/2}}\right)\right)e^{-\zeta^2/2}\,d\zeta \qquad (28)$$

$$\left(\because\quad \int_{-x}^{\infty}\exp(-s^2)ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1+\mathrm{erf}(x))\right)$$

ここで、$\mathrm{erf}\left(\frac{(\mu_y+\rho\zeta)}{(2(1-\rho^2))^{1/2}}\right)$ についてζの積分領域$-\mu_x$から∞において、どのような関数になるか考えてみる。一般に、誤差関数は、

$$\mathrm{erf}(z)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}}z & : |z|\ll 1\\ 1 & : z\gg 1\\ -1 & : z\ll -1\end{cases}$$

である。さて、$|s_0|\ll 1$と近似できる、すなわちs_0が十分に0に近い範囲を求めることにする。

$$-1\ll s_0\ll 1$$

すなわち、$-1\ll\frac{(\mu_y+\rho\zeta)}{(2(1-\rho^2))^{1/2}}\ll 1$　を

ζについて解くと、

$$-\frac{1}{|\rho|}\{(2(1-\rho^2))^{1/2}+\mu_y\} \ll \zeta \ll \frac{1}{|\rho|}\{(2(1-\rho^2))^{1/2}+\mu_y\} \tag{29}$$

ここで、$\zeta_0=\frac{1}{|\rho|}\{(2(1-\rho^2))^{1/2}+\mu_y\}$ とおき、ζ_0 を評価する。

今、取り扱っている信号では、$|\rho|\ll 1$、$|\mu_x|\ll 1$、$|\mu_y|\ll 1$ である。したがって、$\zeta_0 \gg 1$ である。また、$e^{-\zeta^2/2}$ という関数は、$\zeta\gg 1$ では0と近似できる。したがって、(28)式の積分範囲では、

$$\mathrm{erf}\left(\frac{(\mu_y+\rho\zeta)}{(2(1-\rho^2))^{1/2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{(\mu_y+\rho\zeta)}{(2(1-\rho^2))^{1/2}}\right)$$

と近似しても差し支えない。したがって、

$$Q_{++}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\mu_x}^{\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{(\mu_y+\rho\zeta)}{(2(1-\rho^2))^{1/2}}\right)\right)e^{-\zeta^2/2}\,d\zeta \tag{30}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\mu_y}{(2(1-\rho^2))^{1/2}}\right)\right)\int_{-\mu_x}^{\infty}e^{-\zeta^2/2}\,d\zeta$$

$$+\frac{2}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\rho}{(2(1-\rho^2))^{1/2}}\int_{-\mu_x}^{\infty}\zeta\, e^{-\zeta^2/2}\,d\zeta$$

積分を実行して、

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\mu_y}{(2(1-\rho^2))^{1/2}}\right)\right)\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(1+\mathrm{erf}\left(\frac{\mu_x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$+\frac{\rho}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}}e^{-\mu_x^2/2}$$

ここで、$|\rho|\ll 1$、$|\mu_x|\ll 1$ の条件で近似をすると、

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{2\mu_y}{\sqrt{2\pi}}\right)\left(1+\frac{2\mu_x}{\sqrt{2\pi}}\right)+\frac{1}{2\pi}\rho$$

$$=\frac{1}{4}\left\{1+(2/\pi)^{1/2}(\mu_x+\mu_y)+\frac{2}{\pi}(\mu_x\mu_y+\rho)\right\} \tag{31}$$

同様にしてQ_{--}、Q_{+-}およびQ_{-+}を求めると以下のようになる。

$$Q_{--}=\frac{1}{4}\left\{1-(2/\pi)^{1/2}(\mu_x+\mu_y)+\frac{2}{\pi}(\mu_x\mu_y+\rho)\right\} \tag{32}$$

$$Q_{+-}=\frac{1}{4}\left\{1+(2/\pi)^{1/2}(\mu_x-\mu_y)-\frac{2}{\pi}(\mu_x\mu_y+\rho)\right\} \tag{33}$$

$$Q_{-+}=\frac{1}{4}\left\{1-(2/\pi)^{1/2}(\mu_x-\mu_y)-\frac{2}{\pi}(\mu_x\mu_y+\rho)\right\} \tag{34}$$

したがって、

$$r_{xy}(\tau)=Q_{++}+Q_{--}-Q_{+-}-Q_{-+}$$

$$=\frac{2}{\pi}(\mu_x\mu_y+\rho) \tag{35}$$

ここで、$\mu_{xy}(\tau)=\mu_x\ \mu_y$ とおくと、

$$r_{xy}(\tau)=\frac{2}{\pi}(\mu_{xy}(\tau)+\rho)$$

さらに(15)′式を代入すると、

$$r_{xy}(\tau)=\frac{2}{\pi}R_{xy}(\tau) \qquad (35)'$$

$\mu_{xy}(\tau)$ はPCAL信号の相互相関関数であるから、1bit サンプリング後のデータでは、雑音信号同志の相互相関係数の他にPCAL信号の相関係数も（2/π）劣化することが示された。また、

$$\mu_{xy}(\tau)=\frac{a_{px}a_{py}}{2}\cos\{2\pi f_p\tau+(\theta_{px}-\theta_{py})\} \qquad (36)$$

したがって、1bit サンプリング後（（2/π）の補正済）の相関係数からρを得るには(36)式で $\mu_{xy}(\tau)$ を計算し、差し引けばよい。

(36)式で $a_{px}=\frac{Apx}{\sigma_x}$、$a_{py}=\frac{Apy}{\sigma_y}$ である。また、相関器で検出されるX局、Y局のPCAL信号強度をCpx、Cpyとすると、

$$Cpx=\frac{4}{2^{1/2}\pi^{3/2}}\cdot\frac{Apx}{\sigma_x}\ ,\qquad Cpy=\frac{4}{2^{1/2}\pi^{3/2}}\cdot\frac{Apy}{\sigma_y}$$

である（K-3 VLBI Tech. Rep. 1986.2.21 参照）。さらに相関器で検出されたPCAL信号の位相を ϕ_{px}、ϕ_{py} とすると、

$$\mu_{xy}(\tau)=\frac{1}{2}\cdot\frac{Apx\,Apy}{\sigma_x\ \sigma_y}\cos\{2\pi f_p\tau+(\phi_{px}-\phi_{py})\}$$

$$=\frac{\pi^3}{16}Cpx\,Cpy\ \cos\{2\pi f_p\tau+(\phi_{px}-\phi_{py})\} \qquad (37)$$

ここで相関器で検出されるPCAL位相はX局のフレームデータの先頭を基準とした位相である。通常の相関処理では8bit ラグの相関関数のうち、5bit 目を予測遅延と取り扱う。その補正を行い、またτをbit ラグ単位（lag）で表わすと、PCAL信号の周期は10kHz の場合400bitであるから、(37)式は次式のように書ける。

$$\mu_{xy}(lag)=\frac{\pi^3}{16}Cpx\,Cpy\ \cos\{(\phi_{px}-\phi_{py})+(lag-4)\frac{2\pi}{400}\}$$

$$=1.938\times Cpx\,Cpy\ \cos\{(\phi_{px}-\phi_{py})+(lag-4)\frac{2\pi}{400}\} \qquad (38)$$

—— 証明終 ——