

# K S P - V L B I 観測における中性大気の影響について

近藤哲朗

郵政省通信総合研究所

1999年6月7日初版  
1999年7月15日改訂版



# 目次

1	はじめに	1
2	Excess delay の求め方	2
2.1	中性大気の場合の excess delay の具体的計算法	3
2.1.1	平面大気の場合	3
2.1.2	湾曲大気の場合	4
3	レイトレーシング	6
4	標準大気モデル (U.S. Standard Atmosphere 1976) を使ったレイトレーシング	8
4.1	標準大気モデル (U.S. Standard Atmosphere 1976)	8
4.2	大気の屈折率	9
4.3	標準大気モデルへの湿度の取り込み法 (大気の飽和水蒸気圧)	9
4.4	天頂方向の excess delay	10
4.5	斜め方向伝播の場合の excess delay	11
4.5.1	平面大気の場合	11
4.5.2	湾曲大気の場合	11
4.5.3	平面大気と湾曲大気と比較	12
5	大気によるアンテナの見かけの位置変化	15
5.1	マッピング関数	16
5.1.1	Niell マッピング関数	17
5.1.2	CfA マッピング関数	19
5.1.3	Chao マッピング関数	19
5.1.4	マッピング関数の比較	20
5.2	大気の水平勾配の影響	21
5.2.1	水平方向の勾配のモデル化	21
5.2.2	水平方向の勾配が見かけのアンテナ位置変化に与える影響	23
6	見かけのアンテナ位置シフトにおける鹿島周辺の地理の影響	28

A スネルの法則からのレイトレースの式導出	31
B 数値微分	33
C レイトレースチェック	33

## 1 はじめに

KSP-VLBI網（東京周辺の鹿島、小金井、三浦、館山で構成される網）では実時間VLBI技術による24時間VLBI観測を2日ごとに実施しており、その精度は基線長の短期再現性（連続した5データの標準偏差）で見た場合、約2mmを達成している。しかしながら、この再現性に顕著な季節依存性が見られ、夏期において約2倍近くに劣化する。この原因を探るために、各局で取得している気象データ（気温、気圧、湿度、風速、風向）と観測された基線長変動の相関解析を行った。その結果、鹿島を含む基線において、気温および風向との良い相関が見られた。基線長変動に直接影響を及ぼすものとして、局周辺の水蒸気分布の非対称性が考えられるが、鹿島局位置の立地条件（鹿島局の近くに長い直線上の海岸線があり、内陸部に水田を含む陸水地帯が広がる）を考慮すると、夏期における鹿島局周辺の水蒸気分布の非対称性の定性的説明が可能である。すなわち、基線長変動が、気温および風向をパラメータとして水蒸気分布の非対称性に関係しているとすると、観測精度向上のための経験的モデルの作成が可能となる。一方、水蒸気の空間分布をモデル化できれば、レイトレーシング法により、基線長推定に及ぼす影響の定量的評価が可能となる。

この報告では、2章で excess delay の定義について説明する。3章では excess delay の計算に必要なレイトレーシングについて説明を行う。レイトレーシングに使用する大気モデルについては4章で説明する。大気によって生じる見かけのアンテナ位置変化については5章で、その求め方および定量評価結果を示す。6章では鹿島近辺の地理を考慮した大気モデルについて説明を行うと共に、定量的評価結果も示す。

## 2 Excess delay の求め方

ある媒質中を電波が通過するとき、媒質がない場合に比べて余計に要する時間を excess delay と呼ぶ。この excess delay には屈折率の違いによる伝播速度の違いの効果の他、伝播経路の違いによる効果も含まれる。excess delay を式で表現すると媒質の屈折率を  $n$  とすると、以下のようになる。

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int_{L'} n dl' - \frac{1}{c} \int_L dl \quad (1)$$

ここで、 $c$  は光速度（真空中）で  $L'$  は媒質中の電波の経路、 $dl'$  は媒質中の経路に沿った長さ要素、 $L$  は媒質がない場合の電波の経路、 $dl$  はその経路に沿った長さ要素である。右辺第 1 項は屈折率  $n$  で与えられる媒質中を電波が通過するのに要する時間を表し、右辺第 2 項は媒質がない場合の通過に要する時間を表す。ここで、天頂方向から電波が入射する場合や屈折率が 1 に非常に近く、媒質の有無に関わらず電波の経路がほぼ同じ場合は

$$\Delta\tau \approx \frac{1}{c} \int_L (n - 1) dl \quad (2)$$

となる。ここでは、この近似式ではなく、経路の違いによる効果も見積もるために、(1) 式による評価を考える。経路に沿った積分を行うために伝播経路、すなわちレイトラッキングが必要となる。

実際の excess delay の定義を図 2.1 を使って説明する。

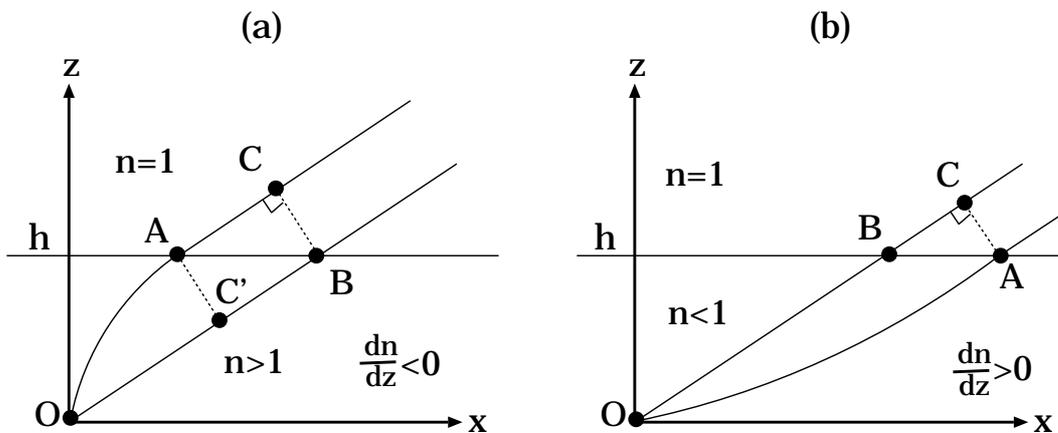


図 2.1.  $z$  方向に屈折率が連続的に変化する場合の電波の経路。(a) 屈折率が 1 より大きい場合（中性大気の場合がこれに相当）。(b) 屈折率が 1 より小さい場合（電離層内がこれに相当）。

図 2.1 には媒質の屈折率が 1 より大きい場合と 1 より小さい場合の両方について電波の経路を模式的に示している。中性大気では屈折率が 1 より大きく、図 2.1(a) に相当する。電離層内では屈折率が 1 より小さく、図 2.1(b) は電離層上部での伝播経路に相当する。電波は媒質がない場合は  $B-O$  という経路をたどるが、媒質がある場合、 $O$  に到達する電波は、 $A-O$  という経路を通る電波である。

媒質があることによって余分に経過する時間 (excess delay) は、(a) の場合は実際に  $A-O$  の区間の媒質を通過するのに要する時間から、媒質がない場合に  $C'-O$  という経路を通過するのに要する時間を引けば求められる。媒質内での伝播遅延は (1) 式の右辺第 1 項の積分を  $A-O$  という経路に沿って行えば求められ、これを  $\tau_{AO}$  とする。(1) 式の右辺第 2 項の積分は経路  $C'-A$  に沿って行うが、この部分は単純な幾何学で  $CA$  間の長さを求め、 $BO$  間の長さから引き去ることにより  $C'-A$  間の長さを求めるのが簡単である。 $CA$  間の伝播

に要する時間を  $\tau_{CA}$  とし、媒質が無い場合の B O 間の伝播時間を  $\tau_{BO}$  とすると、excess delay ( $\Delta\tau$  とする) は

$$\Delta\tau = \tau_{CA} + \tau_{AO} - \tau_{BO} \quad (3)$$

となる。

一方、屈折率が 1 より小さい図 2.1(b) の場合、同様に考えるが、媒質が無い場合の経路に C B (この経路の伝播に要する時間を  $\tau_{CB}$  とする) が付け加わることを考慮に入れると、

$$\Delta\tau = \tau_{AO} - (\tau_{CB} + \tau_{BO}) \quad (4)$$

となる。実際に excess delay を求めるには O 点から A 点に向けてレイトレーシングを行う。このレイトレーシングにより  $\tau_{AO}$  および A 点の座標が得られる。A 点の座標から、幾何学計算で B, C 点の座標を得ることができる。地球の湾曲を考慮した場合も、同様の手続きで excess delay を求めることができる。

## 2.1 中性大気の場合の excess delay の具体的計算法

中性大気の場合の模式的レイパスを、平面大気および湾曲大気について図 2.2 に示す。A 点が O 点から初期天頂角  $\theta_0$  で出た電波が大気を抜ける点である。excess delay ( $\Delta\tau$  とする) は

$$\Delta\tau = \tau_{CA} + \tau_{AO} - \tau_{BO} \quad (5)$$

であるが、 $\tau_{AO}$  はレイトレーシングにより、求められる。A 点の座標とそこでの伝播方向もレイトレーシングによって求められるので、この場合に  $\overline{BO}$  および  $\overline{AC}$  が求められればそれを光速で割ったものが  $\tau_{CA}$  および  $\tau_{BO}$  となる。具体的に  $\tau_{CA}$  と  $\tau_{BO}$  を求める方法を平面大気の場合と、地球の湾曲を考慮した場合の両方について以下に示す。

### 2.1.1 平面大気の場合

平面大気の場合 (図 2.2(a)) の excess delay の具体的求め方は以下の通りである。

1. レイトレースで求められた A 点の座標を  $(x_A, z_A (= h))$  とする。そこでの伝播方向 (角度) を  $\theta$  とする。またレイトレースで得た伝播時間を  $\tau_{OA}$  とする。
2. B 点の座標を  $(x_B, z_B)$  とすると、それぞれ以下のように求められる。

$$\begin{aligned} x_B &= x_A \tan \theta \\ z_B &= z_A \end{aligned}$$

3. 媒質がない場合の O B 間の伝播時間  $\tau_{OB}$  は次式で求められる。

$$\tau_{OB} = \frac{1}{c} \sqrt{x_B^2 + z_B^2}$$

ここで、 $c$  は光速である。

4. A C 間の伝播時間  $\tau_{AC}$  を次式で求められる。

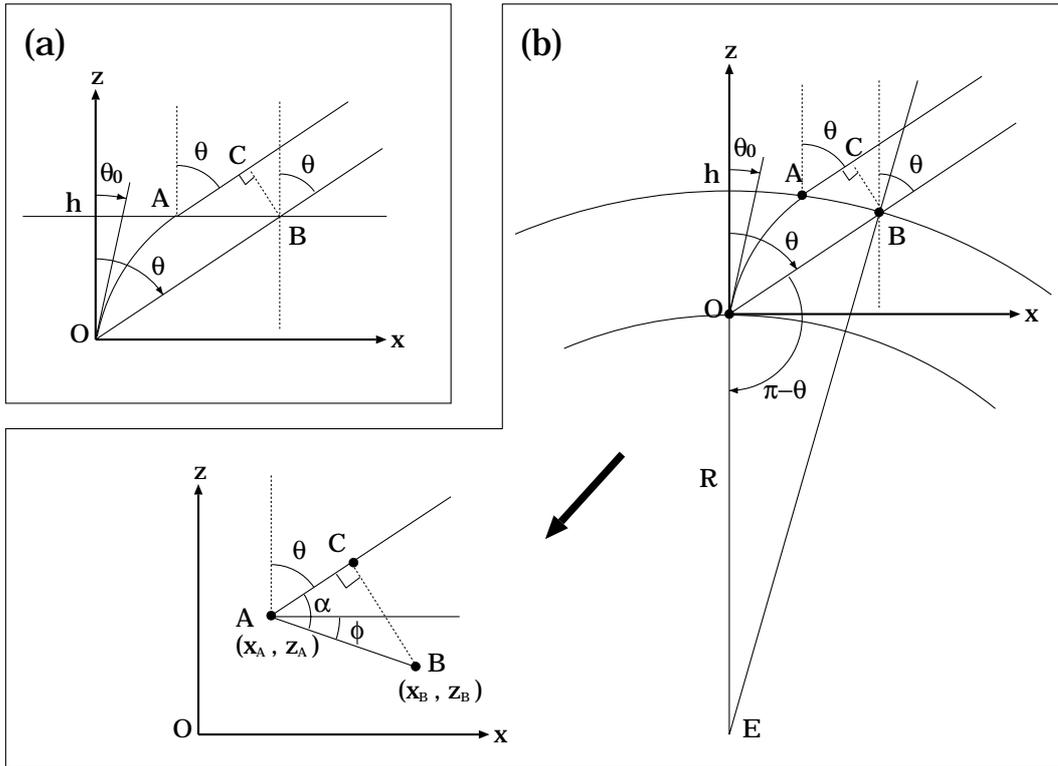


図 2.2. 中性大気中の電波の経路。(a) 平面大気。(b) 湾曲大気。それぞれ高さ  $h$  より上方では屈折率は 1 とする。実際の大气のようにそこより下方では下に向かうに連れて屈折率が段々大きくなっている場合は、図の A O のパスに示されるように経路が湾曲する。

$$\tau_{AC} = \overline{AC}/c = \overline{AB} \sin \theta / c = (x_B - x_A) \sin \theta / c$$

5. 最終的に excess delay ( $\Delta\tau$ ) を次式で求める。

$$\Delta\tau = \tau_{OA} + \tau_{AC} - \tau_{OB}$$

### 2.1.2 湾曲大気の場合

湾曲大気の場合 (図 2.2(b)) の excess delay の具体的求め方は以下の通りである。

1. レイトレースで求められた A 点の座標を  $(x_A, z_A)$  とする。そこでの伝播方向 (角度) を  $\theta$  とする。また レイトレースで得た伝播時間を  $\tau_{OA}$  とする。
2. B 点の座標を  $(x_B, z_B)$  を求めるために、 $\overline{OB}$  を以下のように求める。

三角形 O E B に余弦定理を適用すると、

$$\overline{BE}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OE}^2 - 2\overline{OB} \cdot \overline{OE} \cos(\pi - \theta) \quad (6)$$

ここで、 $\overline{BE} = R + h$ ,  $\overline{OE} = R$ ,  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$  であるから、

$$(R + h)^2 = \overline{OB}^2 + R^2 + 2\overline{OB} \cdot R \cos \theta$$

となる。これは  $\overline{OB}$  の 2 次方程式であるから根の公式を使って解くと

$$\overline{OB} = -R \cos \theta \pm \sqrt{R^2 \cos^2 \theta + 2R \cdot h + h^2} \quad (7)$$

となる。有意な解は複合の“+”を取った場合であるから、結局

$$\overline{OB} = -R \cos \theta + \sqrt{R^2 \cos^2 \theta + 2R \cdot h + h^2} \quad (8)$$

となる。

3.  $\overline{OB}$  を使って B 点の座標  $(x_B, z_B)$  は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} x_B &= \overline{OB} \sin \theta \\ z_B &= \overline{OB} \cos \theta \end{aligned}$$

4. A 点の座標を  $(x_A, z_A)$ 、B 点の座標を  $(x_B, z_B)$  とすると、 $\overline{AC}$  は以下のように計算される。

図 2.2(b) の左下の図から、

$$\overline{AC} = \overline{AB} \cos \alpha \quad (9)$$

ここで、

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta + \phi \quad (10)$$

であるが、A、B の座標値が既知なので、 $\phi$  は

$$\phi = \tan^{-1} \frac{z_A - z_B}{x_B - x_A} \quad (11)$$

で求められる。したがって、 $\overline{AC}$  の計算式として

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (z_A - z_B)^2} \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta + \tan^{-1} \frac{z_A - z_B}{x_B - x_A} \right) \quad (12)$$

を得る。

5.  $\tau_{AC}$  および  $\tau_{OB}$  は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \tau_{AC} &= \overline{AC}/c \\ \tau_{OB} &= \overline{OB}/c \end{aligned}$$

6. 最終的に excess delay ( $\Delta\tau$ ) を次式で求める。

$$\Delta\tau = \tau_{OA} + \tau_{AC} - \tau_{OB}$$

### 3 レイトレーシング

屈折率が場所の関数として与えられているときに、電波の通路を逐次追跡していくことをレイトレーシング (ray tracing) と呼ぶ。媒質の変化が  $x, z$  方向のみで  $y$  方向には一様であるとし、電波の進行方向も  $x, z$  面内のみの変化とすると、2次元問題となり、 $k$ ベクトルの変化を与える式

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{c}{\omega n^2} \left( \frac{\partial n}{\partial x} \cos \theta - \frac{\partial n}{\partial z} \sin \theta \right) \quad (13)$$

と、通路に沿った長さ $\tau$ に比例するパラメータ $\tau$ と時間パラメータ $t$ の関係

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\omega n} \left( n + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega} \right) \quad (14)$$

が、レイトレーシングの基本式となる。ここで、 $c$ は真空中の光速、 $n$ は屈折率、 $\omega$ は電波の角周波数、 $\theta$ は $z$ 軸と $k$ ベクトルのなす角度である(図3.1)。(この式の導出については参考文献[3]等を参照されたい。)なお、(14)式右辺の( )内は群速度 $v_g (= \partial\omega/\partial k)$ を使って、 $n_g = c/v_g$ とすると

$$\begin{aligned} n_g &= \frac{c}{\partial\omega/\partial k} \\ &= c \frac{\partial k}{\partial \omega} \\ &= \frac{\partial\omega n}{\partial \omega} \\ &= n + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega} \end{aligned}$$

であるから、 $n_g$ に一致する。この $n_g$ は群屈折率と呼ばれる。 $n_g$ を使うと(14)式は以下のように書ける。

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{n_g}{\omega n} \quad (15)$$

したがって、(13)(15)から $d\theta/dt$ を求めると

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{nn_g} \left( \frac{\partial n}{\partial x} \cos \theta - \frac{\partial n}{\partial z} \sin \theta \right) \quad (16)$$

となる。(16)式が単位時間当たりの $k$ ベクトルの変化を表す。

実際のレイトレーシングは以下のように行う。

1. 出発点(0点)の座標 $(x, z)$ および最初の $k$ ベクトルの方向 $\theta$ を与える。
2. レイトレースを行う時間ステップ $\Delta t$ を決める。(  $\Delta t$ の間に電波が進む距離が媒質のスケールに比べて十分小さくなるように決める。あまり、小さすぎても非効率。 )
3.  $(x, z)$ で(16)式を計算し、その値に $\Delta t$ を乗じて $\Delta t$ 後の $k$ ベクトルの変化( $\Delta\theta$ とする)を求める。
4.  $\Delta t$ 間に進む距離 $\Delta L (= v_g \Delta t)$ を求める。
5.  $\Delta t$ 後の波の進行位置の $x, z$ 座標値を以下のように求める。

$$\begin{aligned} x' &= x + \Delta L \sin\left(\theta + \frac{1}{2}\Delta\theta\right) \\ z' &= z + \Delta L \cos\left(\theta + \frac{1}{2}\Delta\theta\right) \end{aligned}$$

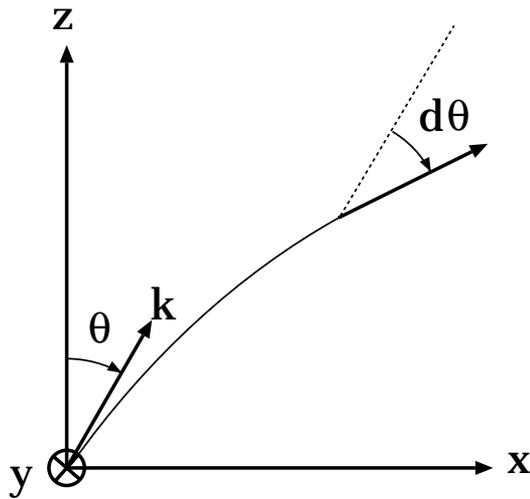


図 3.1. 2次元レイトレーシングの座標系。

6.  $(x', z')$  を新たな  $(x, z)$  とする。
7.  $\theta + \Delta\theta$  を新たな  $\theta$  とする。
8. 3. からのプロセスを繰り返し、逐次経路を追跡する。

実際にプログラミングした後、最終点から逆向きにトレースしていき、出発点のところとにかく正しく戻るか、プログラミングや時間刻みの設定の妥当さを判定できる。(付録 C 参照)

さらに、単純化した 1 次元媒質の場合を参考のために以下に示しておく。

媒質が Z 方向のみにしか変化していないときは  $\partial n / \partial x = 0$  であるから、(16) 式は

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{c}{nn_g} \cdot \frac{\partial n}{\partial z} \cdot \sin\theta \quad (17)$$

となる。さらに屈折率に分散性がないとすると  $\partial n / \partial \omega = 0$  であるから、結局  $n_g = n$  となり

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{c}{n^2} \cdot \frac{\partial n}{\partial z} \cdot \sin\theta \quad (18)$$

となる。

(18) 式はスネルの法則からも導くことができる。(付録 A 参照)

## 4 標準大気モデル (U.S. Standard Atmosphere 1976) を使ったレイトレーシング

ここでは標準大気モデルを使って実際にレイトレーシングを行った結果について述べる。

### 4.1 標準大気モデル (U.S. Standard Atmosphere 1976)

高度に対する温度、気圧のモデルとして米国標準大気モデル (U.S. Standard Atmosphere 1976) がある。このモデルで地表での気温、気圧、密度から任意の高度での気温、気圧、密度を求めることが出来る。また FORTRAN プログラム (ソースコード) が提供されており、レイトレーシングのような数値計算に用いるのに適している。なお、FORTRAN プログラムは WWW のサイト <http://www.pdas.com/atmosf90.htm> からダウンロードできる。このプログラムで計算した米国標準大気モデル (気温、気圧) の高度プロファイル例を図 4.1 に示す。この例では地表での気温、気圧、密度をそれぞれ、288.15 K (=15 °C)、1013.25 hPa、1.2250 kg/m<sup>3</sup> とした (この値は以降のレイトレーシングで標準大気を用いる場合にも使用している)。計算から求めた気圧のスケールハイトは約 7.7 km となっている。なお、このモデルに湿度の影響を取り込む方法は後述す

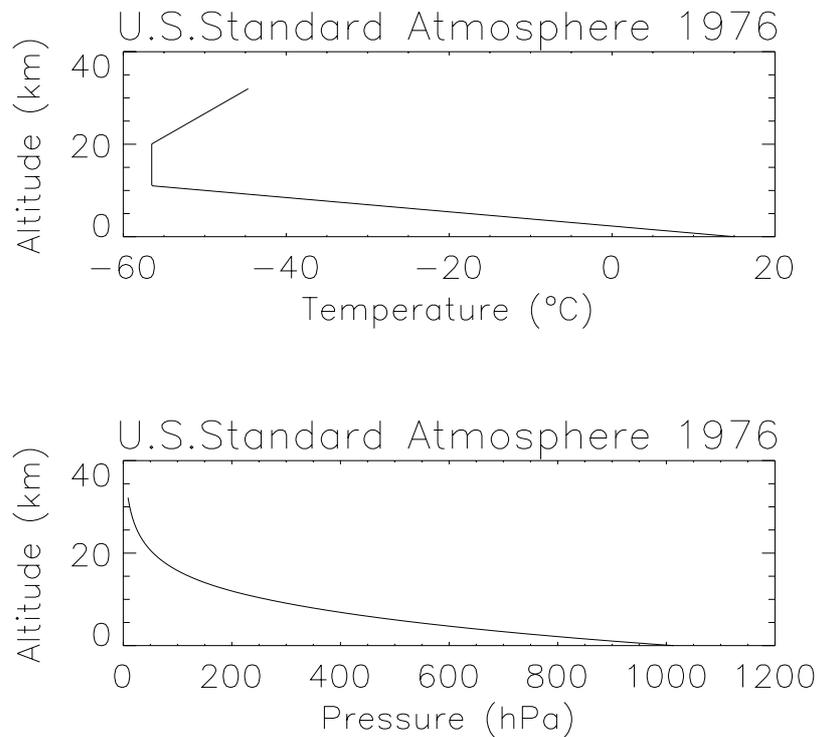


図 4.1. 米国標準大気モデル (U.S. Standard Atmosphere 1976)。上から温度、気圧の高度プロファイル。地表での気温、気圧、密度をそれぞれ、288.15 K (=15 °C)、1013.25 hPa、1.2250 kg/m<sup>3</sup> である。

る。

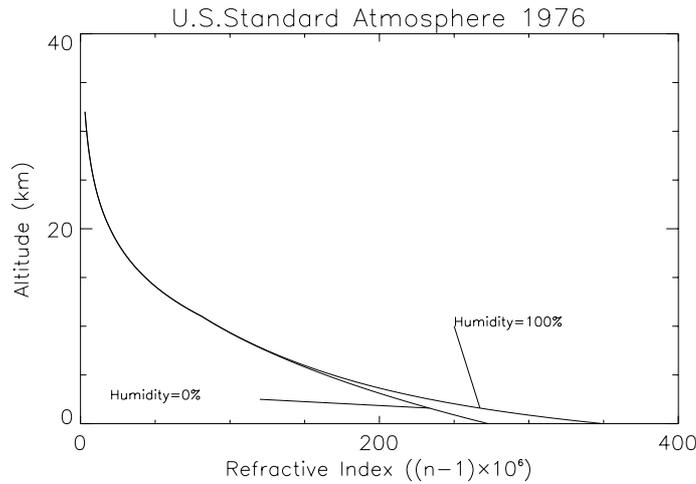


図 4.2. 米国標準大気モデルで計算した屈折率の高度変化。湿度 0 % と 1 0 0 % の場合を示す。

## 4.2 大気の屈折率

実際に大気での excess delay をレイトレーシングで求めるには屈折率を場所の関数として与える必要がある。気圧、気温から大気の屈折率を計算する式として、Smith-Weintaub (1953)[1] の式がある。屈折率  $n$  に対して  $N = 10^6(n - 1)$  で与えられる  $N$  は

$$N = 77.6 \frac{p_D}{T} + 64.8 \frac{p_V}{T} + 3.776 \times 10^5 \frac{p_V}{T^2} \quad (19)$$

で与えられる。ここで、 $p_D$  および  $p_V$  は乾燥大気圧および水蒸気分圧である（単位 hPa）。 $T$  は絶対温度である。なお、(19) 式の係数は Thayer(1974)[2] による。図 4.2 に米国標準大気モデルを使って計算した屈折率  $N$  の高度変化を示す。図には湿度 0 % の場合と 1 0 0 % の場合がプロットされているが、湿度を標準大気モデルに取り込む方法は次節で述べる。なお、湿度 0 % および 1 0 0 % の場合の屈折率変動のスケールハイトはそれぞれ 9.3 km および 7.3 km となり、湿度 1 0 0 % の場合のスケールハイトは湿度 0 % の場合のそれと比べると約 4 分の 3 となっている。

## 4.3 標準大気モデルへの湿度の取り込み法（大気の飽和水蒸気圧）

標準大気モデルに湿度の影響を取り込むためには、各高度（気圧  $P$ 、気温  $T$ ）における飽和水蒸気圧を気圧  $P$  と気温  $T$  の関数で表す必要がある。ここでは、地上（1 気圧）における飽和水蒸気圧と温度の関係から、気圧に対しての比例関係として任意の気圧における飽和水蒸気圧を求めることにした。地上（1 気圧）における飽和水蒸気圧  $P_{V_s0}$  と温度の関係を与える式として、VLBI 予測値計算ソフトウェア (CALC8) では

$$P_{V_s0} = 6.11 \times \exp\left(\frac{17.269T}{T + 237.3}\right) \quad (\text{hPA}) \quad (20)$$

を使っている。ここで温度は摂氏 ( ) である。この他に

$$P_{V_s0} = 6.11 \times 10^{7.5T/(T+237.3)} \quad (\text{hPA}) \quad (21)$$

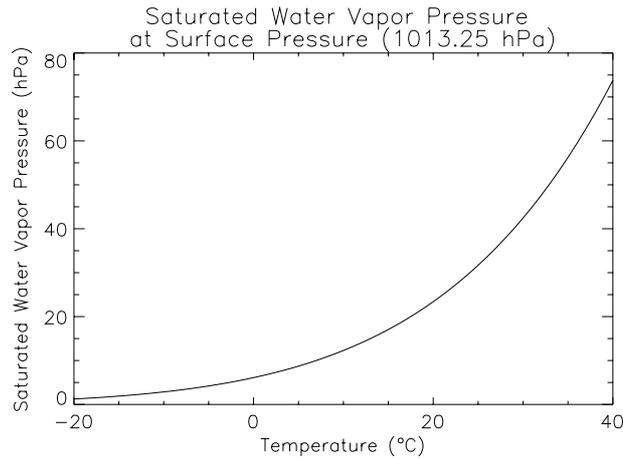


図 4.3. 地上 1 気圧 (1013.25 hPa) における飽和水蒸気圧 (計算に使用したモデル)。

という式 (出典: Experimental Physics B (1976), p.187) もある。(20) 式を使って計算した地上 (1 気圧 = 1013.25 hPa) における飽和水蒸気圧を図 4.3 に示す。参考のため、「岩波理化学辞典第 5 版」の『水蒸気』の項目に示されている地上 (1 気圧) における飽和水蒸気圧と温度の関係を表 4.1 に示す。

表 4.1. 1 気圧における飽和水蒸気圧と密度 (出典: 岩波理化学辞典第 5 版)

温度 ( )	飽和圧力 atm	密度 (g/dm <sup>3</sup> )	温度 ( )	飽和圧力 atm	密度 (g/dm <sup>3</sup> )
0	0.00603	0.00485	80	0.4674	0.2993
10	0.01211	0.00940	90	0.692	0.4325
20	0.02306	0.01729	100	1.000	0.598
30	0.04186	0.03037	110	1.414	0.826
40	0.0728	0.0512	120	1.959	1.122
50	0.1217	0.0830	150	4.697	2.548
60	0.1966	0.1302	200	15.35	7.86
70	0.3075	0.1982			

地上 (気圧  $P_0$ ) における飽和水蒸気圧  $P_{V_s0}$  が与えられた時、気圧  $P$  における飽和水蒸気圧  $P_{V_s}$  は次式で求めた。

$$P_{V_s} = P_{V_s0} \times \frac{P}{P_0} \quad (22)$$

#### 4.4 天頂方向の excess delay

天頂方向へは電波は直進するため excess delay の計算にあたって複雑なレイトラッキングを行わなくても単純な数値積分の実行で可能である。実際の斜め方向伝播のレイトラッキングを行う前に、天頂方向の excess delay の高度変化を調べておくことは、実際のレイトラッキングを行う高度方向の範囲を決めるためにも有効である。

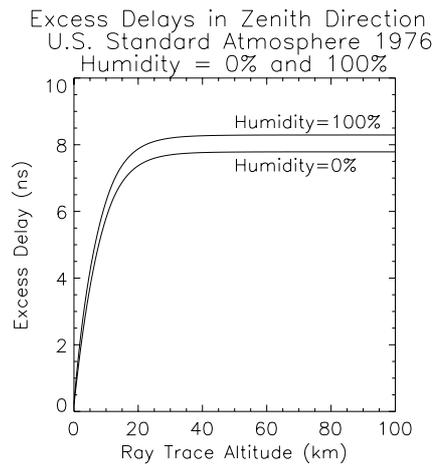


図 4.4. 湿度 0 % と 1 0 0 % の場合の excess delay (天頂方向) の比較 (米国標準大気モデル)

図 4.4 に地表 (高度 0) から天頂方向に電波が進む場合の高度に対する excess delay を米国標準大気モデルを使って、湿度をそれぞれ 0 % および 1 0 0 % として求めた結果を示す。図から、高度 4 0 km 以上においては excess delay の変化はほとんどなく、レイトレースを行う際の高度は 4 0 km までで十分であることが推測される。ちなみに、湿度 0 % および 1 0 0 % における最終高度 (1 0 0 km) における excess delay は、それぞれ 7.79 ns および 8.29 ns である。

#### 4.5 斜め方向伝播の場合の excess delay

斜め方向に伝播する場合の excess delay の計算には実際の経路を求めるためにレイトレーシングを行う。実際の結果を平面大気の場合と湾曲大気の場合に分けて以下に示し、最後に両者の比較を示す。

##### 4.5.1 平面大気の場合

平面大気の場合、屈折率の変動は  $z$  方向のみを考える。実際のレイトレーシングに必要な  $dn/dz$  は数値微分 (付録 B で示される 5 点法を使用) で求めた。地上から高度 4 0 km までレイトレーシングを行った結果を図 4.5 に示す。図 4.5 の左のパネルは湿度 0 %、真ん中のパネルは湿度 1 0 0 % の場合の、地上での初期天頂角と最終的な角度の違い  $\Delta Angle$ 、Excess Delay、および  $\Delta Geometrical Path$  を初期天頂角に対してプロットしたものである。ここで、 $\Delta Angle$  は図 2.2 で  $\theta - \theta_0$  である。 $\Delta Geometrical Path$  は経路の湾曲による幾何学的な経路長の増加分だけを表している (excess delay に真空中の光速を乗じたものではないので注意)。一番右側のパネルは湿度 1 0 0 % の場合と 0 % の場合の差を示している。一番右側のパネルのみ横軸は宇宙空間から大気への入射時の角度を取っている。

##### 4.5.2 湾曲大気の場合

湾曲大気の場合は屈折率が  $z$  方向だけでなく、 $x$  方向にも変化する。計算に必要な偏微分係数  $\partial n/\partial x$  および  $\partial n/\partial z$  は 1 次元の場合と同様に数値微分で求める。高度 4 0 km までトレースを行って求めた地上での初期天頂角と最終的な角度の違い、Excess Delay、および  $\Delta Geometrical Path$  を初期天頂角に対してプロットしたものを図 4.6 に示す。左のパネルは湿度 0 %、真ん中のパネルは湿度 1 0 0 % の場合を示している。一番右側のパネルは湿度 1 0 0 % の場合と 0 % の場合の差を示している。一番右側のパネルのみ横軸は宇宙空間から大

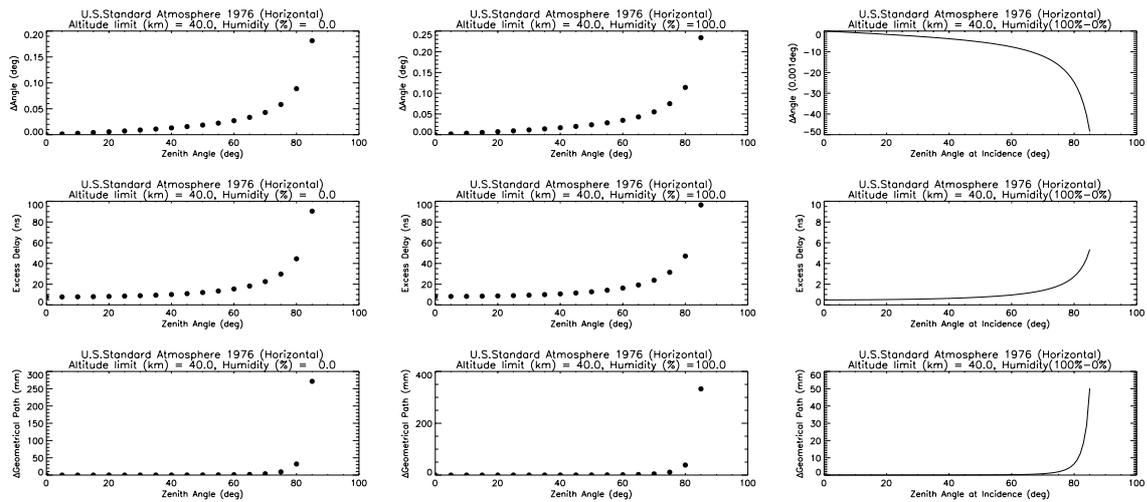


図 4.5. 湿度 0 % (左のパネル) と 100 % (中のパネル) の場合の地表での電波打ち出し角度 (初期天頂角) と最終的な天頂角度の違い (上段パネル)、Excess Delay (中段)、および  $\Delta$ Geometrical Path (下段) の比較 (米国標準大気モデル)。高度 40 km までのトレース結果である。横軸は地表での電波打ち出し角度を取っている。一番右側のパネルは湿度 100 % の場合と 0 % の場合の差を示している。一番右側のパネルのみ横軸は宇宙空間から大気への入射時の角度を取っている。ここで  $\Delta$ Geometrical Path は経路の湾曲による幾何学的な経路長の増加分だけを表している (excess delay に真空中の光速を乗じたものではないので注意)。この計算では地球の曲率による大気の湾曲は考慮していない。

気への入射時の角度を取っている。

#### 4.5.3 平面大気と湾曲大気と比較

大気が水平成層の場合と、湾曲した場合の比較を図 4.7 に示す。左のパネルが湿度 0 % の場合の比較 (水平大気 - 湾曲大気)、右の図は湿度 100 % の場合の比較を示す。図 4.8 に Excess Delay の差についてのみ、縦軸を拡大 (0.0 - 0.1 ns) して示す。横軸は宇宙空間から大気への入射時の角度を取っている。上段は湿度 0 % の場合、下段は湿度 100 % の場合を示すが、図に示されるように湿度の違いによる差はほとんど見られない。大気が水平成層の場合と、湾曲した場合の Excess Delay の差は天頂角  $40^\circ$  で約 0.01 ns (= 約 3 mm) となり、さらに天頂角が大きくなる程 (仰角が小さくなる程) その差は大きくなる。このことから V L B I で mm の精度を議論する場合、大気の湾曲の効果も取り入れなくてはならないことがわかる。

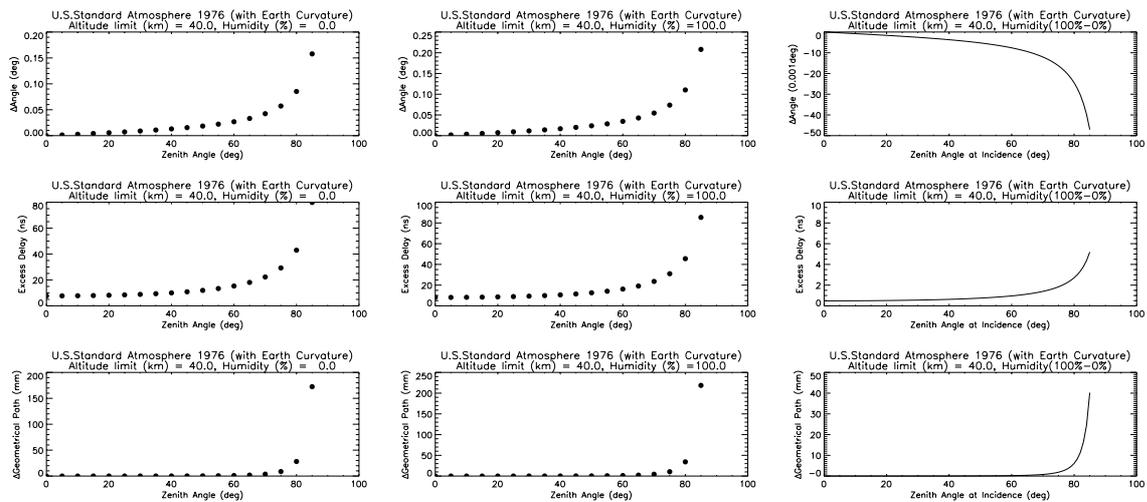


図 4.6. 地球の曲率による大気の湾曲を考慮した場合の地表での電波打ち出し角度（初期天頂角）と最終的な天頂角度の違い（上段パネル）、Excess Delay（中段）、および  $\Delta$ Geometrical Path（下段）（米国標準大気モデル）。高度 40 km までのトレース結果である。左のパネルは湿度 0% の場合、真ん中のパネルは湿度 100% の場合を示す。横軸は地表での電波打ち出し角度を取っている。一番右側のパネルは湿度 100% の場合と 0% の場合の差を示している。一番右側のパネルのみ横軸は宇宙空間から大気への入射時の角度を取っている。この計算では地球の曲率による大気の湾曲は考慮している。

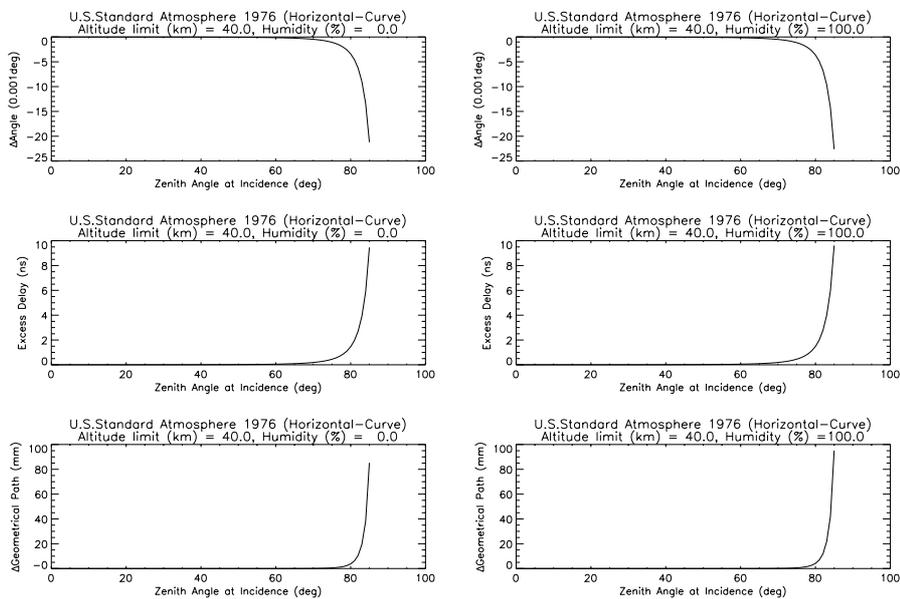


図 4.7. 大気が水平成層の場合と、湾曲した場合の比較（水平 - 湾曲）。地表での電波打ち出し角度（初期天頂角）と最終的な天頂角度の違い（上段パネル）、Excess Delay（中段）、および  $\Delta$ Geometrical Path（下段）（米国標準大気モデル）。高度 40 km までのトレース結果である。左のパネルは湿度 0% の場合、右のパネルは湿度 100% の場合を示す。横軸は宇宙空間から大気への入射時の角度を取っている。

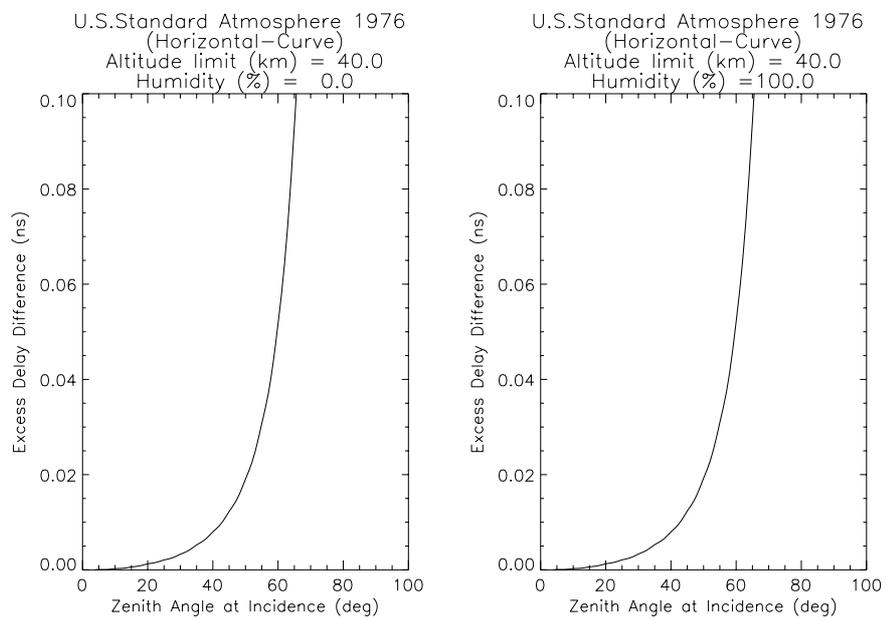


図 4.8. 大気が水平成層の場合と、湾曲した場合の Excess Delay の差（水平 - 湾曲）。米国標準大気モデルを使用した高度 40 km までのトレース結果である。上段は湿度 0% の場合、下段は湿度 100% の場合を示す。湿度の違いによる差はほとんど見られない。横軸は宇宙空間から大気への入射時の角度を取っている。

## 5 大気によるアンテナの見かけの位置変化

大気で生じる excess delay はアンテナの見かけの位置変化をもたらす。図 5.1 に大気によるアンテナ位置の

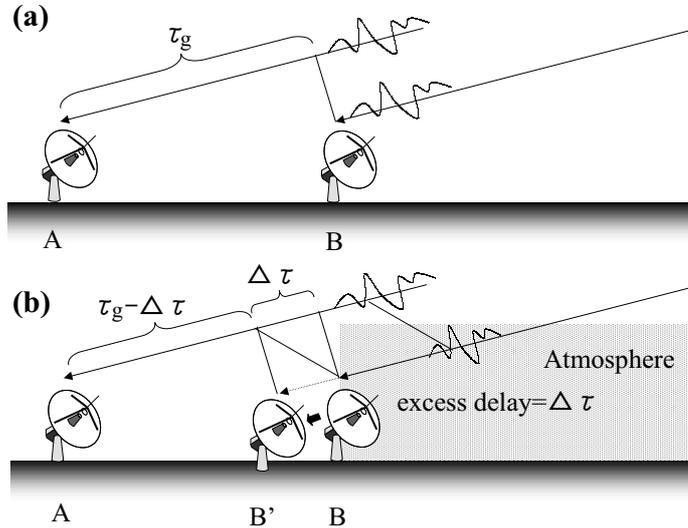


図 5.1. 大気によるアンテナ位置の見かけ上の変化。(a) 大気がない場合アンテナ B に到達する波面は幾何学的な遅延時間である  $\tau_g$  だけ遅れてアンテナ A に到達する。(b) アンテナ B の右側だけに大気がある場合、アンテナ B に到達する波面は大気による excess delay 分の  $\Delta\tau$  遅れるために B に到達する波面が A に到達するのに要する時間は  $\tau_g - \Delta\tau$  となる。これは大気がないとした場合にアンテナ B の位置が  $\Delta\tau$  分だけ電波の進行方向に移動した場合に観測される遅延時間と等価である。

見かけ上の変化を模式的に示している。大気がない場合はアンテナ B に到達する波面は幾何学的な遅延時間である  $\tau_g$  だけ遅れてアンテナ A に到達する。ところがアンテナ B の右側だけに大気がある場合を考えると、アンテナ B に到達する波面は大気による excess delay 分の  $\Delta\tau$  遅れるために B に到達する波面が A に到達するのに要する時間は  $\tau_g - \Delta\tau$  となる。これは大気がないとした場合にアンテナ B の位置が  $\Delta\tau$  分だけ電波の進行方向に移動した場合に観測される遅延時間と等価である。したがって、大気の excess delay はアンテナの見かけ上の位置を電波の進行方向に excess delay 分だけシフトする効果がある。excess delay は正であるため、大気があるために生じるシフトしたアンテナ位置は絶えず下側にずれることになる。実際に標準大気モデルを使って水平大気および湾曲大気について計算した excess delay を使って鉛直面内でのアンテナの見かけ上の位置を求めたものを図 5.2 に示す。水平大気の場合は図に示されるように天頂方向の excess delay 分だけ下にずれたほぼ平面上に位置することが分かる。湾曲大気の場合は、下に凸の曲面上に位置している。

これらの大気の excess delay を補正しなければ、VLBI での正確な位置観測は行えないことになる。VLBI 解析では、大気の excess delay を補正するために天頂方向の excess delay およびそれを任意の仰角に焼き直すための関数（マッピング関数）を使用する。通常、天頂方向の excess delay およびその変化率を数時間毎の観測データから推定している。すなわち、仰角  $El$  方向の excess delay を

$$\tau(El) = \tau_z M(El) \quad (23)$$

とモデル化して、様々な仰角の観測データ（の時系列）から  $\tau_z$  および  $d\tau_z/dt$  を推定している。ここで、 $M(El)$  はマッピング関数と呼ばれ、いくつかの種類の関数を使用されている。このマッピング関数については次節で詳細に述べる。

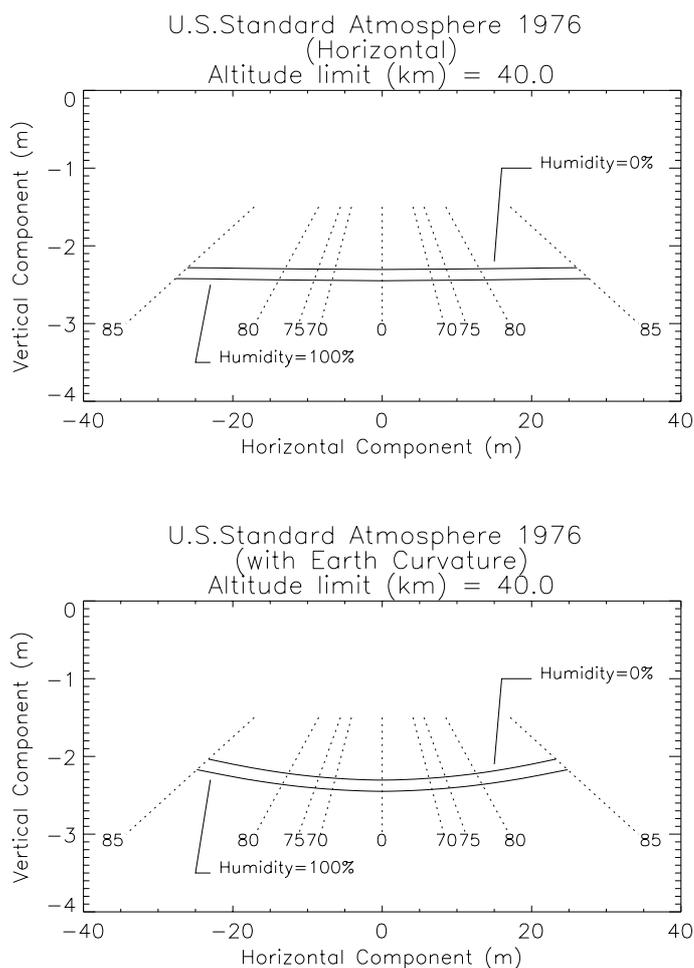


図 5.2. 標準大気モデルから求めた鉛直面内でのアンテナ位置の見かけの変化。上段は水平大気、下段は湾曲大気の場合。excess delay に光速速度を乗じて長さの単位に変換している。図中の破線は等入射角、数字は天頂角を表している。

天頂方向の excess delay の推定にあたって、マッピング関数に仰角依存性も考慮にいれていない場合、大気が方位角に対して非等方的である場合は、観測されるアンテナ位置の水平面内の位置にはバイアスが生じる。同じ仰角でも見る方向によって excess delay が異なってくると、平均化されたアンテナの見かけ上位置がシフトするためである。

## 5.1 マッピング関数

V L B I 解析では、大気の excess delay を補正するために天頂方向の excess delay およびそれを任意の仰角に焼き直すための関数（マッピング関数）を使用する。ここでは、V L B I 解析で使われる代表的なマッピング関数と米国標準大気モデルを使ったレイトレーシングの結果を比較する。

### 5.1.1 Niell マッピング関数

Niell マッピング関数は次式で示される Marini のマッピング関数の係数  $a, b, c$  を静水圧平衡大気（以下乾燥大気と略記）および湿潤大気に対して標準大気のレイトレーシングによって決定したものを使用する。それぞれ緯度依存性を考慮するが、乾燥大気成分に関しては季節変動（年周変動）も考慮する。

$$M(El) = \frac{1}{\sin El + \frac{a}{\sin EL + \frac{b}{\sin El + c}}} \quad (24)$$

Niell のモデルでは係数  $a, b, c$  は絶対値緯度  $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$  における値が与えられており、絶対値緯度  $15^\circ \sim 75^\circ$  の値は内挿で求める。絶対値緯度  $15^\circ$  以下および  $75^\circ$  以上では  $15^\circ$  および  $75^\circ$  での値が使用される。また、絶対値緯度  $15^\circ \sim 75^\circ$  の範囲では、それぞれの係数の年周変化も考慮する。その年周変化分の大きさも緯度毎に係数が与えられており、任意の緯度の値について内挿値を使用する。表 5.1 にこれらの係数を示す。

表 5.1. Niell マッピング関数の係数。乾燥大気の平均値  $\bar{a}_d, \bar{b}_d, \bar{c}_d$ 、年周成分の大きさ  $a_y, b_y, c_y$ 、および湿潤大気  
の平均値  $\bar{a}_w, \bar{b}_w, \bar{c}_w$ （出典：Mark-III データ解析ソフトウェア CALC8.0 ソースコード）

係数	緯 度				
	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$
$\bar{a}_d(10^{-3})$	1.2769934	1.2683230	1.2465397	1.2196049	1.2045996
$\bar{b}_d(10^{-3})$	2.9153695	2.9152299	2.9288445	2.9022565	2.9024912
$\bar{c}_d(10^{-3})$	62.610505	62.837393	63.721774	63.824265	64.258455
$a_y(10^{-5})$	0.0	1.2709626	2.6523662	3.4000452	4.1202191
$b_y(10^{-5})$	0.0	2.1414979	3.0160779	7.2562722	11.723375
$c_y(10^{-5})$	0.0	9.0128400	4.3497037	84.795348	170.37206
$\bar{a}_w(10^{-4})$	5.8021897	5.6794847	5.8118019	5.9727542	6.1641693
$\bar{b}_w(10^{-3})$	1.4275268	1.5138625	1.4572752	1.5007428	1.7599082
$\bar{c}_w(10^{-2})$	4.3472961	4.6729510	4.3908931	4.4626982	5.4736038

表 5.1 の係数を使って、 $a, b, c$  は以下のように計算される。

#### 1. 緯度 $15^\circ$ 以下の場合

$$a = \bar{a}_{15}$$

$$b = \bar{b}_{15}$$

$$c = \bar{c}_{15}$$

ここで、 $\bar{a}_{15}, \bar{b}_{15}, \bar{c}_{15}$  は緯度  $15^\circ$  における  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  である。

#### 2. 緯度 $15^\circ$ から $75^\circ$ の場合

$$a = \bar{a}_\lambda - a_{y_\lambda} \cos \theta$$

$$b = \bar{b}_\lambda - b_{y_\lambda} \cos \theta$$

$$c = \bar{c}_\lambda - c_{y_\lambda} \cos \theta$$

ここで、 $\bar{a}_\lambda, \bar{b}_\lambda, \bar{c}_\lambda$  は緯度  $\lambda$  における係数  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ （表の値の内挿で求める）、 $a_{y_\lambda}, b_{y_\lambda}, c_{y_\lambda}$  は緯度  $\lambda$  における年周成分の大きさ  $a_y, b_y, c_y$ （表の値の内挿で求める）、 $\theta$  は

$$\theta = 2\pi(\text{通日} - 28)/365.25 \quad \text{ラジアン}$$

である。南半球の場合は上式で求めた  $\theta$  の位相を  $\pi$  進める。湿潤大気の場合は、この年周項は 0 とする。

### 3. 緯度 $7.5^\circ$ 以上の場合

$$a = \bar{a}_{75}$$

$$b = \bar{b}_{75}$$

$$c = \bar{c}_{75}$$

ここで、 $\bar{a}_{75}, \bar{b}_{75}, \bar{c}_{75}$  は緯度  $7.5^\circ$  における  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  である。

鹿島（緯度  $36^\circ$ ）における乾燥大気の  $a, b, c$  の年変動を図 5.3 に示す。なお、湿潤大気に対する鹿島での  $a, b, c$  はそれぞれ、 $5.7324116 \times 10^{-4}, 1.4912276 \times 10^{-3}, 4.5601278 \times 10^{-2}$  となる。

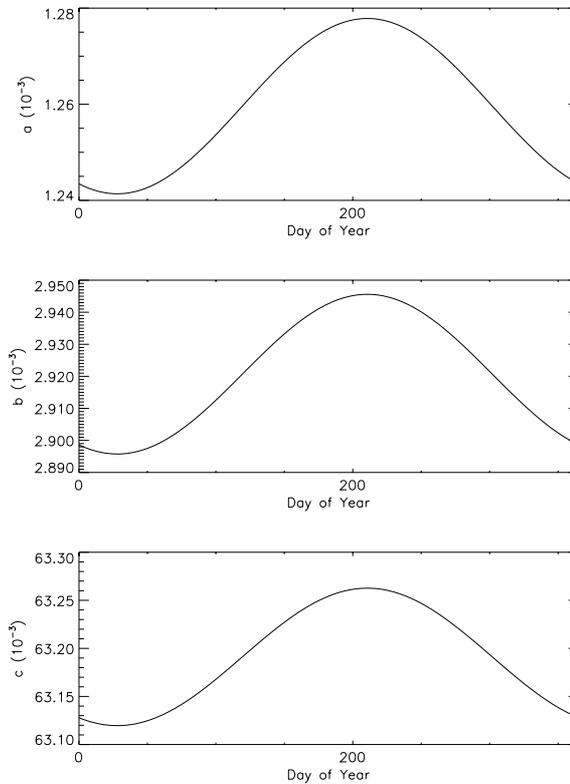


図 5.3. Niell マッピング関数の乾燥大気における係数  $a, b, c$ 。鹿島の緯度  $36^\circ$  での計算値。

さらに Niell のモデルでは天頂方向の遅延は Saastamoninen(1972)[4] のモデルで計算している。乾燥大気については

$$Z_D = \frac{2.2768 \times 10^{-3} P}{1 - 0.00266 \cos 2\lambda - 0.00028h} \quad (\text{m}) \quad (25)$$

で計算する。ここで、 $P$  は地表での気圧 (hPa)、 $\lambda$  は局緯度、 $h$  は局高度 (km) である。

湿潤大気については

$$Z_W = 2.277 \times 10^{-3} \left( \frac{1255}{T + 273.16} + 0.05 \right) r \cdot P_{vs} \quad (\text{m}) \quad (26)$$

で計算する。ここで  $T$  は地表での気温 ( )、 $r$  は相対湿度 (0.0 ~ 1.0)、 $P_{vs}$  は地表 1 気圧、温度  $T$  での飽和水蒸気圧で次式で計算する。

$$P_{vs} = 6.11 \exp \left( \frac{17.269T}{T + 237.3} \right) \quad (27)$$

ちなみに、 $T = 15$ 、 $P = 1013.25$  hPa、 $\lambda = 36^\circ$ 、 $h = 0$  m、 $r = 1.0$  とすると  $Z_D = 2.3089$  m(=7.7015 ns)、 $Z_W = 0.1711$  m(=0.5707 ns) となる。

### 5.1.2 CfA マッピング関数

CfA マッピング関数は次式で示されるマッピング関数の係数  $a, b, c$  を標準大気のレイトレーシングによって決定したものである (Davis et al, 1985)[5]。

$$M(El) = \frac{1}{\sin El + \frac{a}{\tan El + \frac{b}{\sin El + c}}} \quad (28)$$

Marini のマッピング関数 ( (24) 式) と異なる点は、連分数の第 2 項の  $\sin$  が  $\tan$  になっている点である。係数  $a, b, c$  はそれぞれ以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} a &= 0.001185 [1 + 0.6071 \times 10^{-4}(P - 1000) \\ &\quad - 0.1471 \times 10^{-3}P_{vs} \\ &\quad + 0.3072 \times 10^{-2}(T - 20) \\ &\quad + 0.1965 \times 10^{-1}(\beta + 6.5) \\ &\quad - 0.5645 \times 10^{-2}(h_t - 11.231)] \\ b &= 0.001144 [1 + 0.1164 \times 10^{-4}(P - 1000) \\ &\quad + 0.2795 \times 10^{-3}P_{vs} \\ &\quad + 0.3109 \times 10^{-2}(T - 20) \\ &\quad + 0.3038 \times 10^{-1}(\beta + 6.5) \\ &\quad - 0.1217 \times 10^{-1}(h_t - 11.231)] \\ c &= -0.0090 \end{aligned}$$

ここで、 $P$  は地表での気圧 (全気圧) (hPa)、 $P_{vs}$  は飽和水蒸気圧 (hPa) (全気圧が 1 気圧の場合は (27) 式で計算可)、 $T$  は地表での気温 ( )、 $\beta$  は地表から対流圏界面までの気温変化率 (K/km) (標準大気では  $-6.5$  K/km)、 $h_t$  は対流圏界面の高さ (km) (標準大気では 11 km) である。なお、湿度 0% の時の係数を使って計算するマッピング関数 (つまり乾燥大気に対するマッピング関数) を CfA-2.2 マッピング関数と読んでいる。

### 5.1.3 Chao マッピング関数

Chao マッピング関数は次式で示されるマッピング関数の係数  $a, b$  を標準大気のレイトレーシングによって決定したものである (Chao, 1974)[6]。

$$M(El) = \frac{1}{\sin El + \frac{a}{\tan EL + b}} \quad (29)$$

係数 a,b は乾燥大気および湿潤大気に対してそれぞれ以下のように与えられている。

	乾燥大気	湿潤大気
a	0.00143	0.00035
b	0.0445	0.017

#### 5.1.4 マッピング関数の比較

Niell マッピング関数、CfA マッピング関数、Chao マッピング関数、および今回独自にレイトレーシングで求めたマッピング関数（仮に Kondo マッピング関数と呼ぶことにする）の比較を行った。図 5.4 に乾燥大気

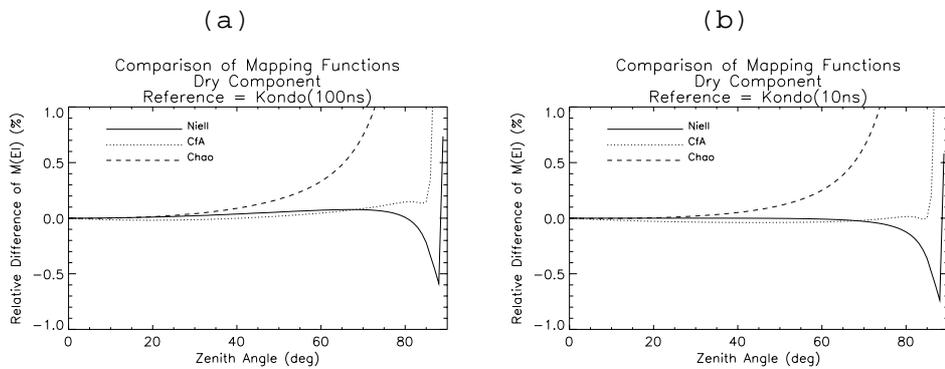


図 5.4. 各種マッピング関数の比較。横軸は天頂角である。Kondo マッピング関数を基準として相対誤差 (%) を示している。なお、Kondo マッピング関数計算のためのレイトレーシングを (a)100nsec 刻み、(b)10nsec 刻みで行った場合を示している。

についての比較結果を示す。縦軸は Kondo マッピング関数を基準とした相対誤差 (%)、横軸は天頂角である。Kondo マッピング関数計算のためのレイトレーシングを 100nsec 刻みと 10nsec 刻みで行った場合を示しているが、100nsec 刻みの場合にレイトレーシング時の誤差蓄積により軌跡の湾曲外側方向へのずれ（すなわちマッピング関数値が小さくなる）に起因すると思われる右上がりの 1 次傾斜が見られる（Niell マッピング関数および CfA マッピング関数の天頂角 70° の部分に注目）。なお、Niell マッピング関数の計算にあたっては緯度 36°、通日を 180 日とした。CfA マッピング関数の計算にあたっては地表の気温 15 °C、気圧 1013.25hPa、 $\beta$  および  $h_t$  は -6.5K/km および 11.231km とした。図 5.5 には Kondo マッピング関数との差を長さ単位で示している。天頂遅延は Kondo マッピング関数で得られる遅延 7.6741 ns をすべてのモデルについて使用した。これらの比較結果は CfA マッピング関数が Kondo マッピング関数に最も近いことを示している。

ここで、おもしろい例を示そう。図 5.6 は天頂遅延としてそれぞれのモデルから計算される値 (Chao と CfA モデルについては Niell モデルの値) を使って、excess delay を比較した場合である。図に示されるように、天頂遅延にオフセット差があると、必ずしもマッピング関数の一致度が、全体的な遅延の一致度とはならない。この例の場合は Niell モデルが定数的なオフセット誤差を除くと Kondo モデルに良く一致していると言える。

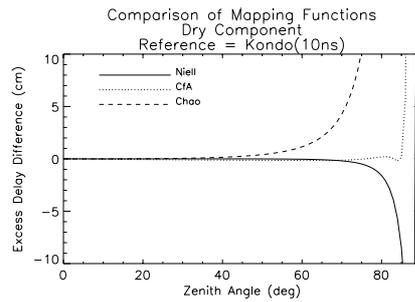


図 5.5. 各種マッピング関数の比較。天頂遅延として Kondo マッピング関数で得られる遅延 7.6741 ns をすべてのモデルについて使用した場合。横軸は天頂角である。Kondo マッピング関数を基準として excess delay の差を長さ (cm) 単位で示している。なお、Kondo マッピング関数計算のためのレイトレーシングを 10nsec 刻みで行った。

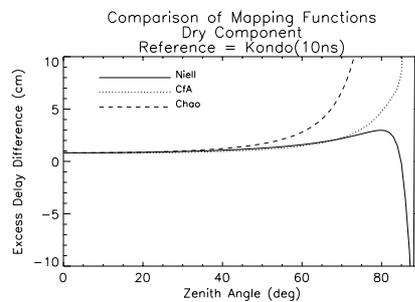


図 5.6. 各種マッピング関数の比較。天頂遅延としてそれぞれのモデルから計算される値 (Chao と CFA モデルについては Niell モデルの値) を使った場合。横軸は天頂角である。Kondo マッピング関数を基準として excess delay の差を長さ (cm) 単位で示している。なお、Kondo マッピング関数計算のためのレイトレーシングを 10nsec 刻みで行った。

## 5.2 大気の水平勾配の影響

大気が方位角に対して非等方的であるばあい、水平方向に屈折率が勾配を持っていると考えることができる。ここでは、実際の気象条件で起こりうる大気勾配に対して、見かけ上の位置変動を、レイトレーシングで求めてみる。

### 5.2.1 水平方向の勾配のモデル化

水平方向への大気の状態の変動のモデルとして、地表での気温、気圧、湿度の 1 次元変動モデルを考えた。地表に沿った位置  $s$  における気温、気圧、湿度をそれぞれ  $T(s), P(s), H(s)$  とし、

$$T(s) = T_0 + \frac{dT}{ds}s \quad (30)$$

$$P(s) = P_0 + \frac{dP}{ds}s \quad (31)$$

$$H(s) = H_0 + \frac{dH}{ds}s \quad (32)$$

とモデル化する。ここで、 $s$  は地表での  $x$  方向に沿った長さ (図 5.7) である。湿度は計算の過程で 100% を越える場合や 0% 以下となる場合は、それぞれ 100% および 0% に固定する。気温、気圧のある高さでの値を

求めるには気温、気圧の地表の値から標準大気モデルを使って計算する。また、水蒸気圧の高さ方向の変動はスケールハイト  $h_w$  で変動するモデルとした。すなわち高さ  $h$  での水蒸気圧を  $P_w(h)$  とすると、

$$P_w(h) = P_{ws} \cdot \exp\left(-\frac{h}{h_w}\right) \quad (33)$$

ここで、 $P_{ws}$  は地表での水蒸気圧で、 $T(s), P(s), H(s)$  から求める値である。

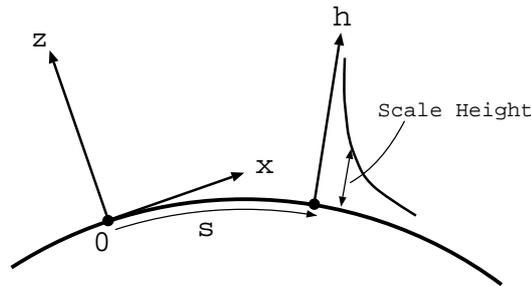


図 5.7. 水平方向の勾配のモデル化の座標系。  $s$  は地表に沿った湾曲座標。

このモデルでの大気の屈折率の例を図 5.8 に示す。この例では湿度の水平方向勾配のみの影響を見ている。原点での湿度を 70%、湿度の水平方向の勾配を 0.1%/km としている。また、水蒸気圧変化のスケールハイトを 3 km とした。

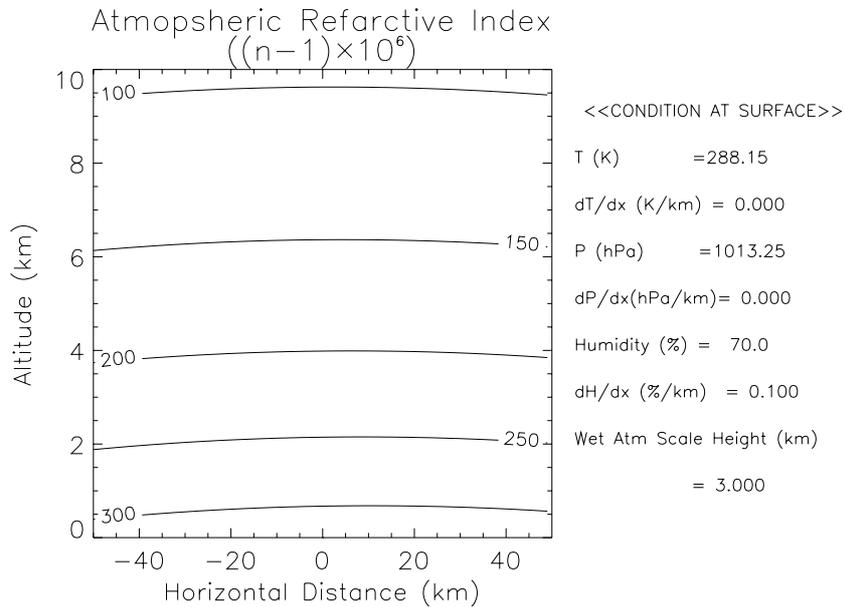


図 5.8. 地表での湿度の水平勾配を 0.1%/km とした場合の大気の屈折率  $((n-1) \times 10^6$  の値)。原点での  $T, P, H$  はそれぞれ 288.15K, 1013.25hPa, 70% とした。水蒸気圧変化のスケールハイトを 3 km としている。

### 5.2.2 水平方向の勾配が見かけのアンテナ位置変化に与える影響

V L B I 解析において、大気非等方性を考慮していない場合、大気非等方性が結果にどのような影響を及ぼすか？この量を定量的に見積もるために以下のような方法を採用した。

まず、大気方位角依存性がない場合の excess delay を求め、次に大気方位角依存性を考慮した場合の excess delay を求め、この両者の差が、見かけ上のアンテナ位置変動をもたらすと仮定した。

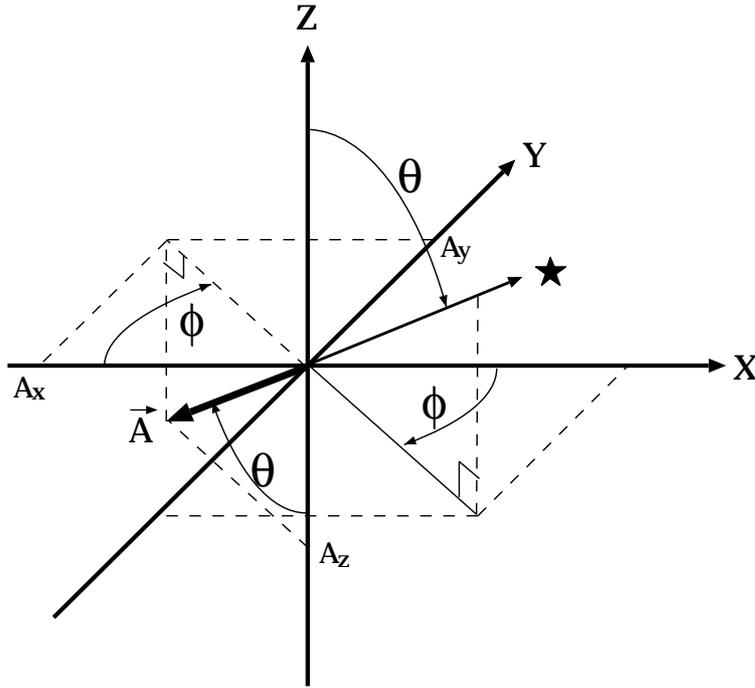


図 5.9. 見かけの位置変動を計算するための座標系。地表での大気の変動の方向を X 軸にとる。電波は天頂角  $\theta$ 、方位角  $\phi$  方向から入射する。excess delay による見かけのアンテナ位置変動は  $\vec{A}$  のように電波到来方向と逆向きとなる。

地表での大気勾配方向を方位角の基準にとって、このようにして得られるアンテナ位置変動を求めてみる。図 5.9 において電波星方向を  $(\theta, \phi)$  とするとき、アンテナ見かけ位置変動  $\vec{A}$  の水平成分  $A_x$  および  $A_y$  と鉛直成分  $A_z$  は次式のように表せる。

$$A_x(\theta, \phi) = -c(\tau(\theta, \phi) - \tau_0(\theta)) \sin \theta \cos \phi \quad (34)$$

$$A_y(\theta, \phi) = c(\tau(\theta, \phi) - \tau_0(\theta)) \sin \theta \sin \phi \quad (35)$$

$$A_z(\theta, \phi) = -c(\tau(\theta, \phi) - \tau_0(\theta)) \cos \theta \quad (36)$$

ここで、 $\tau(\theta, \phi)$  は大気方位角依存性を考慮した場合の excess delay、 $\tau_0(\theta)$  は方位角依存性がない場合の excess delay である。V L B I 解析で得られるアンテナ位置は  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$  を  $\theta$  および方位角  $(\phi)$  とする) について平均したものである、と仮定する。これを式で表すと、

$$A_{x,y,z} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} A_{x,y,z}(\theta, \phi) p(\theta, \phi) d\theta d\phi \quad (37)$$

と書ける。ここで、 $\theta_1, \theta_2$  は天頂角の観測範囲、 $\phi_1, \phi_2$  は方位角の観測範囲、 $p(\theta, \phi)$  は  $\theta, \phi$  方向の観測密度 (頻度) 関数である。ここで、観測密度に天頂角・方位角依存性がなく、一様であるとする、

$$A_{x,y,z} = \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)(\phi_2 - \phi_1)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi A_{x,y,z}(\theta, \phi) \quad (38)$$

と書くことが出来る。通常方位角方向は 0 から  $2\pi$  まで一様に観測するので、

$$A_{x,y,z} = \frac{1}{2\pi(\theta_2 - \theta_1)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi A_{x,y,z}(\theta, \phi) \quad (39)$$

となる。ここで、大気の変動が X,Z 方向だけの場合を考えて  $\tau(\theta, \phi)$  を以下のように近似した場合を考える。

$$\tau(\theta, \phi) = \tau_0(\theta) + \Delta\tau(\theta) \cos \phi \quad (40)$$

$\Delta\tau(\theta)$  は表面での大気の水平勾配がある場合のその勾配方向の天頂角  $\theta$  での excess delay とない場合の差であり、実際のレイトレーシングで求める。この近似を使うと、 $A_x(\theta, \phi), A_y(\theta, \phi), A_z(\theta, \phi)$  は次式のようになる。

$$\begin{aligned} A_x(\theta, \phi) &= -c\Delta\tau(\theta) \sin \theta \cos^2 \phi \\ &= -\frac{c}{2}\Delta\tau(\theta) \sin \theta (\cos 2\phi + 1) \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} A_y(\theta, \phi) &= c\Delta\tau(\theta) \sin \theta \cos \phi \sin \phi \\ &= \frac{c}{2}\Delta\tau(\theta) \sin \theta \sin 2\phi \end{aligned} \quad (42)$$

$$A_z(\theta, \phi) = -c\Delta\tau(\theta) \cos \theta \cos \phi \quad (43)$$

これを (39) 式に代入して計算すると、結局、残るのは X 成分のみとなり、次式のようになる。

$$A_x = -\frac{c}{2 \cdot (\theta_2 - \theta_1)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta\tau(\theta) \sin \theta d\theta \quad (44)$$

特に天頂から水平まで一様に観測する場合は

$$A_x = -\frac{c}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\tau(\theta) \sin \theta d\theta \quad (45)$$

となる。ここで  $\Delta\tau(\theta)$  は天頂において 0 で天頂角が大きくなるほど、大きな値となるが、これを

$$\Delta\tau(\theta) = \alpha \cdot m(\theta) \quad (46)$$

のようにモデル化し、マッピング関数  $m(\theta)$  の表式を考え  $\alpha$  を推定パラメータとすることも、おもしろい問題となりうる。参考までに MacMillan(1995)[7] では次式のようにモデル化している。

$$\Delta\tau = m(\varepsilon) \cot(\varepsilon) [G_N \cos(\phi) + G_E \sin(\phi)] \quad (47)$$

ここで、 $\varepsilon$  は仰角である。G をグラディエントベクトルと呼んでいる。 $G_N, G_E$  はそれぞれ G の南北成分、東西成分である。 $\phi$  は方位角である。 $\cot(\varepsilon)$  により、 $\Delta\tau$  は天頂において 0 となる。

V L B I 観測で実際に取りうる天頂角の範囲で (44) 式を計算し (レイトレーシングおよび数値積分)、 $A_x$  を求める。こうして  $A_x$  を種々の大気の水平勾配パラメータに関して求めた。

気温、気圧、湿度の水平勾配がパラメータとなるが、3つのパラメータの可能な組み合わせに関する計算は膨大となるため、とりあえずは、それぞれを単独に変えた場合について計算した。変化させないパラメータは0として計算した。図5.10に例として湿度の水平勾配を0.1%/kmとした場合の excess delay と水平勾配がない場合の excess delay の差を示す。このとき(44)式を天頂角0～80°について計算し、求めた  $A_x$  は -1.48 mm となる。

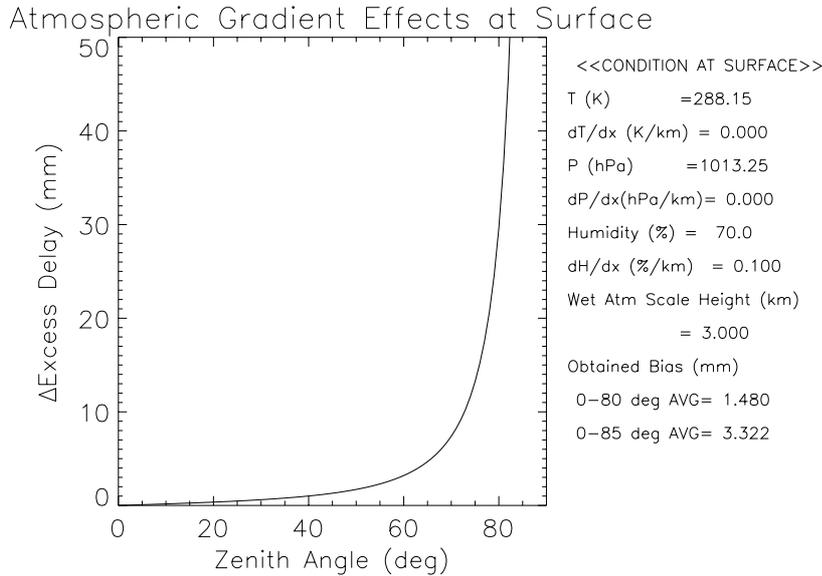


図 5.10. 地表での湿度の水平勾配を 0.1%/km (水蒸気分圧の水平勾配 0.017hPa/km に相当) とした excess delay と水平勾配がない場合の excess delay の差 (mm)。原点での T,P,H はそれぞれ 288.15K,1013.25hPa,70% とした。

図 5.11には、気温、気圧、湿度の勾配の大きさに対する観測される位置シフトを4つ異なる天頂角の範囲(0-60°, 0-70°, 0-80°, 0-85°)で平均化した場合について示している。基準とした勾配のない状態の大気地表での気温、気圧、湿度はそれぞれ288.15K,1013.25hPa,70%である。また、水蒸気圧変動のスケールハイトは3 kmとしている。なおレイトラシングは40 km 高度まで行っている。温度勾配を与えた場合は他の場合と符号が異なっているが、これは温度の高い方向に向かって、見かけ上のアンテナ位置がシフトすることを意味する。図からパラメータに対するシフト量はほぼ線形であると言える。

種々の勾配に対して求められた  $A_x$  の値のいくつかを表5.2にまとめた。表中  $A_{x70}, A_{x80}, A_{x85}$  はそれぞれ天頂角0～70°, 0～80°, 0～85°に対して計算した位置シフト量である。

表 5.2. 大気水平勾配とそれによって生じるアンテナ位置変動。 $A_{x70}, A_{x80}, A_{x85}$  はそれぞれ天頂角0～70°, 0～80°, 0～85°に対して計算した位置シフト。

$dT/ds$ (K/km)	$dP/ds$ (hPa/km)	$dH/ds$ (%/km)	$A_{x70}$ (mm)	$A_{x80}$ (mm)	$A_{x85}$ (mm)
0	0	0.1	-0.59	-1.48	-3.32
0	0.04	0	-0.43	-1.07	-2.28
0.05	0	0	0.62	1.42	2.46

さて、表中に与えた水平勾配の妥当性であるが、 $dP/ds = 0.04$  hPa/km は 100 km で 4 hPa の気圧勾配であるが、これは天気図を見ていると通常起こっても不思議ではない値である。 $dT/ds = 0.05$  K/km は 100 km で 5 の気温変動に相当するが、これは鹿島、小金井間の気温差を考えた場合、大きすぎる値かもしれない。湿度の勾配 0.1 %/km は湿潤大気がより局所的な分布をすることを考えると十分起こりうる値である。さらに大きな勾配も十分に考えられる。いずれにせよ、天頂角  $0 \sim 80^\circ$  の観測の場合、通常的气象条件で mm オーダーの変動は十分に起こりうる。

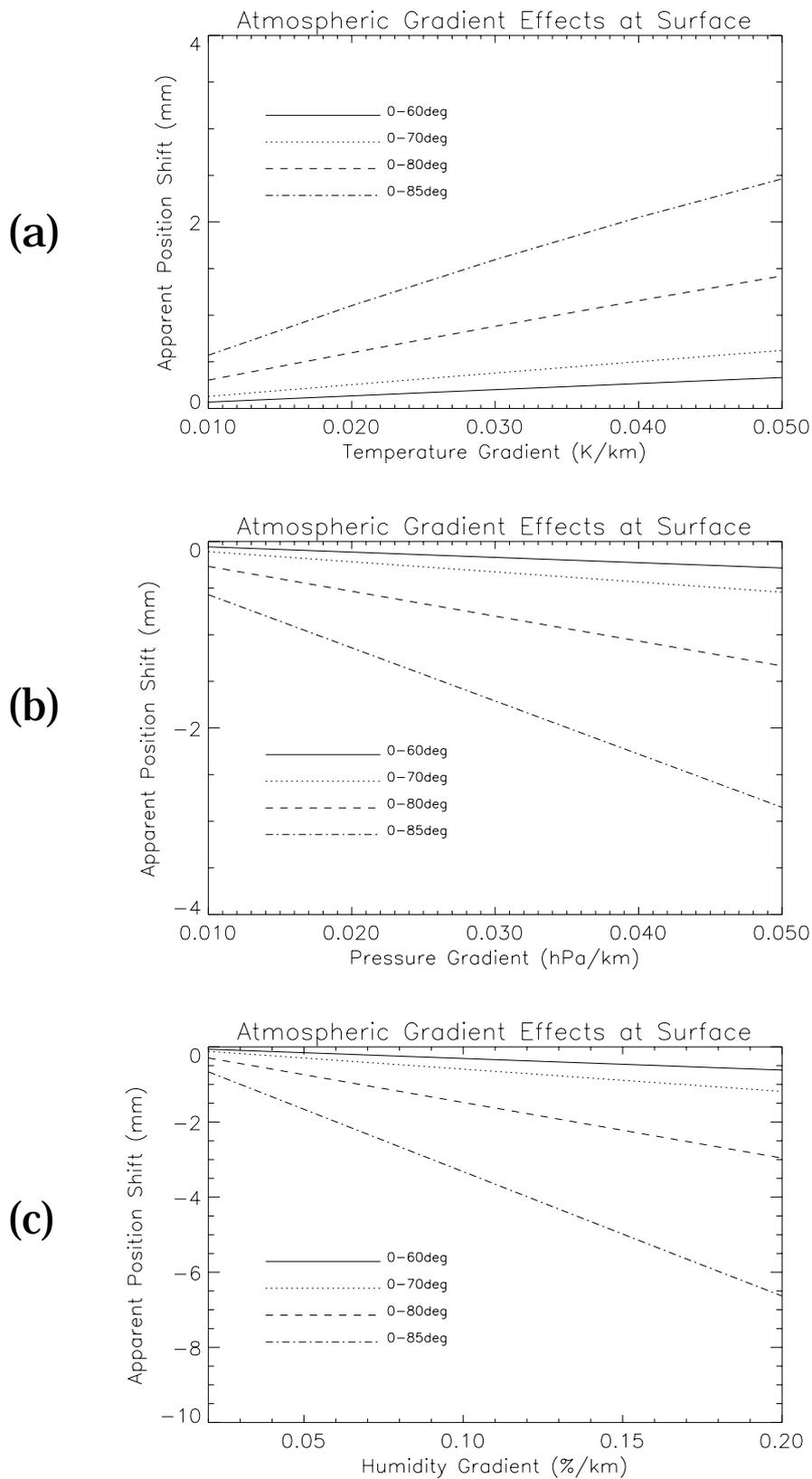


図 5.11. 地表での (a) 気温、(b) 気圧、(c) 湿度の水平勾配に対するアンテナ位置の見かけ上のシフト量。それぞれ 4 つ異なる天頂角の範囲 ( $0 - 60^\circ$ ,  $0 - 70^\circ$ ,  $0 - 80^\circ - 85^\circ$ ) で平均化した場合について示している。基準となる  $T, P, H$  はそれぞれ  $288.15\text{K}$ ,  $1013.25\text{hPa}$ ,  $70\%$  とした。

## 6 見かけのアンテナ位置シフトにおける鹿島周辺の地理の影響

この章では、鹿島周辺の地理条件が見かけのアンテナ位置シフトに与える影響を評価する。前章で示されたように水蒸気分布が最も見かけのアンテナ位置シフトに影響を与える。そこで、水蒸気供給源として海洋、湖、河川、水田を考えて、その効果を考えてみる。

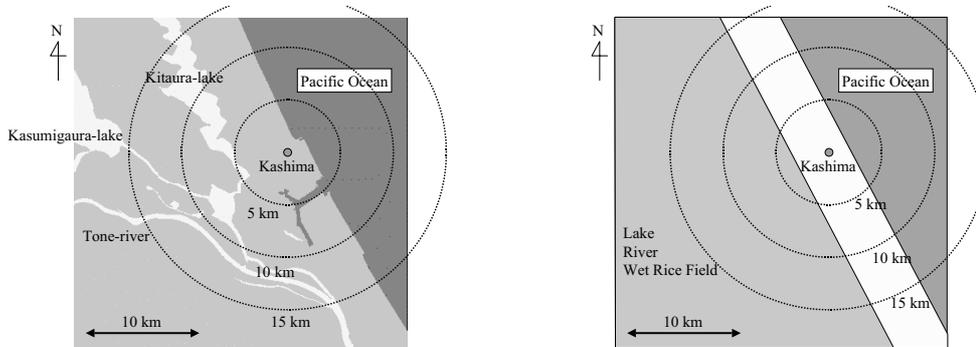


図 6.1. 鹿島 V L B I 局位置 (左) と地理モデル (右)。

図 6.1 左図に鹿島 V L B I 局位置を地図上に示す。鹿島 V L B I 局は直線的な海岸線の近くに位置し、内陸部には湖、河川が近接しておりまたその近辺には日本有数の水田地帯が広がっている。この地理上の特徴を、図 6.1 右図のように単純化したモデルを考えることにする。このモデルは海岸線に直交方向を考えると図 6.2 に示される 1 次元モデルとなる。

A は湖・水田地帯、B は通常の陸地、C は海である。それぞれの地帯での表面気温、水蒸気分圧をパラメータとして、シミュレーションを行うことにする。水蒸気分圧は、水面（海水、湖水、水を張った状態の水田）温度での平衡水蒸気圧として与える。気温の方が、水温よりも低い場合はその気温での飽和蒸気圧として与え、気圧は 1 気圧を仮定する。実際の鹿島での気温と海水面温度を図 6.3 に示す。4 月から 9 月の期間は、絶えず気温の方が、海水面温度よりも高くなっており、11 月から 3 月の期間は絶えず海水面温度の方が気温より高くなっている。

今、図 6.2 に示される A, B, C でのパラメータを 5 月の平均的状态に仮定した場合、レイトレーシングで求めた見かけの位置シフト量を表 6.1 に示す。なお、A 点での水温は水田にはった水の温度として気温より若干低い温度を仮定している。海面上での気温は陸上より 1 度低いと仮定した。また B での水蒸気圧は A, C での値の比例配分（直線近似）で与える。結果は天頂角  $0 \sim 70^\circ$  の場合で、4.5 mm 海側にシフトすることを示

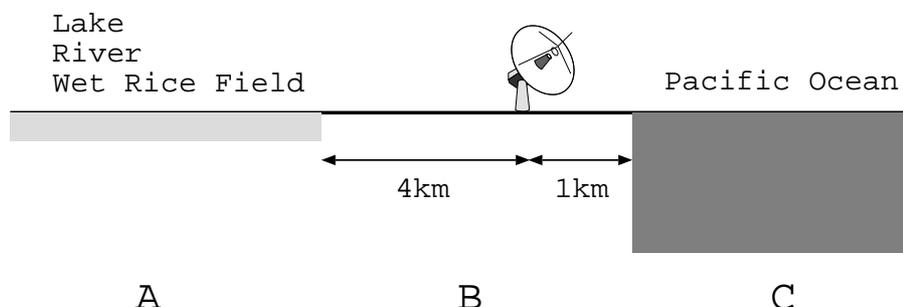


図 6.2. 鹿島周辺地理モデル (1 次元)。A : 水田地帯、B : 陸、C : 海

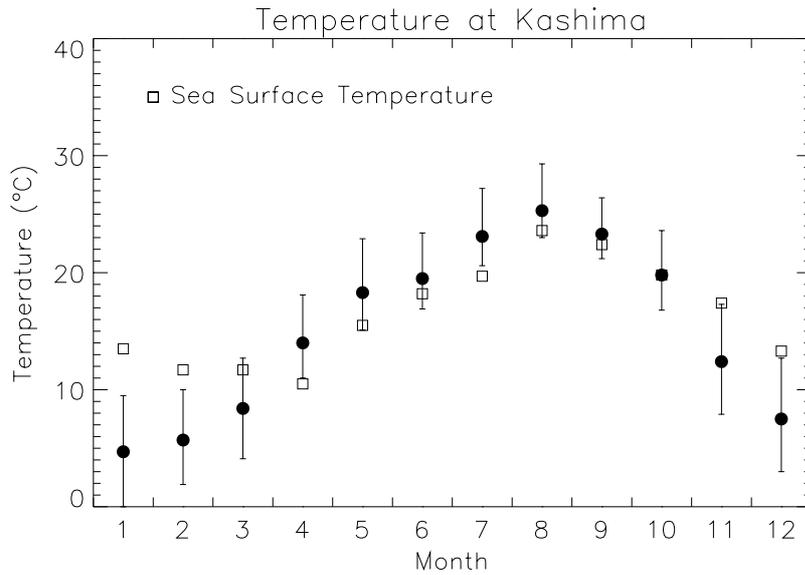


図 6.3. 鹿島の月別平均気温と海面温度。月別気温は日々の最低気温および最高気温の月平均値の範囲を縦棒で表している。海面温度は「日本海洋データセンター」の資料を使用した。

している。天頂角  $0 \sim 80^\circ$  の場合はシフト量は  $7.6 \text{ mm}$  となる。この量は実際の K S P - V L B I 観測で観測される基線長の再現性に近い値である。つまり、内陸地帯に水源を仮定することで方向もオーダーも十分に近い見かけの位置シフトが起こりうる事が示された。ちなみに 5 章で調べた湿度勾配の影響でみると、天頂角  $0 \sim 80^\circ$  の観測で  $5 \text{ mm}$  程度の影響を生じさせる湿度勾配は  $0.34\%/km$  であり(ただし、基準の気温  $15^\circ$ 、湿度  $70\%$  の場合)、この湿度勾配は水蒸気圧の勾配でみると、 $0.06 \text{ hPa}/km$  の勾配となる。これは、注目する領域が  $30 \text{ km}$  程度のスケールと仮定すると、 $1.8 \text{ hPa}$  の水蒸気圧の差に相当する。

表 6.1. 一次元モデルとそれによって生じるアンテナ位置変動。  $A_{x70}, A_{x80}, A_{x85}$  はそれぞれ天頂角  $0 \sim 70^\circ, 0 \sim 80^\circ, 0 \sim 85^\circ$  に対して計算した位置シフト。

	A	B	C
気温 ( )	18.3	18.3	17.3
水温 ( )	17.0	—	15.5
水蒸気圧 (hPa)	19.4		17.6
	$A_{x70}$	$A_{x80}$	$A_{x85}$
位置シフト (mm)	4.5	7.6	11.0

## 参考文献

- [1] Smith,E.K. and S. Weintraub, *Proc. IRE*, 41, pp.1035, 1953.
- [2] Thayer, G.D., *Radio Sci.*, 9, pp.803, 1974.
- [3] 前田憲一、木村磐根：現代電磁波動論、オーム社、1984.
- [4] Saastamoinen, J. "The Use of Artificial Satellites for Geodesy", *Geophys. Monograph Series*, vol. 15, ed. by S.W.Henriksen et al, AGU, Wash,D.C.,pp 247-251,1972.
- [5] Davis, J.L., et al., "Geodesy by radio interferometry: Effects of atmospheric modeling errors on estimates of baseline length", *Radio Science*,20,1593-1607,1985.
- [6] Chao, C.C., "The Troposphere Calibration Model for Mariner Mars 1971", *JPL Technical Report* 32-1587, 1974.
- [7] MacMillan, D.S., "Atmospheric gradients from very long baseline interferometry observations", *Geophys. Res. Lett.*, 22, 1041-1044, 1995.

# 付録

## A スネルの法則からのレイトレースの式導出

図 A.1においてスネルの法則により屈折率と屈折角の関係は以下のように与えられる。

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \tag{48}$$

図 A.2において  $z$  方向にのみ屈折率が変化し、 $O$  を出発した波が時間  $dt$  の間に  $A$  点に到達し、更に  $dt$  後には  $B$  点に到達すると考え、 $A$  点でスネルの法則を適用する。考え方としては  $O \rightarrow A \rightarrow B$  に至る過程 (つまり  $2dt$  の時間) で進行方向が  $d\theta$  変化したと考える。 $O \rightarrow A$  間の平均速度を  $v$ 、平均屈折率を  $n$ 、 $A \rightarrow B$  間の平均速度を  $v'$ 、平均屈折率を  $n' (= n + dn)$  とすると、スネルの法則から

$$\begin{aligned} n \sin \theta &= n' \sin(\theta + d\theta) \\ &= n' (\sin \theta \cos d\theta + \cos \theta \sin d\theta) \\ &\approx n' (\sin \theta + d\theta \cos \theta) \end{aligned} \tag{49}$$

と表せる。ただし、 $d\theta \ll 1$  とし、 $\sin d\theta \approx d\theta$  および  $\cos d\theta \approx 1$  を使っている。屈折率を  $z$  の関数として  $n(z)$  とすると、 $O \rightarrow A$  間の平均屈折率は  $z$  方向の変化  $dz = dl \cos \theta$  であることを考慮すると

$$\begin{aligned} n &= \frac{\int_{z_0}^{z_0+dz} n(z) dz}{dz} \\ &= n_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{dn}{dz} \cdot dl \cos \theta \end{aligned} \tag{50}$$

となる。ただし、 $O$  点の  $z$  座標を  $z_0$ 、屈折率を  $n_0$  としている。 $A \rightarrow B$  間の平均屈折率も同様にして求めると

$$\begin{aligned} n' &= n_0 + \frac{dn}{dz} \cdot dl \cos \theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{dn}{dz} \cdot dl' \cos(\theta + d\theta) \\ &= n_0 + (dl + \frac{1}{2} dl') \frac{dn}{dz} \cdot \cos \theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{dn}{dz} \cdot dl' d\theta \sin \theta \end{aligned} \tag{51}$$

となる。ここで、2次以上の項 ( $dl' d\theta$ ) を略すると

$$n' = n_0 + (dl + \frac{1}{2} dl') \frac{dn}{dz} \cdot \cos \theta \tag{52}$$

となる。(50)(52) 式を (49) 式に代入すると、

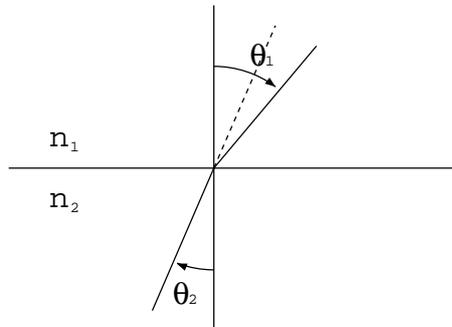


図 A.1. スネルの法則の説明

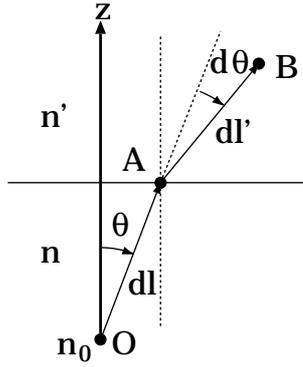


図 A.2. スネルの法則の説明 ( その 2 )

$$(n_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{dn}{dz} \cdot dl \cos \theta) \sin \theta = \left( n_0 + (dl + \frac{1}{2} dl') \frac{dn}{dz} \cdot \cos \theta \right) (\sin \theta + d\theta \cos \theta) \quad (53)$$

更に展開して

$$\begin{aligned} n_0 \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{dn}{dz} \cdot dl \cos \theta \sin \theta = \\ n_0 \sin \theta + (dl + \frac{1}{2} dl') \frac{dn}{dz} \cdot \cos \theta \sin \theta + n_0 d\theta \cos \theta + d\theta (dl + \frac{1}{2} dl') \frac{dn}{dz} \cos^2 \theta \end{aligned}$$

ここで、2次以上の項を省略して整理すると、

$$\frac{1}{2} (dl + dl') \frac{dn}{dz} \cdot \cos \theta \sin \theta + n_0 d\theta \cos \theta = 0 \quad (54)$$

となる。ここで、 $dl \approx dl'$  であるから、結局、

$$dl \frac{dn}{dz} \cdot \cos \theta \sin \theta + n_0 d\theta \cos \theta = 0 \quad (55)$$

となる。ところで、 $dl = v dt$  および、 $v = c/n$  であるから、

$$dl = \frac{c}{n} dt \quad (56)$$

となるが、この式に (55) 式を代入し、2次以上の項を略すると、

$$dl = \frac{c}{n_0} dt \quad (57)$$

と近似できる。この  $dl$  を (55) 式に代入すると

$$\frac{c}{n_0} dt \frac{dn}{dz} \cdot \cos \theta \sin \theta = -n_0 d\theta \cos \theta \quad (58)$$

結局

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{c}{n_0^2} \frac{dn}{dz} \cdot \sin \theta \quad (59)$$

を得る。つまり、レイトレーシングの式である (18) 式が得られた。すなわち、媒質を薄い層状に分割し、それぞれの境界でスネルの法則を適用すると、(18) 式で経路をトレースしていくのは等価である。

## B 数値微分

x 方向の刻み  $h$  で、5 点の関数値  $f(x_{-2}), f(x_{-1}), f(x_0), f(x_1), f(x_2)$  が与えられているとき、 $x_0$  における微分係数は、

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} (f(x_{-2}) - 8f(x_{-1}) + 8f(x_1) - f(x_2)) \quad (60)$$

一般に x 方向の刻み  $h$  で奇数個の関数値が与えられているとき、

$$f'(x_0) \approx Kh^{-1} \sum A_i f(x_i) \quad (61)$$

ここで、 $A_i$  と  $K$  は下表で与えられる。

i	3点	5点	7点	9点	11点
-5					-2
-4				3	25
-3			-1	-32	-150
-2		1	9	168	600
-1	-1	-8	-45	-672	-2100
0	0	0	0	0	0
1	1	8	45	672	2100
2		-1	-9	-168	-600
3			1	32	150
4				-3	-25
5					2
K	1/2	1/12	1/60	1/840	1/2520

## C レイトレースチェック

図 C.1 にレイトレーシングのチェックを示す。地表から出発してトレースし、高度  $h$  の時点で、反対向きに同じステップだけトレースした場合の、初期値との座標のずれおよび打ちだし角のずれを示している。このトレースは米国標準大気で湿度 0% とし、高度 40 km までトレースして戻ってきた場合の結果を示している。トレースのステップは 100 ns ステップで地球の曲率も考慮した 2 次元トレースである。

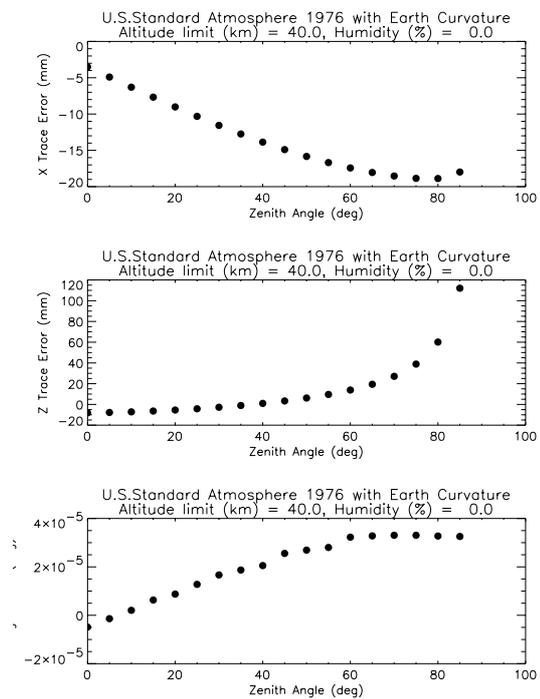


図 C.1. レイトレースチェック。高さ 40 km までトレースし、同じステップだけ逆方向にトレースした場合の初期値とのズレを、x 座標 (mm) (上段)、z 座標 (mm) (中段)、角度 (deg) (下段) について示している。大気は米国標準大気 (湿度 0%) で、地球の曲率も考慮に入れた 2 次元トレースの結果である。トレースのステップ (時間間隔) は 100 ns である。