有限距離電波源に対するVLBI遅延モデル

関戸 衛 (通信総合研究所), 福島登志夫 (国立天文台)

1 はじめに

VLBI のデータ処理、特に天体の座標や基線ベクトルの精密な推定には、高精度な遅延モデルが必要である。30 光年以上離れた電波源に対しては電波源が無限遠点にあるとする仮定が十分な精度で成立ち (Sovers & Jacobs; 1996)、この仮定に基づいて、相対論的な効果も含めた VLBI の観測方程式が 1980 年代後半から 1990 年代にかけていくつか提案され、最終的に 1991 年に USNO で開催されたワークショップ "Relativistic Models for Use in Space Geodesy" において、それまで提案されたモデルを "Consensus Model"(Eubanks; 1991) として T.M.Eubaks がまとめ、現在の VLBI の標準観測モデルとして広く使用されている (McCarthy; 1996, 2003)[1]。

しかし、太陽系内の天体や、深宇宙探査機等、観測者から 30 光年以下の距離にある電波源を地球上の基線で観測する場合、観測精度に対して信号が球面波になる効果を無視できなくなり (Sovers & Jacobs: 1996)、有限距離の電波源に対する観測方程式を新たに作る必要がある。

Sovers & Jacobs(1996)、や Fukushima(1994) は有限距離の VLBI の観測方程式を提案し、Fukushima は月にある電波源の場合の偏微分係数等について議論しているが、これまで IERS Convenstion (2000) に対応する、太陽系重心座標系と地上の座標系の間の座標変換を考慮した相対論的観測方程式までは提案されていなかった。本稿では、Fukushima(1994)、Hellings(1986)、および Shahid-Saless & Hellings(1991) を参考に、有限距離電波源に対する VLBI の観測方程式を導出する。

2 太陽系重心座標系における遅延時間

本節以降の議論では全て、太陽系重心慣性座標系 (以下、Solar System Barycentric Rerence Frame: BRF と略す) 上の変数を大文字で表し、地球重心座標系 (以下、Geocentric Reference Frame: GRF と略す) 上の変数を小文字で表すことにする。信号源の添字を 0、観測局の添字を 1,2、地球重心の添え字を e とし、局 i の位置ベクトルを $\vec{\mathbf{X}}_i$ とし、信号源から電波を放射した時刻を T_0、局 i へ信号が到達した時間を T_i とする。

$$\vec{\mathbf{R}}_{ij} = \vec{\mathbf{X}}_i - \vec{\mathbf{X}}_j, \quad R_{ij} = |\vec{\mathbf{R}}_{ij}|$$

疑似基線ベクトル $\vec{\mathbf{B}}^*$ と疑似電波源ベクトル $\vec{\mathbf{K}}$ を

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{B}}^* &= \vec{\mathbf{X}}_2(T_2) - \vec{\mathbf{X}}_1(T_1) = \vec{\mathbf{R}}_{20}(T_2) - \vec{\mathbf{R}}_{10}(T_1) \\ \vec{\mathbf{K}}^* &= \frac{\vec{\mathbf{R}}_{02}(T_2)+\vec{\mathbf{R}}_{01}(T_1)}{R_{02}(T_2)+R_{01}(T_1)} \end{aligned} \tag{1}$$

と定義すると、VLBI の観測量である遅延時間の差は、Fukushima(1994) により提案されているように、

$$\begin{aligned} c(T_2 - T_1) &= R_{20} - R_{10} + c\Delta t_g \\ &= -\vec{\mathbf{K}}^* \cdot \vec{\mathbf{B}}^* + c\Delta t_g \end{aligned} \tag{2}$$

で表される。Δt_g は重力による光の屈折による伝搬遅延量の 2 局の間の差である。電波源の大まかな位置はあらかじめ時間の関数として与えられているものとし、電波源の位置ベクトル $\vec{X}_0(T_0)$ は $\vec{X}_1$ 局に T_1 に到達した信号が発射された時刻 T_0 を光差方程式

$$c(T_1 - T_0) = |\vec{\mathbf{X}}_1(T_1) - \vec{\mathbf{X}}_0(T_0)| + (1+\gamma)\sum_J \frac{GM_J}{c^2} \ln\left|\frac{R_{1\mathrm{J}} + R_{2\mathrm{J}} + R_{12}}{R_{1\mathrm{J}} + R_{2\mathrm{J}} - R_{12}}\right| \tag{3}$$

[1]http://maia.usno.navy.mil/conv2000.html

を解いて求める。Barycentric Coordinate Time (以下 TCB と略す) における同時刻 (T_1) のベクトルで定義した基線および疑似天体ベクトルををそれぞれ、$\vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{K}}$ とする。式 (2) の遅延時間を、 $\vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{K}}$ を使って、表すことを考える。$\vec{\mathbf{V}}_2$ を局 2 の速度ベクトルとし、$T_2 - T_1$ が小さいので加速度を無視して

$$
\begin{aligned}
\vec{\mathbf{X}}_2(T_2) &= \vec{\mathbf{V}}_2(T_2 - T_1) + \vec{\mathbf{X}}_2(T_1) \\
\vec{\mathbf{R}}_{02}(T_2) &= \vec{\mathbf{R}}_{02}(T_1) - \vec{\mathbf{V}}_2(T_2 - T_1) \\
R_{02} &= |\vec{\mathbf{R}}_{02}(T_1) - \vec{\mathbf{V}}_2(T_2 - T_1)| = \sqrt{R_{02}(T_1)^2 - 2\vec{\mathbf{R}}_{02}(T_1) \cdot \vec{\mathbf{V}}_2(T_2 - T_1) + V_2^2(T_2 - T_1)^2} \\
&\cong R_{02}(T_1) - \hat{\vec{\mathbf{R}}}_{02} \cdot \vec{\mathbf{V}}_2(T_2 - T_1) + \frac{[V_2(T_2 - T_1)]^2 + [\hat{\vec{\mathbf{R}}}_{20} \cdot \vec{\mathbf{V}}_2(T_2 - T_1)]^2}{2R_{20}(T_1)}
\end{aligned}
$$

と近似するここで $\hat{\vec{\mathbf{R}}}_{ij} = \vec{\mathbf{R}}_{ij}/R_{ij}$ であり、平方根は $V_2(T_2 - T_1)/R_{20}$ の 2 次のオーダまで展開した。電波源の観測点からの距離が 10^9m 以上ならば 2 次のオーダの寄与は 0.1mm 程度なので、以後 1 次のオーダまで残すことにする[2]。これを (2) 式に代入して

$$
\begin{aligned}
c(T_2 - T_1) &= R_{02}(T_1) - R_{01}(T_1) - \hat{\vec{\mathbf{R}}}_{02} \cdot \vec{\mathbf{V}}_2(T_2 - T_1) + \Delta t_g \\
&= \vec{\mathbf{K}} \cdot \vec{\mathbf{B}} - \hat{\vec{\mathbf{R}}}_{02} \cdot \vec{\mathbf{V}}_2(T_2 - T_1) + \Delta t_g
\end{aligned}
$$

より

$$
T_2 - T_1 = \frac{1}{1 + \beta_{02}} \left(\frac{-\vec{\mathbf{K}} \cdot \vec{\mathbf{B}}}{c} + \Delta t_g \right) \tag{4}
$$

但し

$$
\begin{aligned}
\beta_{02} &= \hat{\vec{\mathbf{R}}}_{02} \cdot \frac{\vec{\mathbf{V}}_2}{c} && (5) \\
\vec{\mathbf{B}} &= \vec{\mathbf{X}}_2(T_1) - \vec{\mathbf{X}}_1(T_1) && (6) \\
\vec{\mathbf{K}} &= \frac{\vec{\mathbf{R}}_{02}(T_1) + \vec{\mathbf{R}}_{01}(T_1)}{R_{01}(T_1) + R_{02}(T_1)} && (7)
\end{aligned}
$$

これが TCB で表された有限距離電波源の VLBI 遅延時間である。

3 太陽系重心座標系 (BRF,TCB) から地球重心座標系 (GRF,TCG) への変換

一般相対性理論によれば、重力場の下で運動している座標系間の変換は、事象の微小線素 $(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ が不変となるような一般座標変換で表される。$g_{\mu\nu}$ は計量テンソルで、ここでは、Hellings(1986) に従って、ポストガリレイ近似での計量テンソル、

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= 1 - 2\phi + O(c^{-4}) \\
g_{0k} &= O(c^{-3}) \\
g_{mn} &= -\delta_{mn}(1 + 2\gamma\phi) + O(c^{-4}) \\
&\quad \text{但し} \phi = \sum_p \frac{GM_p}{|\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}_p| c^2}
\end{aligned} \tag{8}
$$

を使う。ϕ は座標 $\vec{\mathbf{X}}_p$ にある重力源によって、座標 $\vec{\mathbf{X}}$ に作られる重力ポテンシャルを p について足し合わせたものである。γ は Parametarized Post Newtonian パラメタの一つで、アインシュタインの一般相対論では $\gamma = 1$ である。c^{-2} 以上の高次項は省略しているが、目標としている遅延時間の精度 1ps にはこれで十分である。 事象の微小線素は

$$
(ds)^2 = c^2(1 - 2\phi)dT^2 - (1 + 2\gamma\phi)(dX^j dX^j) \tag{9}
$$

[2]公転速度 $\vec{\mathbf{V}}_2 \sim 2 \times 10^4$ (m/s), $R_{02} \sim 10^9$ (m)(GEOTAIL@2002/6), 10^{11} (m)(NOZOMI)

となる。

BRF の座標 $(T, \vec{\mathbf{X}})$ と地球近傍の GRF の座標 $(t, \vec{\mathbf{x}})$ の間の座標変換は、Hellinbgs (1986) が与えているように

$$\begin{aligned} dt &= (1 - U + \frac{V_e^2}{2c^2})dT - (1 + \gamma U + \frac{V_e^2}{2c^2})\frac{\vec{\mathbf{V}}_e \cdot d\vec{\mathbf{X}}}{c^2} \\ d\vec{\mathbf{x}} &= (1 + \gamma U)(d\vec{\mathbf{X}} + \frac{d\vec{\mathbf{X}} \cdot \vec{\mathbf{V}}_e}{c^2}\vec{\mathbf{V}}_e) - (1 - U + \frac{V_e^2}{2c^2})\vec{\mathbf{V}}_e dT \end{aligned} \tag{10}$$

により微小変量の関係式が得られる。また逆変換は

$$\begin{aligned} dT &= (1 + U + \frac{V_e^2}{2c^2})dt - (1 - \gamma U + \frac{V_e^2}{2c^2})\frac{\vec{\mathbf{V}}_e \cdot d\vec{\mathbf{x}}}{c^2} \\ d\vec{\mathbf{X}} &= (1 - \gamma U)(d\vec{\mathbf{x}} + \frac{d\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{V}}_e}{c^2}\vec{\mathbf{V}}_e) + (1 + U + \frac{V_e^2}{2c^2})\vec{\mathbf{V}}_e dt \end{aligned} \tag{11}$$

である。(11) を使うと、$\vec{\mathbf{X}}_\mathrm{e}$ を地球重心の座標として、地球近傍の時間と空間の BRF 座標は

$$\begin{aligned} T &= T_e + (1 - \gamma U + \tfrac{V_e^2}{2c^2})\tfrac{\vec{\mathbf{V}}_e \cdot \vec{\mathbf{x}}}{c^2} \\ \vec{\mathbf{X}} &= \vec{\mathbf{X}}_e + (1 - \gamma U)(\vec{\mathbf{x}} + \tfrac{\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{V}}_e}{2c^2}\vec{\mathbf{V}}_e) \end{aligned} \tag{12}$$

と表される。V/c の 2 次以上の項を無視すると、式 (6) の基線ベクトル $\vec{\mathbf{B}}$ は

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{B}} &= \vec{\mathbf{X}}_2(T_1) - \vec{\mathbf{X}}_1(T_1) \\ &= (1 - \gamma U)\vec{\mathbf{b}} + \tfrac{(\vec{\mathbf{V}}_\mathbf{e} \cdot \vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{V}}_\mathbf{e}}{2c^2} \end{aligned} \tag{13}$$

次に TCB での時間間隔 $T_2 - T_1$ と TCG での時間間隔の変換を考えると、式 (11) から

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= (1 + U + \tfrac{V_e^2}{2c^2})(t_2 - t_1) + (1 - \gamma U + \tfrac{V_e^2}{2c^2})\tfrac{\vec{\mathbf{V}}_\mathbf{e} \cdot (\vec{\mathbf{x}}_2(t_2) - \vec{\mathbf{x}}_2(t_1))}{c^2} \\ &\cong (1 + U + \tfrac{V_e^2 + 2\vec{\mathbf{V}}_e \cdot \vec{\mathbf{w}}_2}{2c^2})(t_2 - t_1) + \tfrac{\vec{\mathbf{V}}_e \cdot \vec{\mathbf{b}}}{c^2}. \end{aligned} \tag{14}$$

式 (13), (14) を式 (4) に代入し、整理すると

$$c(t_2 - t_1) = \frac{c\Delta t_g - \vec{\mathbf{K}} \cdot \vec{\mathbf{b}}\{1 - (1 + \gamma)U - \frac{V_e^2 + 2\vec{\mathbf{V}}_e \cdot \vec{\mathbf{w}}_2}{2c^2}\} - \frac{(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{V}}_e)(\vec{\mathbf{V}}_e \cdot \vec{\mathbf{K}})}{2c^2}}{1 + \beta_{02}} - \frac{\vec{\mathbf{V}}_e \cdot \vec{\mathbf{b}}}{c} \tag{15}$$

最後に TCG から TT への時系のスケール変換 $\tau = (1 - L_G)t$ とそれに対応して、光速度一定となるように空間のスケール $\vec{\xi} = (1 - L_G)\vec{\mathbf{x}}$ を使うと、地上の時計で観測した遅延時間は

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{\Delta t_g - \frac{\vec{\mathbf{K}} \cdot \vec{\mathbf{b}}}{c}\left[1 - (1 + \gamma)U - \frac{V_e^2 + 2\vec{\mathbf{V}}_e \cdot \vec{\mathbf{w}}_2}{2c^2}\right] - \frac{\vec{\mathbf{V}}_e \cdot \vec{\mathbf{b}}}{c^2}\left(1 + \beta_{02} - \frac{\vec{\mathbf{K}} \cdot \vec{\mathbf{V}}_e}{2c}\right)}{1 + \beta_{02}} \tag{16}$$

で与えられる[3]。

使用している変数を再掲すると、

$$\begin{aligned} \beta_{02} &= \hat{\vec{\mathbf{R}}}_{02} \cdot \frac{\vec{\mathbf{V}}_2}{c} \\ \hat{\vec{\mathbf{R}}}_{20} &= \frac{\vec{\mathbf{R}}_{20}}{R_{20}} \\ \vec{\mathbf{K}} &= \frac{\vec{\mathbf{R}}_{02}(T_1) + \vec{\mathbf{R}}_{01}(T_1)}{R_{02}(T_1) + R_{01}(T_1)}. \end{aligned}$$

[3] この方程式は、電波源位置の座標が TCB を時間軸とする平坦な 4 次元基準座標系で与えられた場合の方程式であることに注意する。通常の軌道決定では JPL の惑星歴と同様に TDB を時間軸とした 4 次元基準座標系で表されるため、スケールが異り、別の観測方程式が必要であることが本研究会の後に明らかとなった。

また、重力遅延の Δt_g の項は次式で表される。

$$\Delta t_g = \sum_J \frac{GM_J}{c^3} \ln\left(\frac{R_{2J} - \hat{\vec{\mathbf{R}}}_{02} \cdot \vec{\mathbf{R}}_{2J}}{R_{0J} - \hat{\vec{\mathbf{R}}}_{02} \cdot \vec{\mathbf{R}}_{0J}} \cdot \frac{R_{0J} - \hat{\vec{\mathbf{R}}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{R}}_{0J}}{R_{1J} - \hat{\vec{\mathbf{R}}}_{01} \cdot \vec{\mathbf{R}}_{1J}}\right) \tag{17}$$

GM_J は重力源となる天体 J の重力定数であり、$\vec{\mathbf{R}}_{ij} = \vec{\mathbf{X}}_i - \vec{\mathbf{X}}_j$、$R_{ij} = |\vec{\mathbf{R}}_{ij}|$、$\hat{\vec{\mathbf{R}}}_{ij} = \vec{\mathbf{R}}_{ij}/R_{ij}$ である。重力源の天体の位置のエポックは、天体が伝搬する光 (電波) に最も接近するエポックを選ぶ。

4 大気遅延の効果

式 (16) では遅延時間を $\tau_1 - \tau_2$ と書いたが、これは観測局が真空中にあるときの遅延時間であるから、これを意識して $\tau_{v1} - \tau_{v2}$ と書くことにする。大気の遅延により、基準となる局 1 への信号の到達時刻が遅れる。この効果の補正量を計算するため、両局の大気の伝搬遅延の差が観測遅延量に含まれる。式 (16) を t_1 で偏微分する代わりに、主要な項である $\vec{\mathbf{K}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$ を微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\mathbf{K}} \cdot \vec{\mathbf{b}}}{\partial t_1} &= \frac{\partial R_{02}}{\partial t_1} - \frac{\partial R_{01}}{\partial t_1} \\ &= \hat{\vec{\mathbf{R}}}_{20} \cdot \vec{\mathbf{V}}_2 - \hat{\vec{\mathbf{R}}}_{10} \cdot \vec{\mathbf{V}}_1 \end{aligned}$$

であるから、大気の遅延も含めた

$$\tau_2 - \tau_1 = \tau_{v2} - \tau_{v1} + (\delta\tau_{\text{atm2}} - \delta\tau_{\text{atm1}}) + \delta t_{\text{atm1}} \frac{\hat{\vec{\mathbf{R}}}_{20} \cdot \vec{\mathbf{V}}_2 - \hat{\vec{\mathbf{R}}}_{10} \cdot \vec{\mathbf{V}}_1}{c} \tag{18}$$

が有限距離にある電波源の信号を VLBI 観測した時に、地上の原子時計で測られる遅延量である。 式 (16) の式は、電波源までの距離を無限遠に遠ざけた極限で IERS Conventions の Consensus Model に一致することが示される。

5 Reference

O. J. Sovers, & C. S. Jacobs, 1996, "Observation Model and Parameter Partials for the JPL VLBI Parameter Estimation Software "MODEST"-1996", JPL Publication 83-39, Rev. 6, p.8

T.M. Eubanks, 1991, "A Consensus Model for Relativistic Effects in Geodetic VLBI", Proc. of the USNO workshop on Relativistic Models for Use in Space Geodesy, pp. 60-82.

D.D.McCarthy , 1996, "Chapter 12 General Relativistic Models for Propagation" IERS Conventions, p.90.

R. W. Hellings, 1986, "RELATIVISTIC EFFECTS UB ASTRONOMICAL TIMING MEASUREMENTS", AJ, Vol. 91, pp.650-659.

R. W. Hellings, 1986, ERRATUM:"RELATIVISTIC EFFECTS UB ASTRONOMICAL TIMING MEASUREMENTS",AJ, Vol. 92, pp. 1446.

T. Fukushima, 1994, "Luner VLBI observation model", A&A, Vol. 291, pp.320-323.

B. Shahid-Saless & R. W. Hellings, 1991, "A Picosecond Accuracy Relativisitc VLBI Model viaFermi Normal Coordinates" Vol. 18, No. 6, pp.1139-1142.