

# パルサーTOAの安定性限界と重力遅延効果

周波数標準課 細川瑞彦

## 1. 序

先の研究において我々は銀河の星々の運動とそれに伴う重力場変動が天球基準座標系に一種の精度限界を与えることを見た。4次元時空座標系の残りの時間部分についてもこの重力現象は同様の効果をもたらすはずである。局所座標系を構築する地上の原子時計にはこれはほとんど影響を与えない。しかし遠方からの信号による時間座標、パルサー時計には、天球座標系と同様の揺らぎを与えるはずである。

長く観測されてきた PSR 1937+21, PSR 1855+07, などに加えて、近年続々と PSR 1713+07 など新たなミリ秒パルサーが発見されてきている。これらの高安定なミリ秒パルサーを観測することによって Pulsar Timescale 構築の可能性は広がってきている (Petit, Tavella A&A) が、それには様々な限界要因も数多くある (Petit, PTTI)。時計構築に際して限界を与える要因は大まかには、パルサー自身のもの、パルサー星系の影響、パルスの地球までへの伝搬の際の問題に区分することができる。このうちで、われわれは以前、パルサーTOAへの途中の星の重力遅延の影響を検出することから、その影響を与えている星の質量を測定する可能性を考察した。(Ohnishi et al. 1994)

本稿ではこの効果がPulsar Timescaleの基礎となるパルサーTOAにどのような影響を与えるのか、そのトレンドのタイプと大きさ、確率、さらにはそれらの観測精度、パルサーの距離、横速度、local density of the stars, MACHOの存在の有無などの依存性を明らかにする。これらをもとに、この効果がPulsar TOAの長期安定性にどのような限界をあたえるかについて議論する。

## 2. Pulsar TOA と残差

パルサーからのパルス信号はその方向、相対運動によって変化するが、Pulsar TOA データは時系列に沿って得られる、一次元のデータである。このためPulsar TOAを解析する際には、データのフィッティングによって決定しなければならないパラメータがある。単独パルサーではそれらは以下の8つである。

赤経赤緯 ( , ), 固有運動 (  $\mu$  ,  $\mu$  ), 年周視差 , 観測の基準エポック  $t_E$ ,  
自転周期  $P$ , 自転周期変動  $P'$

パルサーの方向、地球の自転、公転の影響を補正後に、パルス到達数はTDBの関数として得られる。これはほぼ時間に比例するものとなるが、自転周期変動や運動学的変動、その他未知の要因も含めて、わずかな変動がみられる。これをシンプルなべき級数関数

$$N(T)_P = N_0 + a(T - T_0) + b(T - T_0)^2/2 \quad (1)$$

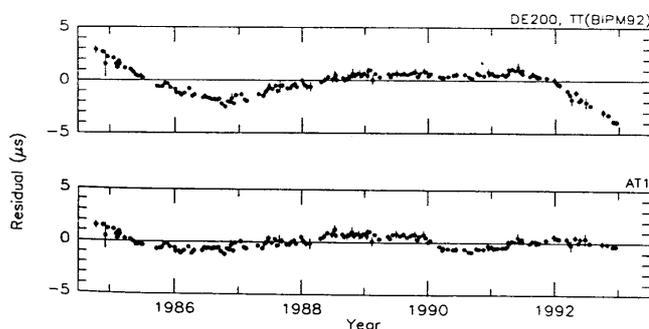
で、フィット後の残差が最小になるよう、最小自乗フィットする。最適フィット値の一般的な求め方は前回示した。フィット後の残差は、ランダムな測定ノイズと長期的なトレンドに分けて考えることができる。1937, 1855 などの例を図に掲げる。TDBにおいて各次の項が意味するものはApJ 1995の我々の論文にまとめて示しておいた。定性的にあげると以下のようなものになる。

一次：主としてパルス振動数、他に後退速度

二次：主としてintrinsicなパルスの周期減衰率、横速度、視線加速度など。Tの二次に比例する項は、かなり大きい。 $10^{-15}$ 程度。これはスピンの減衰率 $P'$ が一番の原因と考えられる。他に運動学的原因もあると考えられるが、分離は難しい。

三次：intrinsicなパルスの減衰の変化率、jark, 横加速度、・・・

ここまではフィッティングパラメーターに入っている量であるが、より高次の項は通常、このフィッティング後の再解析によって求められる。Tの三次に比例する項は、双極子輻射が原因と考えると非常に小



さい。10<sup>-30</sup> 程度。これより大きな三次トレンドが時としてみられる。T の四次以上の高次に比例する項は高安定なミリ秒パルサーではそれほど明瞭には見られていない。

今回も前回同様、長期的なトレンドのみに着目するが、前回とはすこし違った解析を試みる。具体的には、高次のトレンドをルジャンドレの多項式に展開して残差を分析する、という手法で分析する。

ルジャンドレの多項式は完全直交系列をなす関数列であり、有限区間の任意の関数を展開することができる。さらに、べき級数によるフィットではフィット関数以下の次数のルジャンドレ多項式のトレンドは自動的に除かれる。フィット後の残差はフィット関数より高次のルジャンドレの多項式の重ね合せとして見える。既知の原因による残差に、ゆっくり変化する未知の効果が出た場合、残差をルジャンドレ展開し、未知効果の原因と考えられる残差関数をテイラー展開し比較することで残差の解析と未知効果の原因推定ができる。

ここで鍵となるのは、高安定のミリ秒パルサーにおいてはルジャンドレの三次以上で表される TOA 残差のトレンドは非常に小さいものが期待される、ということである。自転周期とその減衰率から推定される双極子輻射減速より大きな三次以上のトレンドが観測された場合には、その減速は未知の効果によるものと考えられる。また、多くのミリ秒パルサー TOA の安定度から見ると、あまり高次のルジャンドレ展開は要求されないことが期待される。

ルジャンドレの多項式の最大値は常に端点で与えられる。観測期間の midpoint を 0、期間 (-T/2, T/2) を (-1, 1) に規格化した場合の n 次のルジャンドレの多項式 P[n, x] と、端点 (x=1) で得られる期間中の最大値 P[n, 1] は次のようになる。

$$P[2, x] = x^2 - 2/3, \rightarrow P[2, 1] = 1/3$$

$$P[3, x] = x^3 - 3/5, \rightarrow P[3, 1] = 2/5$$

$$\text{Legendre}P[4, x] = x^4 - 30/35 x^2 + 3/35 \rightarrow P[4, 1] = 8/35$$

$$\text{Legendre}P[5, x] = x^5 - 10/9 x^3 + 5/21 x \rightarrow P[5, 1] = 8/63 \tag{2}$$

この規格化より、例えば期間 [-a, a] では、2次のトレンドに対しては a<sup>2</sup> (1/2!) P[2, 1]、3次のトレンドが見える場合には a<sup>3</sup> (1/3!) P[3, 1] がそれぞれの項の最大値となることがわかる。

各次のオーダーは 1855, 1937 の場合にはそれぞれ、以下の値が得られている。

2次、	'(10 <sup>-16</sup> s <sup>-2</sup> )	-6.2035	-433.1671
3次、	''(10 <sup>-27</sup> s <sup>-3</sup> )	-1.0 ± 0.9	13.2 ± 0.3

テイラー展開の妥当性 (高次の収束性)

観測期間はおよそ 10<sup>8</sup> sec (3年) をオーダーの単位として測られる量になる。このため秒の単位で、一次あがるごとに係数が 10<sup>-8</sup> 以上小さくなっていかなくては、べき級数展開は良い展開方法とはいえなくなる。上の例ではこれは十分満たされている。

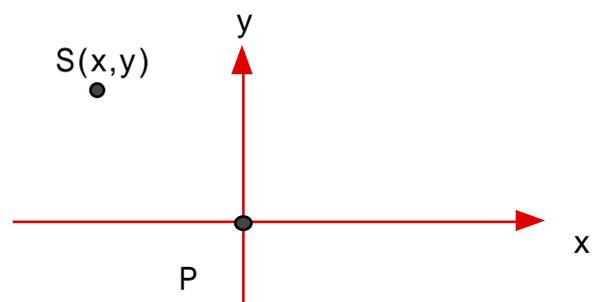
以上の準備を元に、重力遅延について次で考察する。

### 3. 重力遅延特性関数のテイラー展開と各次の残差

遅延源の視線に対する相対運動と重力遅延の特性関数を前回はパルサーまでの視線への重力源の最接近時の距離と最接近点からの時間によって表した。

$$f(t) = m \text{Log}[1 + (t - t_m)^2 / t_d^2] \tag{3}$$

ここではすべて実空間での距離を用いて次のように設定する。まずパルサーへの視線に垂直で、重力遅延源を含む平面を考える。パルサーへの視線とこの面の交わる点をこの平面の原点とする。視線に対する遅延源の運動方向を x 軸、それに垂直な方向を y 軸方向とする。このように座標を取ると、重力遅延源は面内にある一定の y の値をとって、x 軸方向に一定の速度で運動していく、というように運動を表せる。



座標系の図

$$v t_m = x, v t_d = y$$

$$f(t) = m \text{Log}[1 + (v t)^2 / y^2] \quad (4)$$

$x = x(t) = vt$  を代入し、時間に関する各次の微係数を求め、あるエポックにおける特性関数のテイラー展開を行う。 $t_E$  を観測期間の midpoint とすると、重力遅延の特性関数のテイラー展開は形式的に次のように与えられる。

$$f(t_E + t) = f(t_E) + f'(t_E) t + f''(t_E) (t)^2 / 2 + f^{(3)}(t_E) (t)^3 / 6 \\ + f^{(4)}(t_E) (t)^4 / 24 + f^{(5)}(t_E) (t)^5 / 120 + \dots$$

ここで上記の  $f(t)$  を時間微分し、 $x(t), y$  に質量  $m$ 、速度  $v$  の星がある場合の、二次から五次までの微係数を求める。

$$f'(t_E) = 2 m v x / (x^2 + y^2)^2 \\ f''(t_E) = 2 m v^2 (-x^2 + y^2) / (x^2 + y^2)^2 \\ f^{(3)}(t_E) = 4 m v^3 x (x^2 - 3y^2) / (x^2 + y^2)^3 \\ f^{(4)}(t_E) = 12 m v^4 (x^4 + 6 x^2 y^2 - y^4) / (x^2 + y^2)^4 \\ f^{(5)}(t_E) = 48 m v^5 x (x^4 - 10 x^2 y^2 + 5 y^4) / (x^2 + y^2)^5 \quad (5)$$

これをもとに、次の各量を導出する。

$t_i$  : 質量  $m$ 、横速度  $v$ 、位置  $(x, y)$  の星が観測期間  $T$  の間に造り出す  $i$  次のトレンドの最大値  
各次の微係数に  $(T/2)^n / n!$  を掛け、ルジャンドレの多項式の最大値を代入する。

$$t_2 = (1/3) m v^2 (T/2)^2 (-x^2 + y^2) / (x^2 + y^2)^2 \\ = (1/3) m v^2 (T/2)^2 F_2(x, y) \\ t_3 = (4/15) m v^3 (T/2)^3 x (x^2 - 3y^2) / (x^2 + y^2)^3 \\ = (4/15) m v^3 (T/2)^3 F_3(x, y) \\ t_4 = (4/35) m v^4 (T/2)^4 (x^4 + 6 x^2 y^2 - y^4) / (x^2 + y^2)^4 \\ = (4/35) m v^4 (T/2)^4 F_4(x, y) \\ t_5 = (16/315) m v^5 (T/2)^5 x (x^4 - 10 x^2 y^2 + 5 y^4) / (x^2 + y^2)^5 \\ = (16/315) m v^5 (T/2)^5 F_5(x, y)$$

各次において位置  $(x, y)$  にのみ依存する部分を  $F_i(x, y)$  と表した。

オーダー評価のおよその値

$v = 300 \text{ km/s}$ ,  $T/2 = 10^8 \text{ s}$  に対して、 $vT/2 = 3 \times 10^{13} = 10^{-3} \text{ pc}$ 、太陽質量の星に対して  $m \sim 10 \mu\text{s}$ 、 $x, y$  としてパルサーまでの距離を  $2 \text{ kp}$  ととったときの平均星間距離の  $1/10$  程度の  $3 \times 10^{-2} \text{ pc}$  を考えると、 $t_i \sim m \times 10^{-n}$  となって、高次の効果は収束していくことがわかる。また、 $10^8 \text{ s}$  の観測期間で次数があがるごとに一桁以上の減衰があるということは係数は9桁程度ずつ小さくなっている、ということであり、 $t_3$  が双極子輻射減衰から期待されるものでは微係数は二次と三次で15桁程度小さくなっていくことを考えると、三次の効果に双極子輻射減衰の5~6桁大きいものが観測されない限り、重力遅延の二次の効果はパルサーの自転減衰の効果に吸収されてしまうことが見て取れる。また、5次のトレンドまで決定できれば重力遅延源となっている星の質量とパルサーからの天球上の方角を決めることができる。

これらから、観測期間  $T$  のとき、質量  $m$ 、視線との相対速度  $v$  の星がパルサーに振幅  $t$  以上の  $i$  次のトレンドを与えられる面積  $S_i$  を求めることができる。

$$S_2 = K_2 (m/3 t_2) * (v T/2)^2$$

$$S_3 = K_3 (4 m/15 t_3)^{2/3} * (v T/2)^2$$

$$S_4 = K_4 (4m/35 t_4)^{1/2} * (v T/2)^2$$

$$S_5 = K_5 (16m/315 t_5)^{2/5} * (v T/2)^2$$

ここで  $K_i$  は  $F_i(x, y) = 1$  の囲む面積である。目算で次の値が得られている。

$$K_3 = 2.2, \quad (4/15)^{2/3} = 0.41 \quad 0.9$$

$$K_4 = 3, \quad (4/35)^{1/2} = 0.34 \quad 1.0$$

$$K_5 = 2.4, \quad (16/315)^{2/5} = 0.30 \quad 0.7$$

ここで  $R = m / t$  という量を導入すると  $S_i$  はより簡単に表現できて、

$$S_3 = 0.9 [m / t]^{2/3} (vT/2)^2 = 0.9 R^{2/3} (vT/2)^2 = c_3 (vT/2)^2$$

$$S_4 = 1.0 [m / t]^{1/2} (vT/2)^2 = 1.0 R^{1/2} (vT/2)^2 = c_4 (vT/2)^2$$

$$S_5 = 0.7 [m / t]^{2/5} (vT/2)^2 = 0.7 R^{2/5} (vT/2)^2 = c_5 (vT/2)^2$$

このようにすべての次数である一定値以上の重力遅延の影響が起こされる面積は  $(vT/2)^2$  に比例する。各次の係数を  $c_i$  と表した。R の関数としての  $c_i$  を次に示す。

#### 4. 重力遅延の光学深さ

パルサー TOA の重力遅延に対する Optical depth  $\tau_i$  として我々は次のように定義する。観測期間 T のとき、質量 m、視線との相対速度 v の星がパルサーに振幅 t 以上の i 次のトレンドを与える光学深さ  $\tau_i$  は、単純には  $\tau_i = S_i / S = S_i n D$ 、より正確には

$$\tau_i = \int_0^D n(r) S_i(r) dr$$

$S_i(r)$  となるのは  $v(r)$  のためであり、厳密には  $v(r) = v_p r/D + v_s$  となる。

$$S_3 = 0.9 R^{2/3} (vT/2)^2 \text{ より、 } \tau_3 = S_3 n D = 0.9 R^{2/3} (vT/2)^2 n D$$

ここで  $m n = \rho$  とすると

$$\tau_3 = S_3 n D = 0.9 (m / t)^{2/3} (vT/2)^2 \rho / m = 0.9 (m / t)^{-1/3} (vT/2)^2 \rho D$$

密度  $\rho$  が一定とすると、光学深さは質量の立方根に反比例、という弱い質量依存性のあることがわかる。

オーダー評価のおよその値

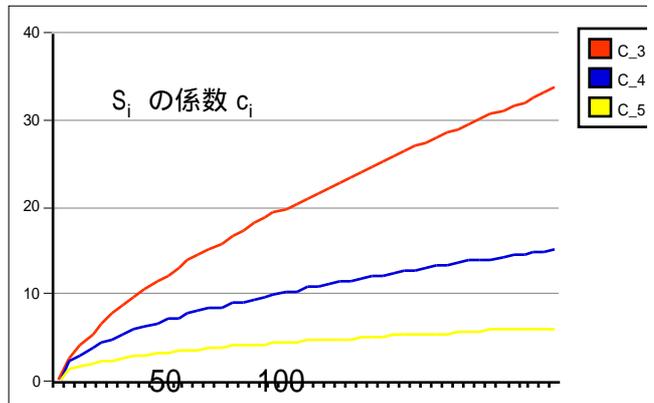
$$v = 300 \text{ km/s}, T/2 = 10^8 \text{ s} \text{ に対して、 } vT/2 = 3 \times 10^{13} = 10^{-3} \text{ pc}$$

$$\text{Disk Stars に対しては } n = 0.1 / \text{pc}^3 \text{ for } m = m_{\text{sun}},$$

$$\text{MACHOs に対しては } n = 0.2 / \text{pc}^3 \text{ for } m = 0.4 m_{\text{sun}},$$

従来までは  $m = m_{\text{sun}}$  に対してアレスボで 1937 では  $R = m / t \sim 50$  が得られてきている。現在、アレスボ、グリーンバンクなどで  $R \sim 200$  が達成されつつある。帯域と積分時間などでそう遠くない将来には 1000 位まで可能になると期待される。限界領域で、少なくとも 3 次トレンドに対しては観測期間中に微係数一定の仮定はほぼ妥当であることがわかる。

$\tau_i = 0.5$  の場合には影響を受けているかいないか 5 分五分。これを一つの目安とする。



$$\delta_3 = 0.5 \text{ の場合は } \delta_3 = 0.9 R^{2/3} (vT/2)^2 n D \text{ より、}$$

$$R = 0.56^{3/2} / [(vT/2)^2 D n]^{3/2} = 0.41 / [(vT/2)^2 D n]^{3/2}$$

質量が軽く、個数が多い場合、どこで崩れて行くか？  
観測期間内にいくつもピークを通る ルジャンドレの最大値が実現されない

$\delta_3$  を見る事ができれば重力源の位置と質量が特定できて、その影響を補正することが可能になる。地上の原子時計でも3次のトレンドに食い違いが見られる  
多くのミリ秒パルサーでいずれかの次数で  $\delta_3 \sim 0.5$  となるような精度では3次のトレンドを判別する方法がなくなる。

## 5. まとめ

- ・パルサーTOAの残差分析にルジャンドレ展開を用いた。
- ・途中の星の重力遅延効果の評価にこの手法を用い、各次における残差の最大値、検出確率（光学深さ）などを、観測期間、星の運動速度などとともに、星の質量、観測精度の関数として表現できた。
- ・重力遅延効果ではルジャンドレの二次まで、あるいは四次以降の寄与は非常に少なく、ルジャンドレの三次の効果が最も重要になることを示した。
- ・確率的には希であるが、ルジャンドレの五次のトレンドまでが検出された際に、その効果を及ぼしている星の質量、及び天球上でのパルサーからの方向を決定する具体的方法が明らかになった。
- ・ルジャンドレの次数に対する検出確率の、星の質量と観測精度の変化にともなうスケールリング則を見出し、パルサーTOAの安定度限界の評価ができた。これはパルサーのアンサンブルによってパルサー時系を構築していく際の、個々のパルサーに対する重力遅延効果からの重みづけの方法が得られたことになる。

以上見てきたようにパルサータイミング観測において途中の星の重力遅延効果は、パルサー時系構築にも、パルスを探るプローブとして銀河内の近傍の星の分布を探るためにも、有用かつ重要な情報を今後与えるものと思われる。

## 参考文献

G. Petit, LIMITS TO THE STABILITY OF PULSAR TIME  
1995 PTTI Proc.

Ohnishi K., Hosokawa M., Fukushima T., Takeuti M., Variation of Gravitational Delay in Pulsar Timing Observation due to Proper Motion of Foreground Stars and Measurement of Stellar Mass  
1995, Ap. J. 448, 271.

G. Petit and P. Tavella, Astron. Astrophys. 308, 290-298 (1996)