VLBI（超長基線電波干渉計）入門（測地・位置天文VLBI）

近藤哲朗

VLBIとは

Very
Long
Baseline
Interferometry

||

超長基線電波干渉計

内容

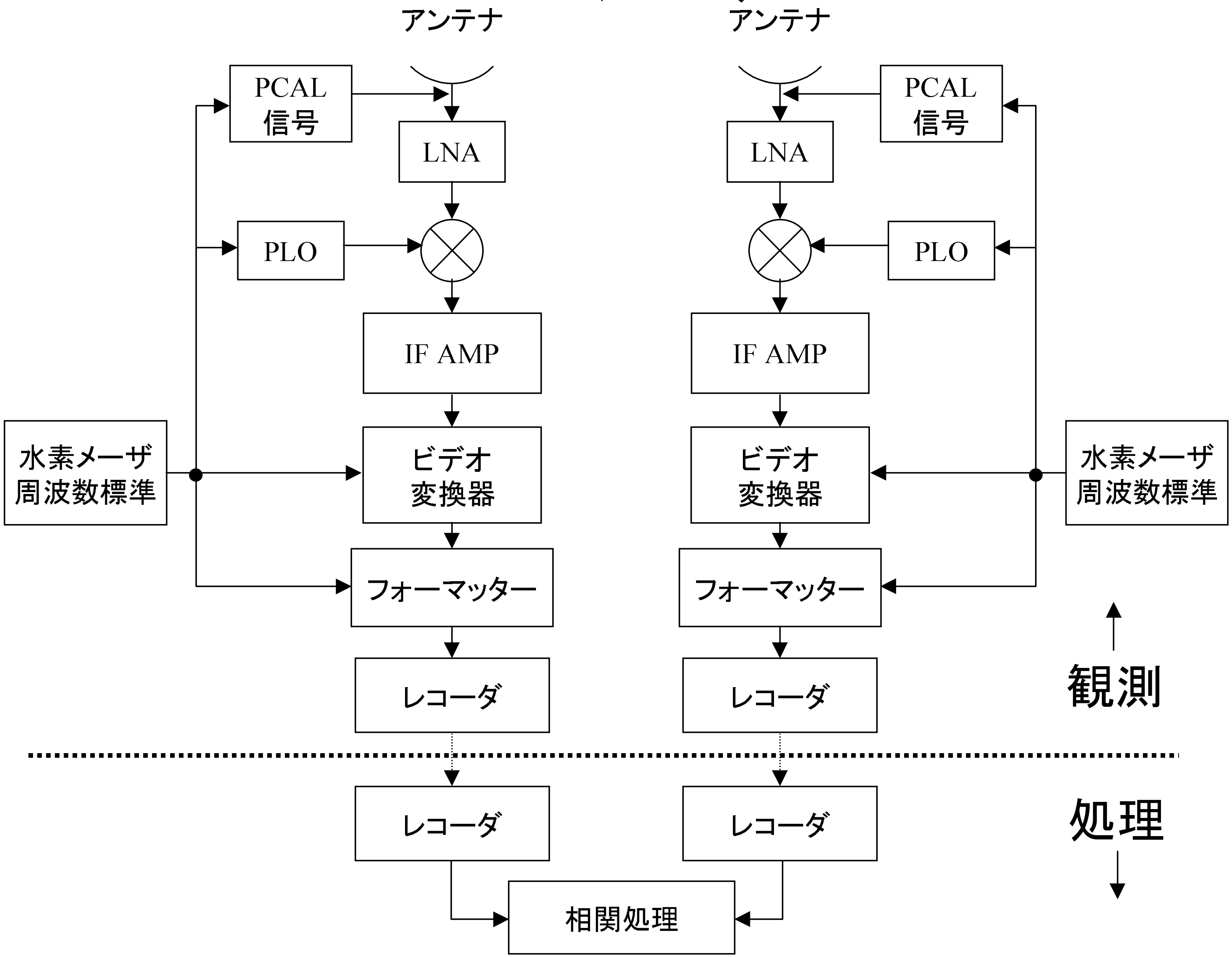
- システム
- 遅延時間について
  - 幾何学遅延
  - 干渉計の分解能
  - 遅延に含まれる物理効果
- 相互相関関数
  - フーリエ変換

- VLBI信号等価モデル
- RF直接干渉計の相互相関関数
- 周波数変換後の相互相関関数
- 1ビットサンプリング

- 相関処理
  - 相関器での処理
  - フリンジストッピング
  - 部分ビットの影響
  - 粗決定サーチ
  - 精決定サーチ（バンド幅合成）
- 基線解析

システム

VLBIシステム

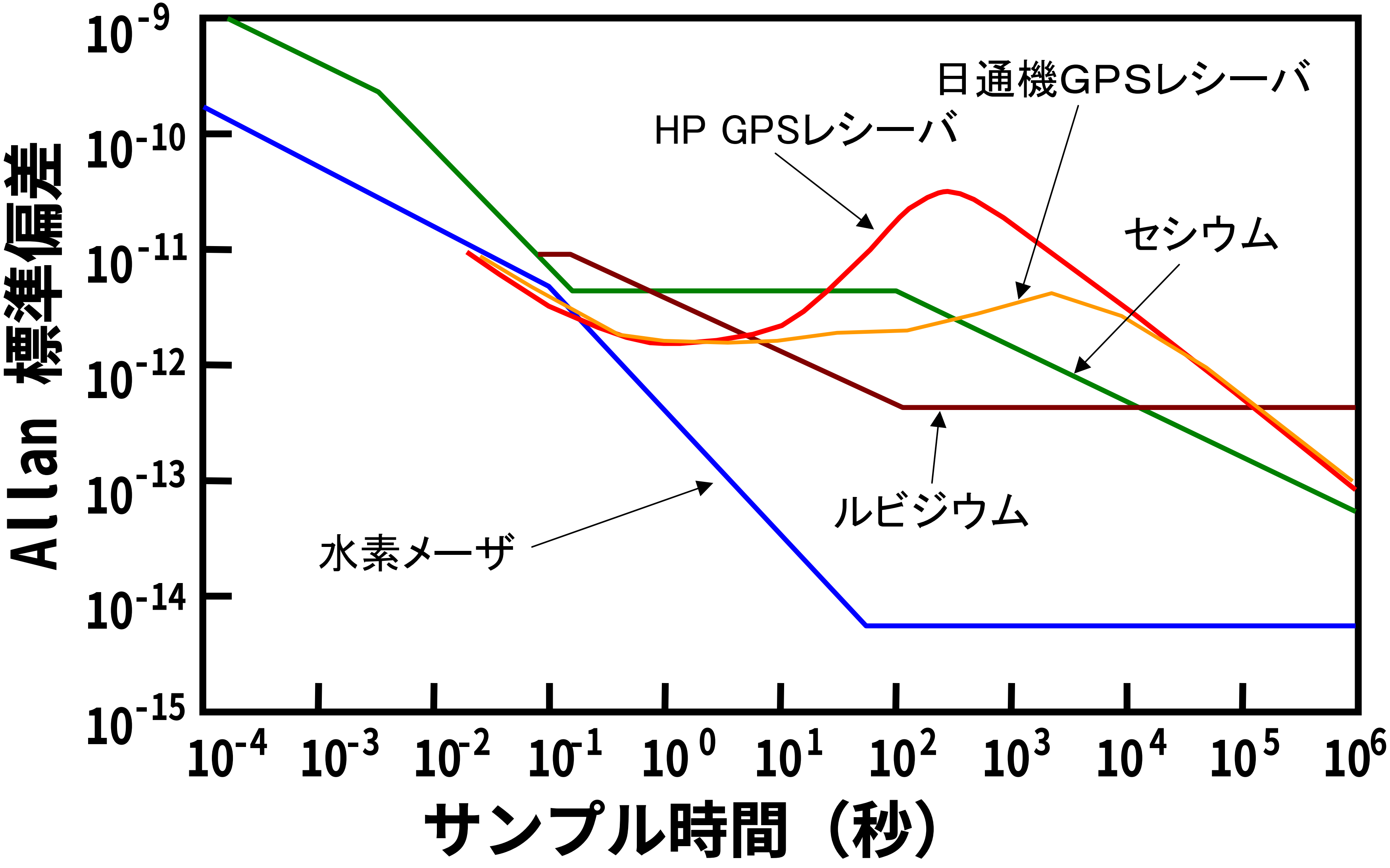


アンテナ
アンテナ
PCAL
信号
PCAL
信号
LNA
LNA
PLO
PLO
IF AMP
IF AMP
水素メーザ
周波数標準
ビデオ
変換器
ビデオ
変換器
水素メーザ
周波数標準
フォーマッター
フォーマッター
レコーダ
レコーダ
観測
レコーダ
レコーダ
処理
相関処理

VLBIに必要な技術

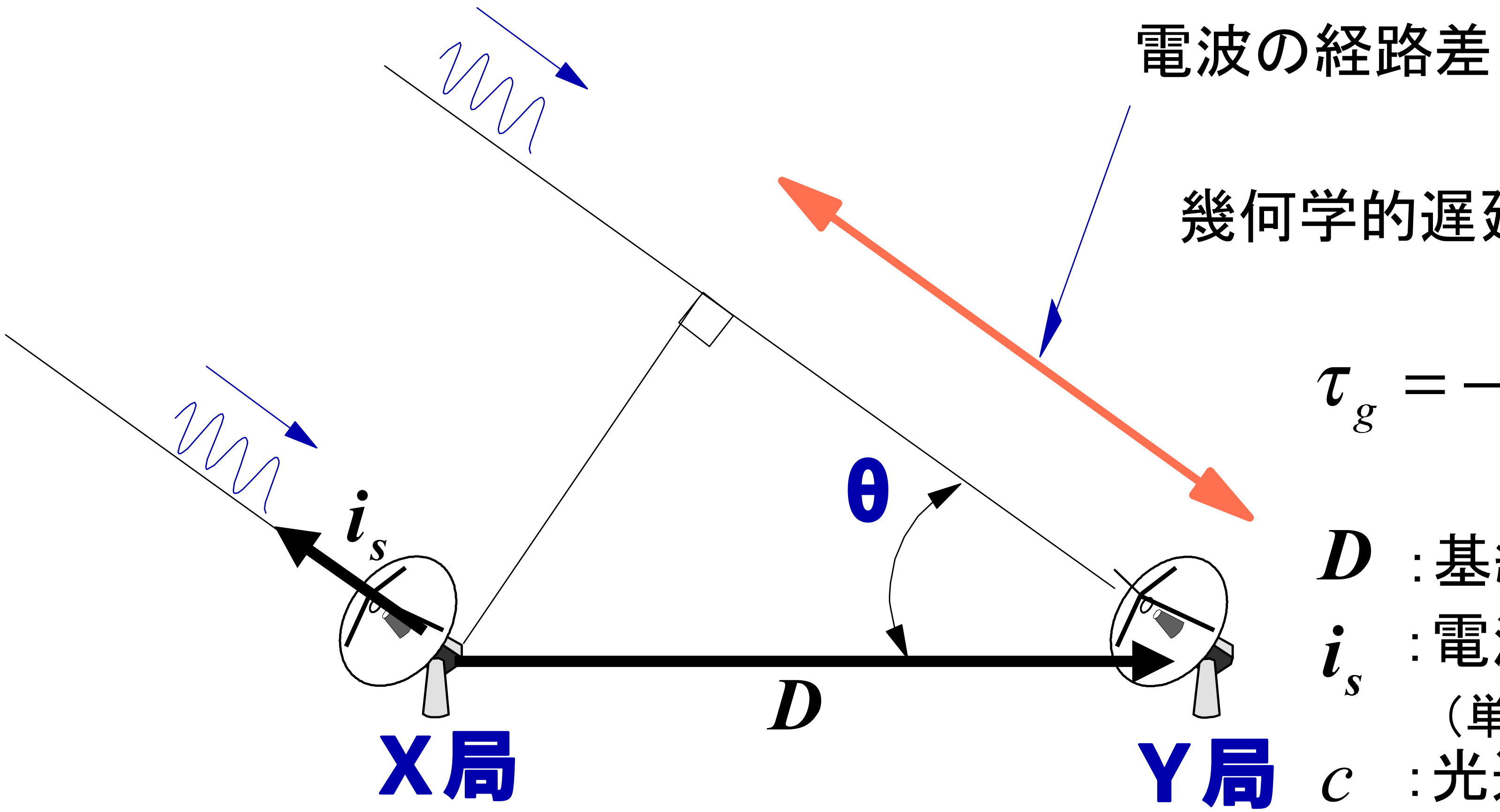
- ハードウェア
  - アンテナ技術
  - 低雑音信号受信技術
  - 高安定周波数標準技術(安定度～10^{-14})
  - レコーダ技術
  - または　実時間データ転送技術　（ホット！）
- ソフトウェア
  - 自動運用技術
  - データ処理・解析技術

各種周波数標準の安定度



遅延時間について

電波干渉計の幾何学



幾何学的遅延時間

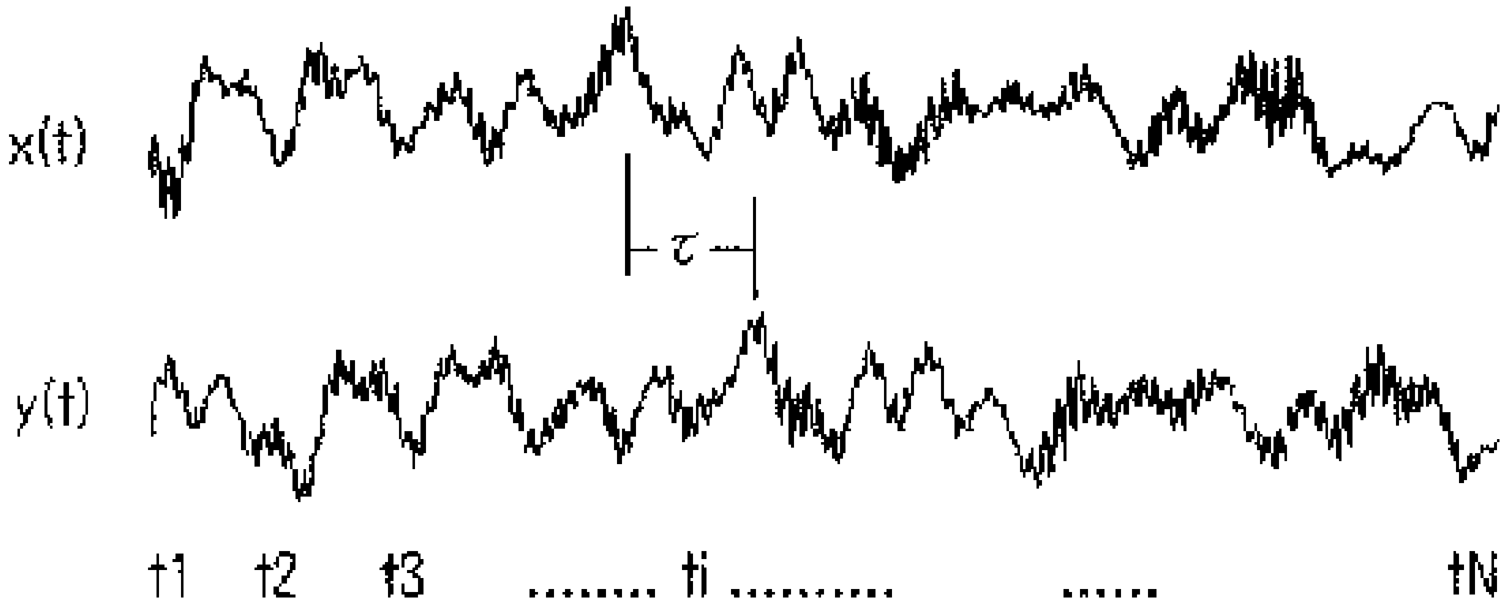
$$\tau_g = -\frac{D \cdot i_s}{c}$$

D ：基線ベクトル

i_s ：電波源方向
（単位ベクトル）

c ：光速度

遅延



τ_gについての考察

幾何学的遅延時間 $\tau_g = -\dfrac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{i}_s}{c}$

全微分を取ると $\Delta\tau_g = -\dfrac{\Delta\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{i}_s}{c} - \dfrac{\boldsymbol{D}\cdot\Delta\boldsymbol{i}_s}{c}$

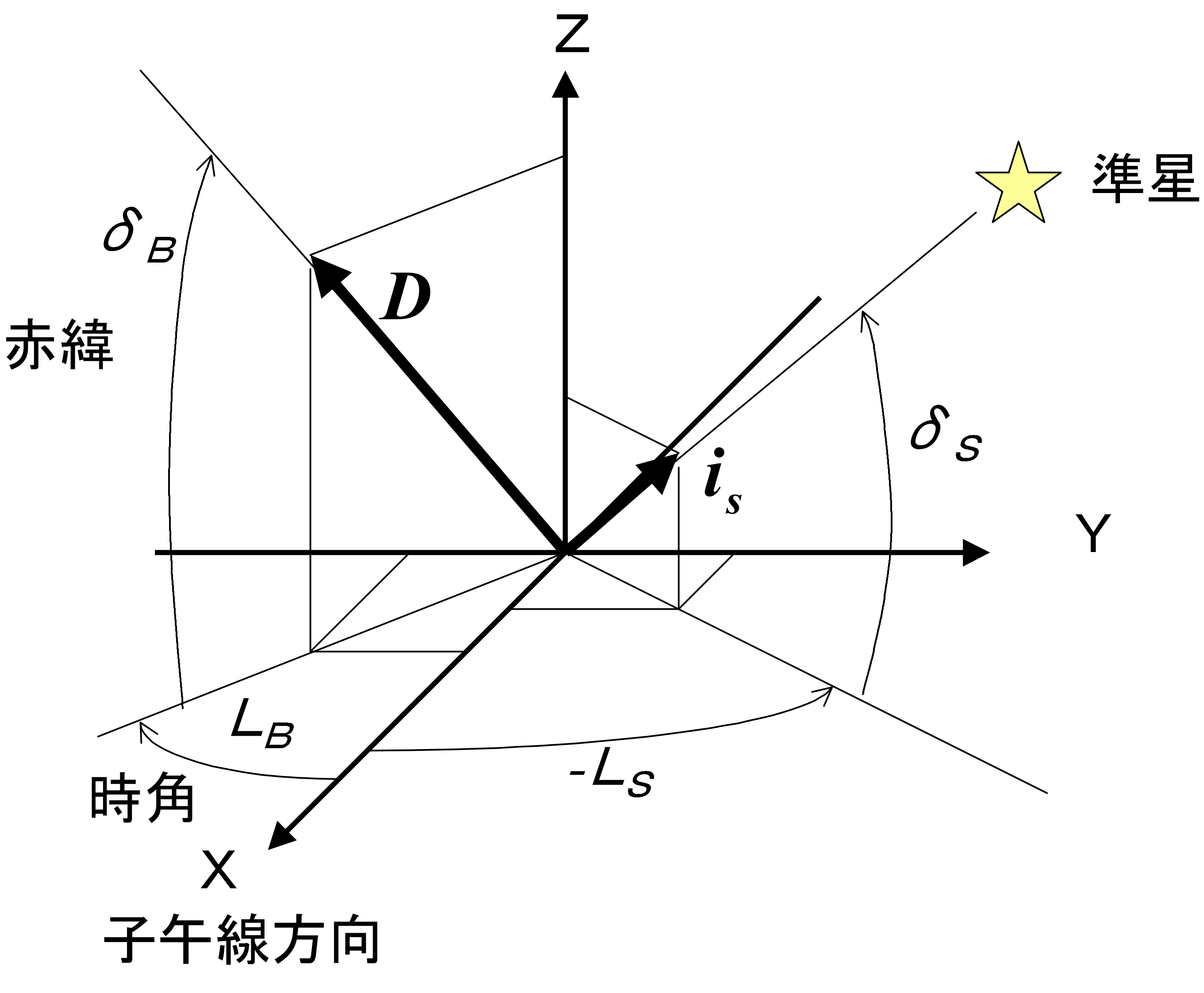
電波源位置が正確な場合

$$\Delta\boldsymbol{i}_s = 0 \quad \therefore \quad \Delta\tau_g = -\frac{\Delta\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{i}_s}{c}$$

局位置が正確な場合

$$\Delta\boldsymbol{D} = 0 \quad \therefore \quad \Delta\tau_g = -\frac{\boldsymbol{D}\cdot\Delta\boldsymbol{i}_s}{c}$$

地方赤道座標系での表現



$$\boldsymbol{D} = (D\cos\delta_B \cos L_B,\ -D\cos\delta_B \sin L_B,\ D\sin\delta_B)$$

$$\boldsymbol{i_s} = (\cos\delta_S \cos L_S,\ -\cos\delta_S \sin\delta_S,\ \sin\delta_S)$$

したがって

$$\tau_g = -\frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{i_s}}{c}$$

$$= -\frac{D}{c}(\cos\delta_B \cos L_B \cos\delta_S \cos L_S$$

$$+\cos\delta_B \sin L_B \cos\delta_S \sin L_S + \sin\delta_B \sin\delta_S)$$

$$= -\frac{D}{c}(\sin\delta_B \sin\delta_S + \cos\delta_B \cos\delta_S \cos(L_S - L_B))$$

幾何学的遅延時間

$$\boxed{\tau_g = -\frac{D}{c}(\sin\delta_B \sin\delta_S + \cos\delta_B \cos\delta_S \cos(L_S - L_B))}$$

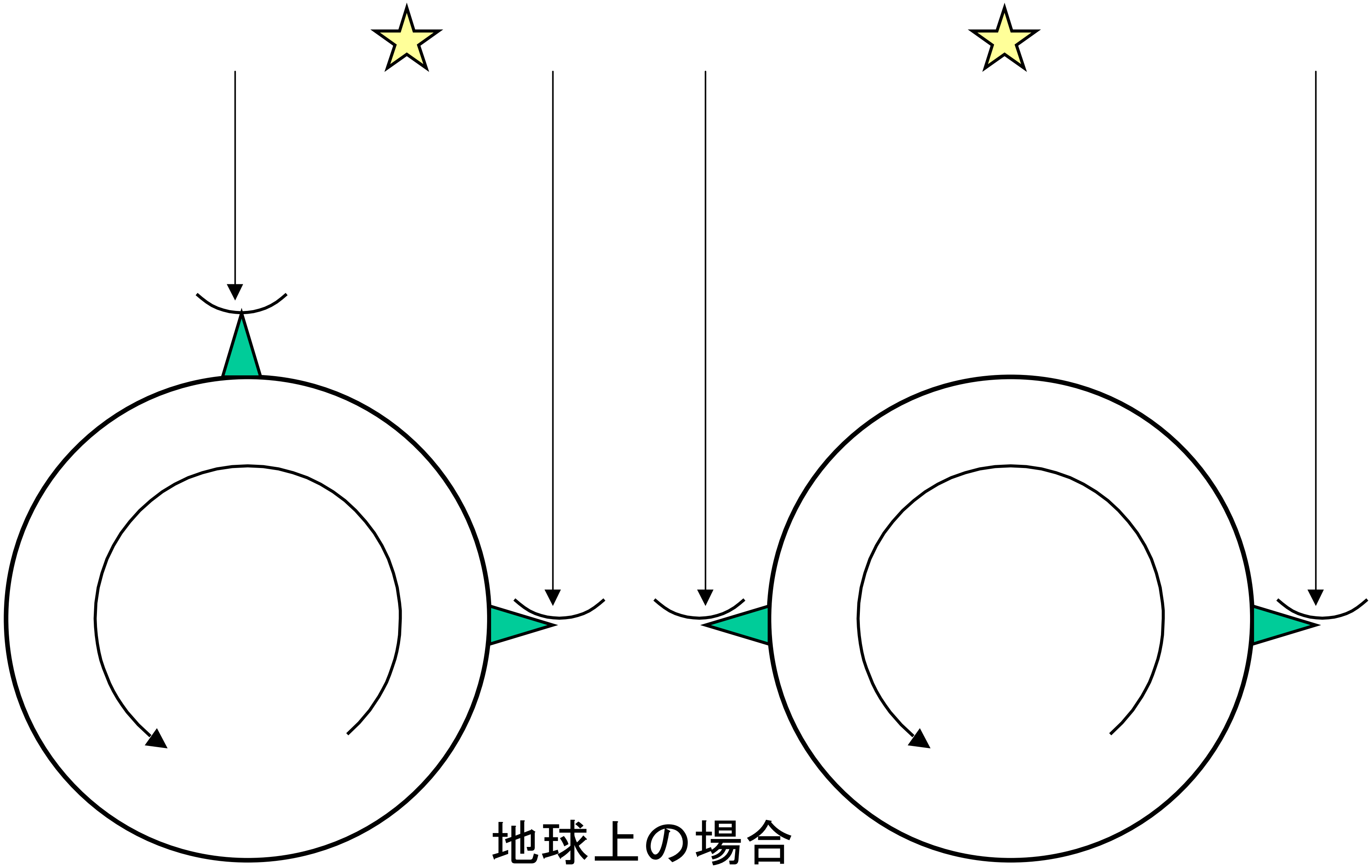
遅延変化率

$$\dot{\tau}_g = \frac{d\tau_g}{dt} = \frac{D}{c}\cos\delta_B \cos\delta_S \sin(L_S - L_B)\frac{dLs}{dt}$$

ここで $\dfrac{dLs}{dt} = \omega_E$: 地球の回転角速度(=2π/86400=7.27×10^{-5})

を使うと

$$\boxed{\dot{\tau}_g = \frac{D}{c}\omega_E \cos\delta_B \cos\delta_S \sin(L_S - L_B)}$$



地球上の場合

遅延時間最大

約21ms

遅延変化率最大

約3.1μ/s

遅延変化率の更に時間微分

$$\ddot{\tau}_g = \frac{d\dot{\tau}_g}{dt} = \frac{D}{c}\omega_E{}^2 \cos\delta_B \cos\delta_S \cos(L_S - L_B)$$

この最大値は、遅延時間最大値と同じ条件の時で
約110ps/s^2 =>１０秒間での遅延変化が6ns

更に時間微分

$$\dddot{\tau}_g = \frac{d\ddot{\tau}_g}{dt} = -\frac{D}{c}\omega_E{}^3 \cos\delta_B \cos\delta_S \sin(L_S - L_B)$$

$\dddot{\tau}_g$ までは実際のVLBIデータ処理において使用する

フリンジ位相

$\phi = \omega\tau_g$ ラジアン $\omega(=2\pi f)$ は観測角周波数

位相遅延 $\tau_g = \dfrac{\phi}{\omega}$ 群遅延 $\tau_g = \dfrac{d\phi}{d\omega}$

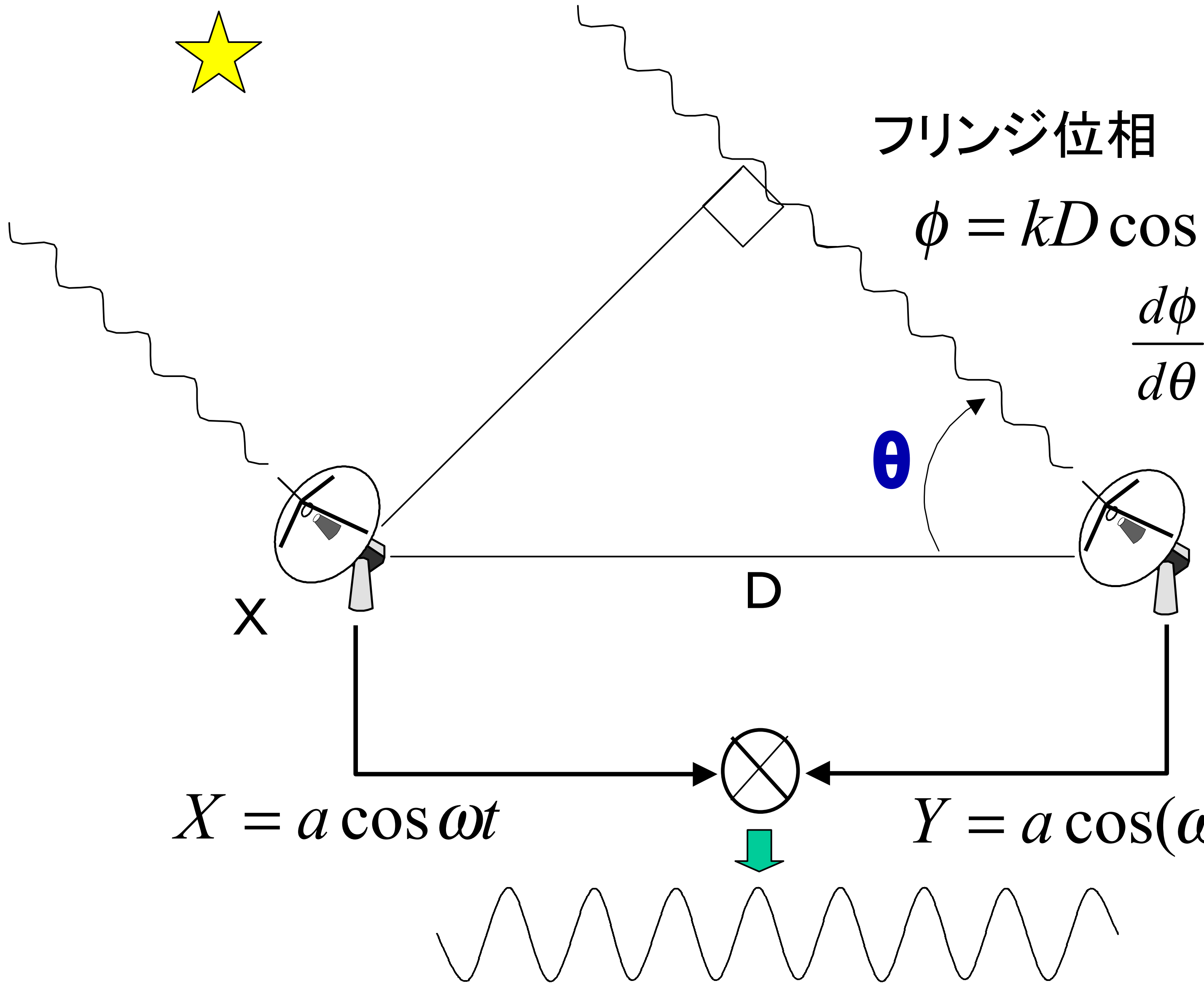
フリンジレート

$$F_R = \frac{d\phi}{dt} = \omega\dot{\tau}_g$$

$$= \frac{\omega D}{c}\omega_E \cos\delta_B \cos\delta_S \sin(L_S - L_B)$$

フリンジ周波数 $f_R = f\dot{\tau}_g$

観測周波数 8GHz とすると、地球上での最大値は約24kHz



フリンジ位相

$$\phi = kD\cos\theta$$

$$\frac{d\phi}{d\theta} = -kD\sin\theta$$

$$= -\frac{2\pi}{\lambda}D\sin\theta$$

$$X = a\cos\omega t$$

$$Y = a\cos(\omega t - kD\cos\theta)$$

かけ算出力
（LPF出力）

$$XY = \frac{1}{2}a^2\cos(kD\cos\theta)$$

干渉計の分解能

フリンジ位相　　$\phi = kD\cos\theta$

$$\frac{d\phi}{d\theta} = -kD\sin\theta = -\frac{\omega}{c}D\sin\theta = -\frac{2\pi}{\lambda}D\sin\theta$$

$$d\theta = -\frac{\lambda}{2\pi D\sin\theta}d\phi$$

ここで $d\phi=2\pi$ とすると、

$$\boxed{d\theta = -\frac{\lambda}{D\sin\theta}}$$

ここで$D\sin\theta$は電波星から見た基線長の成分

u, v

基線を電波源方向と直交平面に投影した場合の
　u:　赤経方向成分
　v:　赤緯方向成分

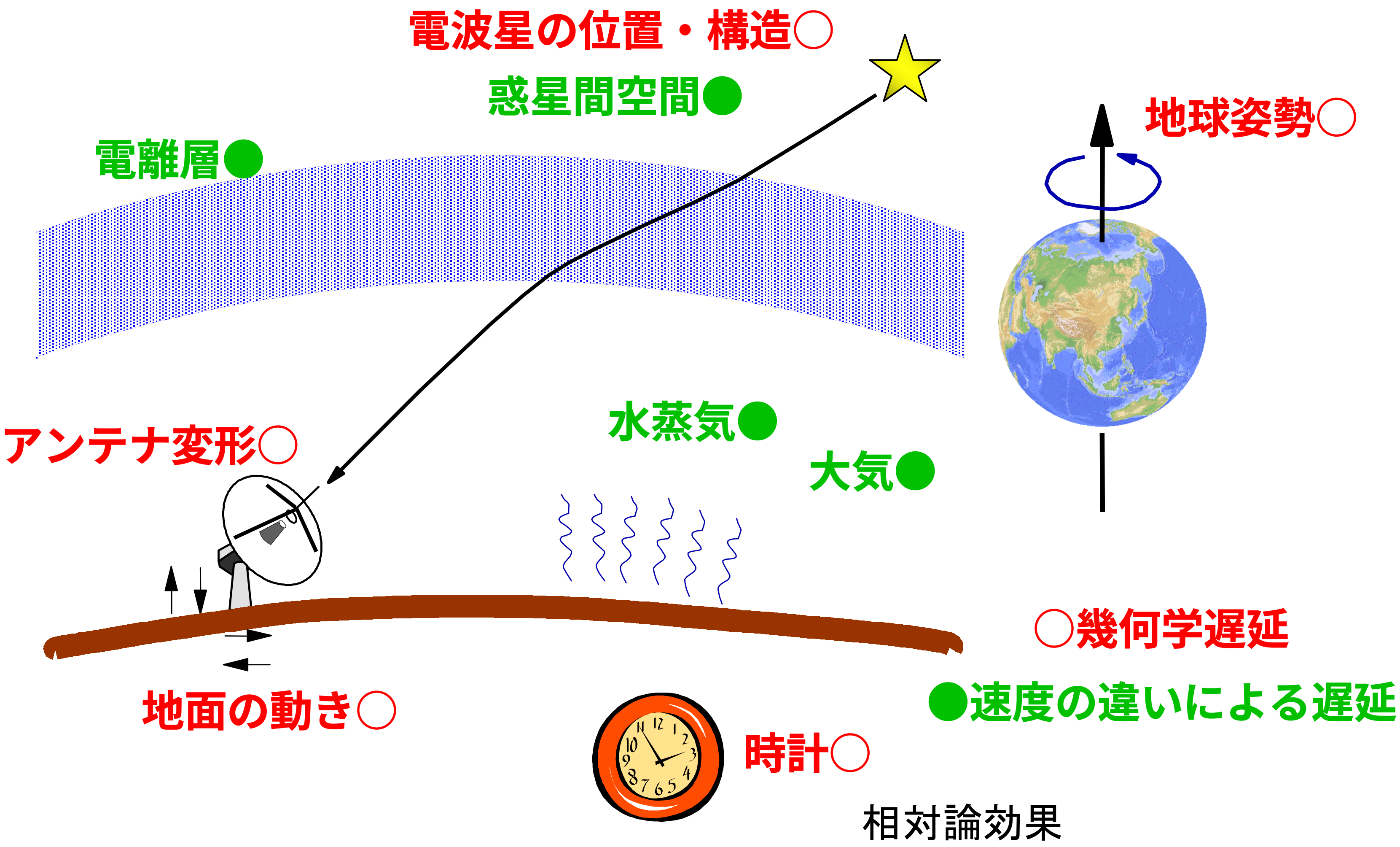
別の言い方をすると、

電波源から基線を見た場合の基線の
　u:　赤経方向成分
　v:　赤緯方向成分

$$u = \frac{\omega}{c} D \cos\delta_B \sin(L_S - L_B)$$

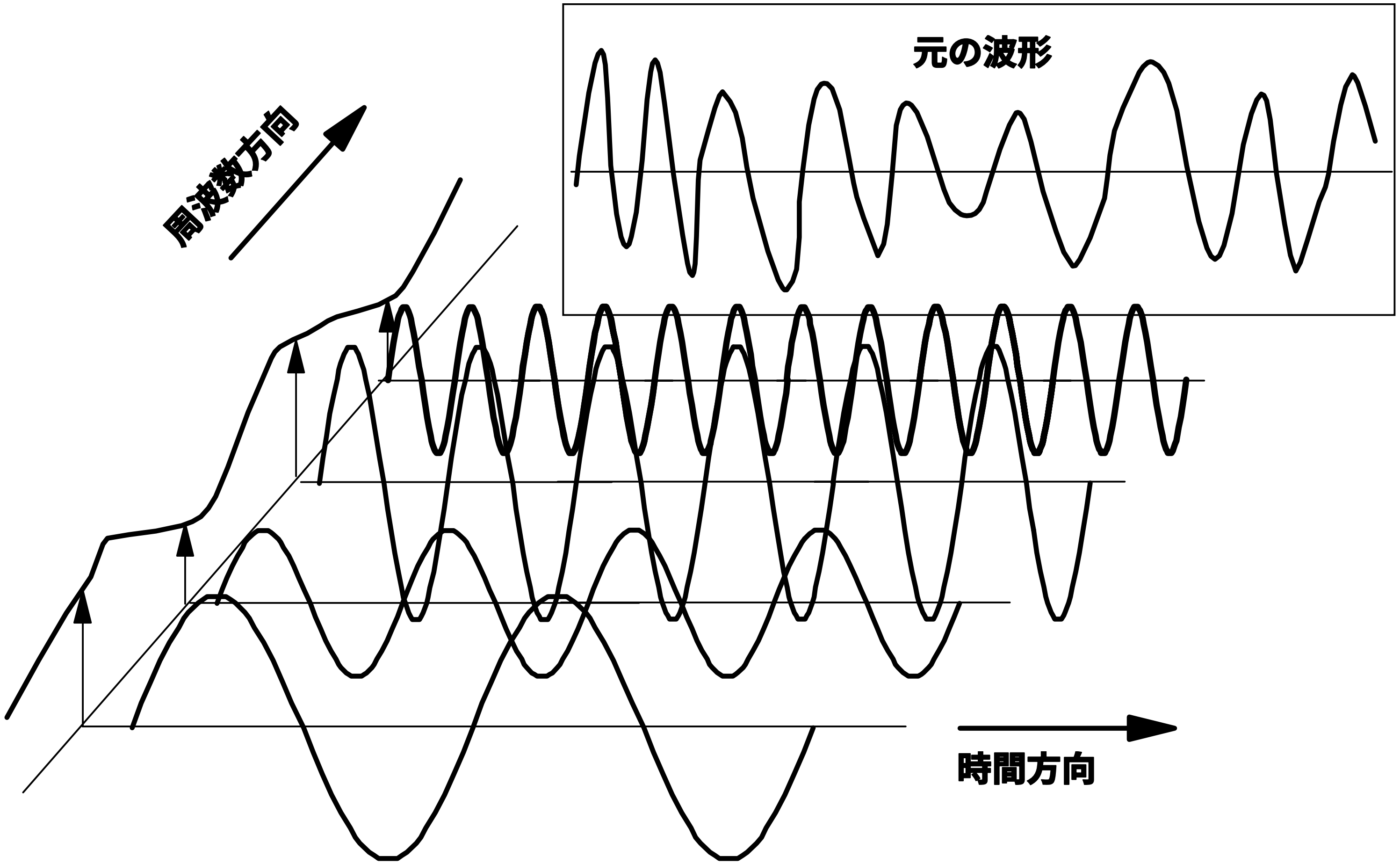
$$v = \frac{\omega}{c} D(\sin\delta_B \sin\delta_S - \cos\delta_B sin\delta_S \cos(L_S - L_B))$$

VLBI観測遅延に含まれる物理効果



相互相関関数

任意の信号の周波数領域での表現と時間領域での表現



フーリエ変換の基礎

フーリエ変換

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

フーリエ逆変換

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

フーリエ変換の諸性質

時間推移とフーリエ変換

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau_0)e^{-i2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)e^{-i2\pi f(s+\tau_0)}ds$$

$$= e^{-i2\pi f\tau_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(s)e^{-i2\pi fs}ds$$

$$= e^{-i2\pi f\tau_0}X(f)$$

時間軸上でのシフトは周波数軸上では周波数に依存した位相遅れ

周波数推移と
フーリエ逆変換

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(f-f_0)e^{i2\pi ft}df = e^{i2tf_0}g(t)$$

相関定理

相互相関関数

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t-\tau)\, dt$$

相互相関関数のフーリエ変換（相互スペクトル）

$$C_{xy}(f) = X(f)\, Y^{*}(f)$$

$$\boxed{c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, Y^{*}(f)\, e^{i2\pi f\tau}\, df}$$

畳込み定理

畳込み積分(convolution integral)

$$h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y(\tau - t)\,dt$$

$$= x * y$$

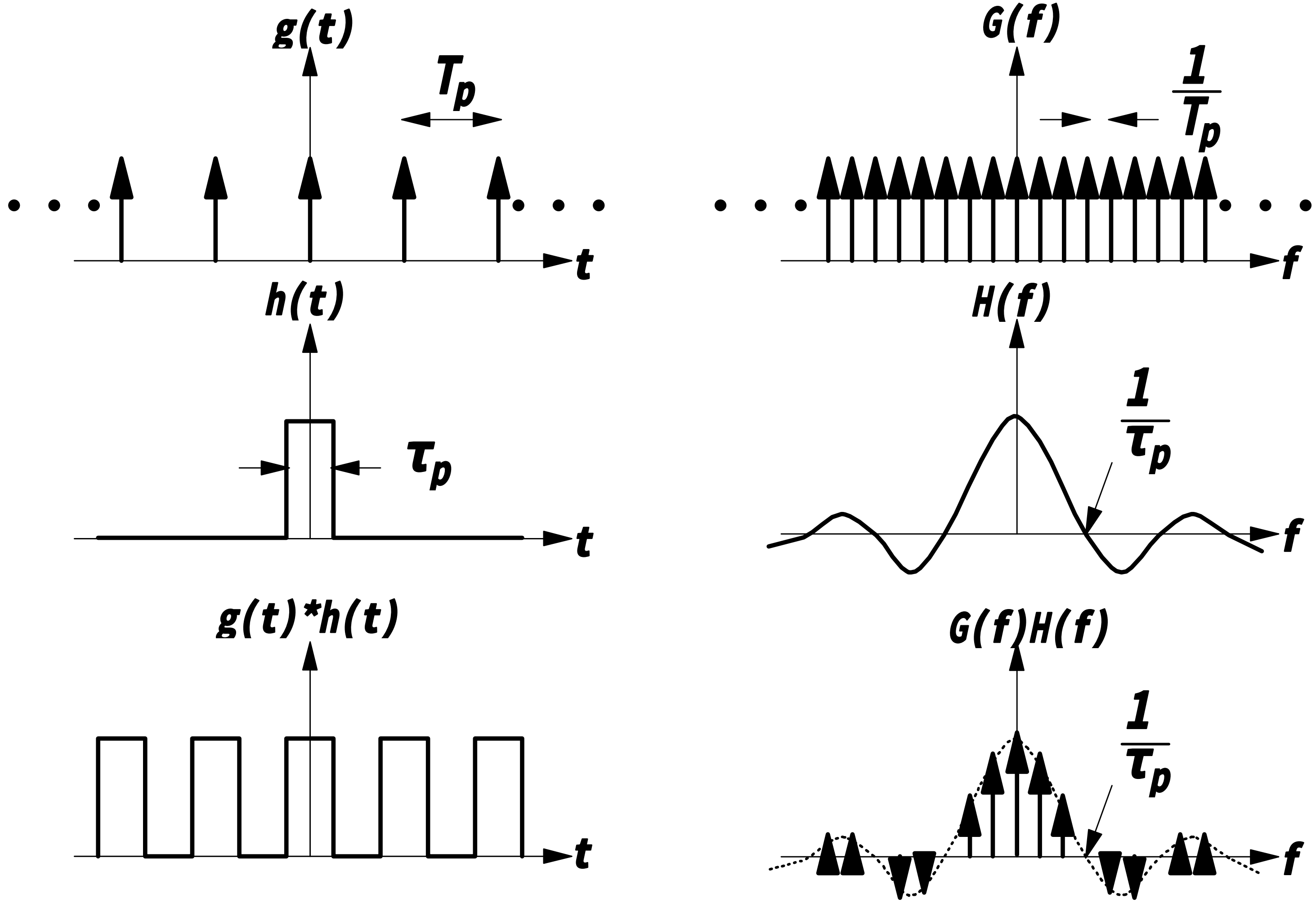
畳込み積分のフーリエ変換

$$H(f) = X(f)Y(f)$$

周波数領域の畳み込み定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{X(f) * Y(f)\} e^{i2\pi ft} df = x(t)\,y(t)$$

位相校正信号の
時系列表現とスペクトル



パーセバルの定理(Parseval’s theorem)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) e^{-i2\pi ft} dt = X(f) * X(f)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) X(\eta - f) df$$

ここで　$\eta = 0$　とすると

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| X(f) \right|^2 df}$$

時間領域で計算する波形のエネルギーと
周波数領域で計算する波形のエネルギーが等しい

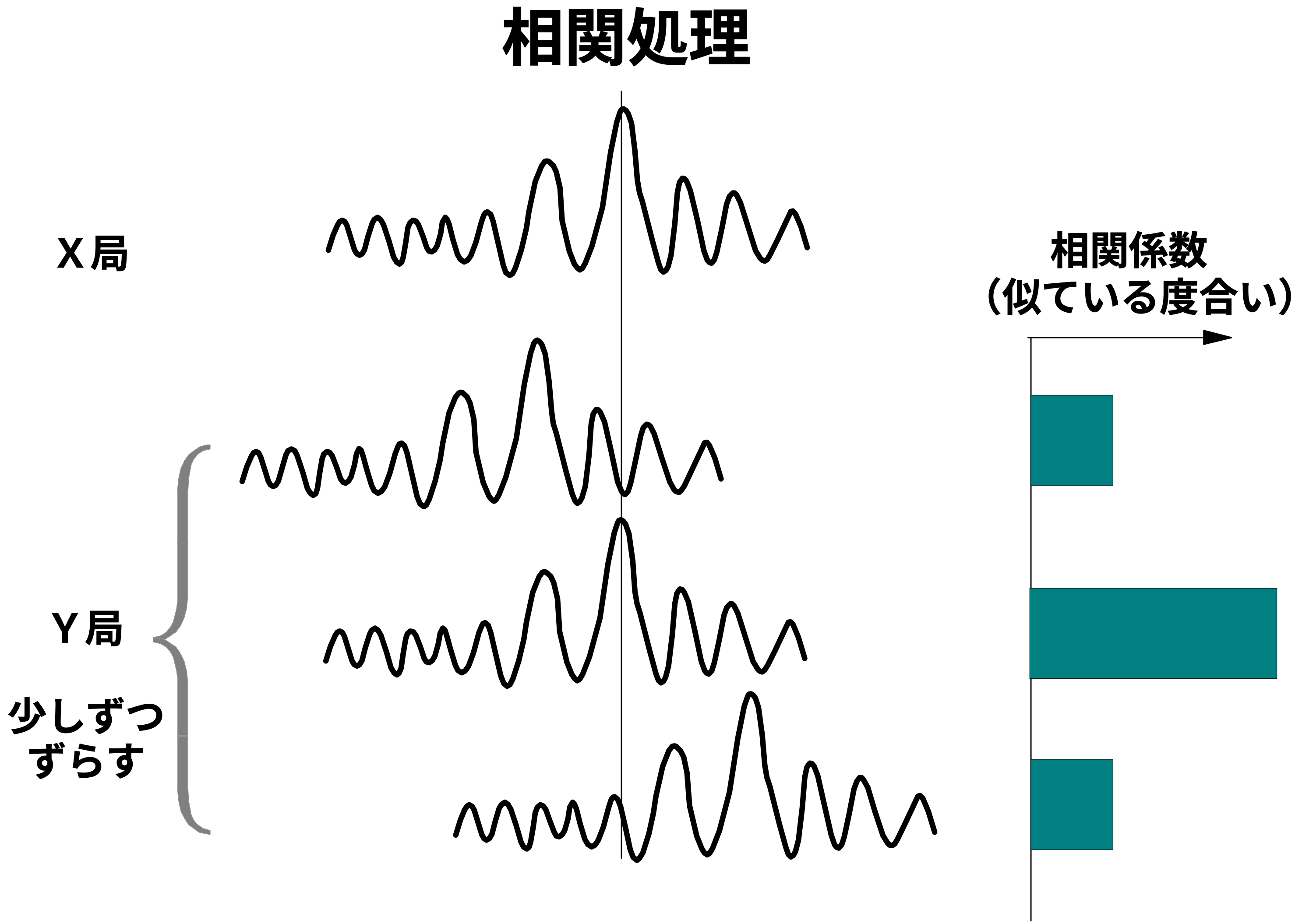
もっともらしい遅延時間の推定法

VLBIでは観測データ処理に相互相関を用いて遅延時間を測定する

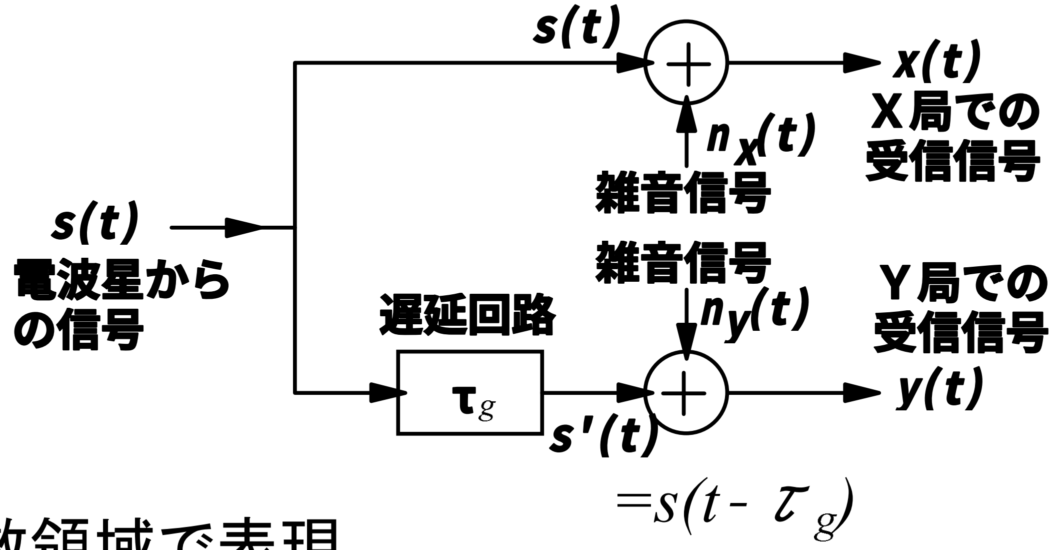
最尤推定法

相互相関法

相互相関の原理



VLBI信号等価モデル



周波数領域で表現

$$X(f) = S(f) + N_x(f)$$

$$Y(f) = S'(f) + N_y(f)$$

$$S'(f) = S(f)e^{-i2\pi f\tau_g}$$

等価雑音温度を用いての表現

$$X(f)=\sqrt{T_{ax}}s(f)+\sqrt{T_{nx}}n_x(f)$$

$$Y(f)=\sqrt{T_{ay}}s'(f)+\sqrt{T_{ny}}n_y(f)$$

ここで

T_{ax},T_{ay}　X局、Y局での電波星受信信号の等価雑音温度

T_{nx},T_{ny}　X局、Y局で付加される雑音の等価雑音温度

VLBIで扱う相互相関関数

周波数変換をしない場合

相互スペクトルは

$$C_{xy}(f) = X(f)Y^*(f)$$

$$= \sqrt{T_{ax}T_{ay}}\, s(f)s'^*(f) + \sqrt{T_{ax}T_{ny}}\, s(f)n_y{}^*(f)$$

$$+ \sqrt{T_{nx}T_{ay}}\, n_x(f)s'^*(f) + \sqrt{T_{nx}T_{ny}}\, n_x(f)n_y{}^*(f)$$

右辺、2項以降は適当な時間の積分によりゼロとなる！

結局

$$C_{xy}(f) = \sqrt{T_{ax}T_{ay}}\,\overline{|s(f)|}^2 e^{i2\pi f\tau_g}$$

$$= \sqrt{T_{ax}T_{ay}}\, e^{i2\pi f\tau_g}$$

逆フーリエ変換を行えば相互相関関数を得る

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(f) e^{i2\pi f\tau} df$$

規格化相互相関関数は

$$\boxed{r_{xy}(\tau) = \frac{c_{xy}(\tau)}{\sqrt{c_{xx}(0)c_{yy}(0)}}}$$

ところで、$c_{xy}(\tau)$ をもう少し変形する

$$c_{xy}(\tau) = \int_{0}^{\infty} C_{xy}(f) e^{i2\pi f\tau} df + \int_{-\infty}^{0} C_{xy}(f) e^{i2\pi f\tau} df$$

$$= \int_{0}^{\infty} C_{xy}(f) e^{i2\pi f\tau} df - \int_{\infty}^{0} C_{xy}(-f) e^{-i2\pi f\tau} df$$

ここで　$$C_{xy}(-f) = C_{xy}{}^{*}(f)$$

ゆえに

$$c_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} C_{xy}(f) e^{i2\pi f\tau} df + \int_0^{\infty} C_{xy}{}^{*}(f) e^{-i2\pi f\tau} df$$

実部、虚部に分けて整理すると

$$c_{xy}(\tau) = 2\int_0^{\infty} \mathrm{Re}\{C_{xy}(f)\} \cos 2\pi f\tau df$$
$$-2\int_0^{\infty} \mathrm{Im}\{C_{xy}(f)\} \sin 2\pi f\tau df$$

さらに受信周波数帯域をf_0〜f_0+B とし、
また温度の表現を使うと

$$c_{xy}(\tau) = 2\sqrt{T_{ax}T_{ay}}\int_{f_0}^{f_0+B}\{\cos 2\pi f\tau_g \cdot \cos 2\pi f\tau$$

$$-\sin 2\pi f\tau_g \cdot \sin 2\pi f\tau\}df$$

$$= 2\sqrt{T_{ax}T_{ay}}\int_{f_0}^{f_0+B}\cos 2\pi f(\tau+\tau_g)df$$

$$= 2B\sqrt{T_{ax}T_{ay}}\cos\{(2\pi f_0+\pi B)(\tau+\tau_g)\}$$

$$\cdot\frac{\sin \pi B(\tau+\tau_g)}{\pi B(\tau+\tau_g)}$$

また、

$$c_{xx}(0) = 2\int_{f_0}^{f_0+B} \left|X(f)\right|^2 df$$

$$= 2\overline{\left|X(f)\right|^2} B$$

$$= 2(T_{ax} + T_{nx})B$$

同様に　$c_{yy}(0) = 2(T_{ay} + T_{ny})B$

従って

$$\boxed{r_{xy}(\tau) = \rho_0 \cos\{(2\pi f_0 + \pi B)(\tau + \tau_g)\} \frac{\sin \pi B(\tau + \tau_g)}{\pi B(\tau + \tau_g)}}$$

ただし　$\rho_0 = \sqrt{\dfrac{T_{ax} T_{ay}}{(T_{ax} + T_{nx})(T_{ay} + T_{ny})}}$

VLBIで扱う相互相関関数

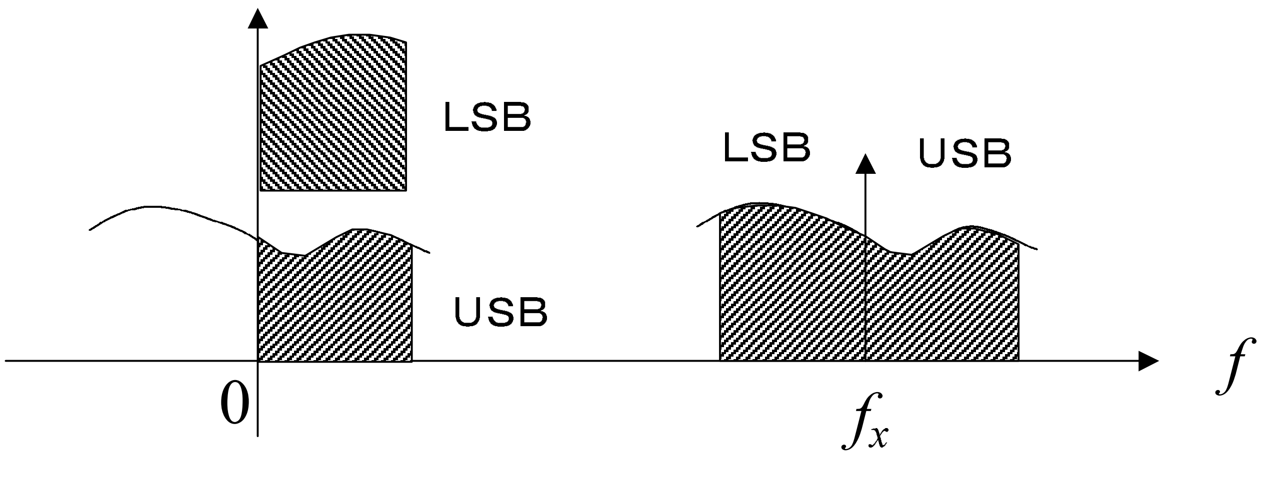
周波数変換を行う場合（ビデオ信号の相互相関関数）

ローカル周波数f_x,f_y 位相 ϕ_x, ϕ_yで周波数変換

$$X_v(f) = X(f+f_x)e^{-i\phi_x} + X(f-f_x)e^{i\phi_x}$$

$$Y_v(f) = Y(f+f_y)e^{-i\phi_y} + Y(f-f_y)e^{i\phi_y}$$

USB　　　　　LSB



USBの相互スペクトルは

$$
\begin{aligned}
C_{xy}{}^{v}(f) &= X_v(f)Y_v{}^{*}(f) \\
&= \sqrt{T_{ax}T_{ay}}\, s(f+f_x)e^{-i\phi_x} s'^{*}(f+f_y)e^{i\phi_y} \\
&\quad + \sqrt{T_{ax}T_{ny}}\, s(f+f_x)e^{-i\phi_x} n_y{}^{*}(f+f_y)e^{i\phi_y} \\
&\quad + \sqrt{T_{nx}T_{ay}}\, n_x(f+f_x)e^{-i\phi_x} s'^{*}(f+f_y)e^{i\phi_y} \\
&\quad + \sqrt{T_{nx}T_{ny}}\, n_x(f+f_x)e^{-i\phi_x} n_y{}^{*}(f+f_y)e^{i\phi_y}
\end{aligned}
$$

右辺、2項以降は適当な時間の積分によりゼロとなる！

結局

$$
C_{xy}{}^{v}(f) = \sqrt{T_{ax}T_{ay}}\, s(f+f_x)e^{-i\phi_x} s'^{*}(f+f_y)e^{i\phi_y}
$$

さらに変形するための準備

$$H(f+\Delta f) = \int h(t) e^{-i2\pi(f+\Delta f)t} dt$$
$$= \int h(t) e^{-i2\pi ft} e^{-i2\pi \Delta ft} dt$$

ここで、有限な時間長T内で$|\Delta ft| << 1$とすると
exp(-i2 $\pi\Delta ft$)は定数とみなし、積分の外に出せる

$$H(f+\Delta f) \approx e^{-i2\pi \Delta ft} \int h(t) e^{-i2\pi ft} dt$$
$$= e^{-i2\pi \Delta ft} H(f)$$

$f_y - f_x = \Delta f$かつ$|\Delta f| << 1$という条件でこの近似を使うと

$$s'^{*}(f+f_y) \approx e^{i2\pi \Delta ft} s'^{*}(f+f_x)$$

ここで　$s'^{*}(f) = s^{*} e^{i 2\pi \Delta f \tau_g}$　であるから

$$s'^{*}(f + f_y) \approx s^{*}(f + f_x) e^{i 2\pi \{(f + f_x)\tau_g + \Delta f t\}}$$

従って

$$C_{xy}{}^{v}(f) = \sqrt{T_{ax} T_{ay}} \underbrace{\left| s(f + f_x) \right|^2}_{\fallingdotseq 1} e^{i\{2\pi (f + f_x)\tau_g + (\phi_y - \phi_x) + 2\pi \Delta f t\}}$$

結局

$$C_{xy}{}^{v}(f) = \sqrt{T_{ax} T_{ay}} e^{i\{2\pi (f + f_0)\tau_g + \theta\}}$$

ただし

$$\theta = 2\pi \Delta f t + \phi_y - \phi_x$$

$$f_0 = f_x$$

相互相関関数は

$$c_{xy}{}^{v}(\tau) = 2\int_0^\infty \mathrm{Re}\{C_{xy}{}^{v}(f)\}\cos 2\pi f\tau df$$

$$-2\int_0^\infty \mathrm{Im}\{C_{xy}{}^{v}(f)\}\sin 2\pi f\tau df$$

積分範囲を0〜Bとして計算を行う

$$c_{xy}{}^{v}(\tau) = 2\sqrt{T_{ax}T_{ay}}\left[\int_0^B \cos\{2\pi(f+f_0)\tau_g+\theta\}\cos 2\pi f\tau df\right.$$

$$\left.-2\int_0^B \sin\{2\pi(f+f_0)\tau_g+\theta\}\sin 2\pi f\tau df\right]$$

$$= 2\sqrt{T_{ax}T_{ay}}\int_0^B \cos\{2\pi f(\tau+\tau_g)+2\pi f_0\tau_g+\theta\}\tau df$$

$$= \frac{\sqrt{T_{ax}T_{ay}}}{2\pi(\tau+\tau_g)}\left[\sin\{2\pi f(\tau+\tau_g)+2\pi f_0\tau_g+\theta\}\right]_0^B$$

$$= \frac{\sqrt{T_{ax}T_{ay}}}{2\pi(\tau+\tau_g)}\left[\sin\{2\pi f(\tau+\tau_g)+2\pi f_0\tau_g+\theta\}-\sin(2\pi f_0\tau_g+\theta)\right]$$

結局

$$c_{xy}{}^{v}(\tau) = 2B\sqrt{T_{ax}T_{ay}}\cos\{2\pi f_0\tau_g + \pi B(\tau+\tau_g) + \theta\}$$

$$\cdot\frac{\sin\pi B(\tau+\tau_g)}{\pi B(\tau+\tau_g)}$$

最終的に規格化相互相関関数は

$$\boxed{r_{xy}{}^{v}(\tau) = \rho_0\cos\{2\pi f_0\tau_g + \pi B(\tau+\tau_g) + \theta\}\frac{\sin\pi B(\tau+\tau_g)}{\pi B(\tau+\tau_g)}}$$

ただし

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{T_{ax}T_{ay}}{(T_{ax}+T_{nx})(T_{ay}+T_{ny})}}$$

$$\theta = 2\pi(f_y - f_x)t + \phi_y - \phi_x$$

規格化相互相関関数の比較

RF直接

$$r_{xy}(\tau) = \rho_0 \cos\{(2\pi f_0 + \pi B)(\tau + \tau_g)\} \frac{\sin \pi B(\tau + \tau_g)}{\pi B(\tau + \tau_g)}$$

周波数変換

$$r_{xy}{}^{v}(\tau) = \rho_0 \cos\{2\pi f_0 \tau_g + \pi B(\tau + \tau_g) + \theta\} \frac{\sin \pi B(\tau + \tau_g)}{\pi B(\tau + \tau_g)}$$

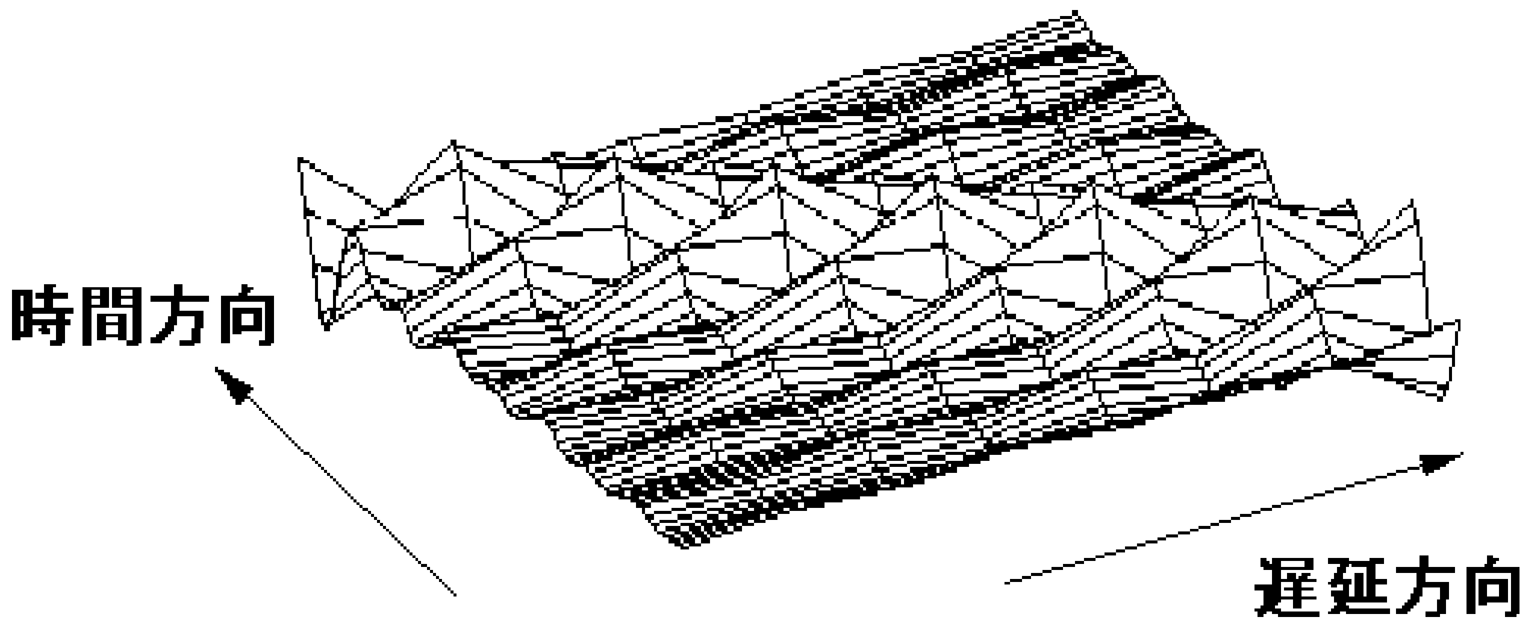
フリンジ位相

$\tau_{g_x} \Rightarrow \tau_g + \Delta\tau_g$ とした場合

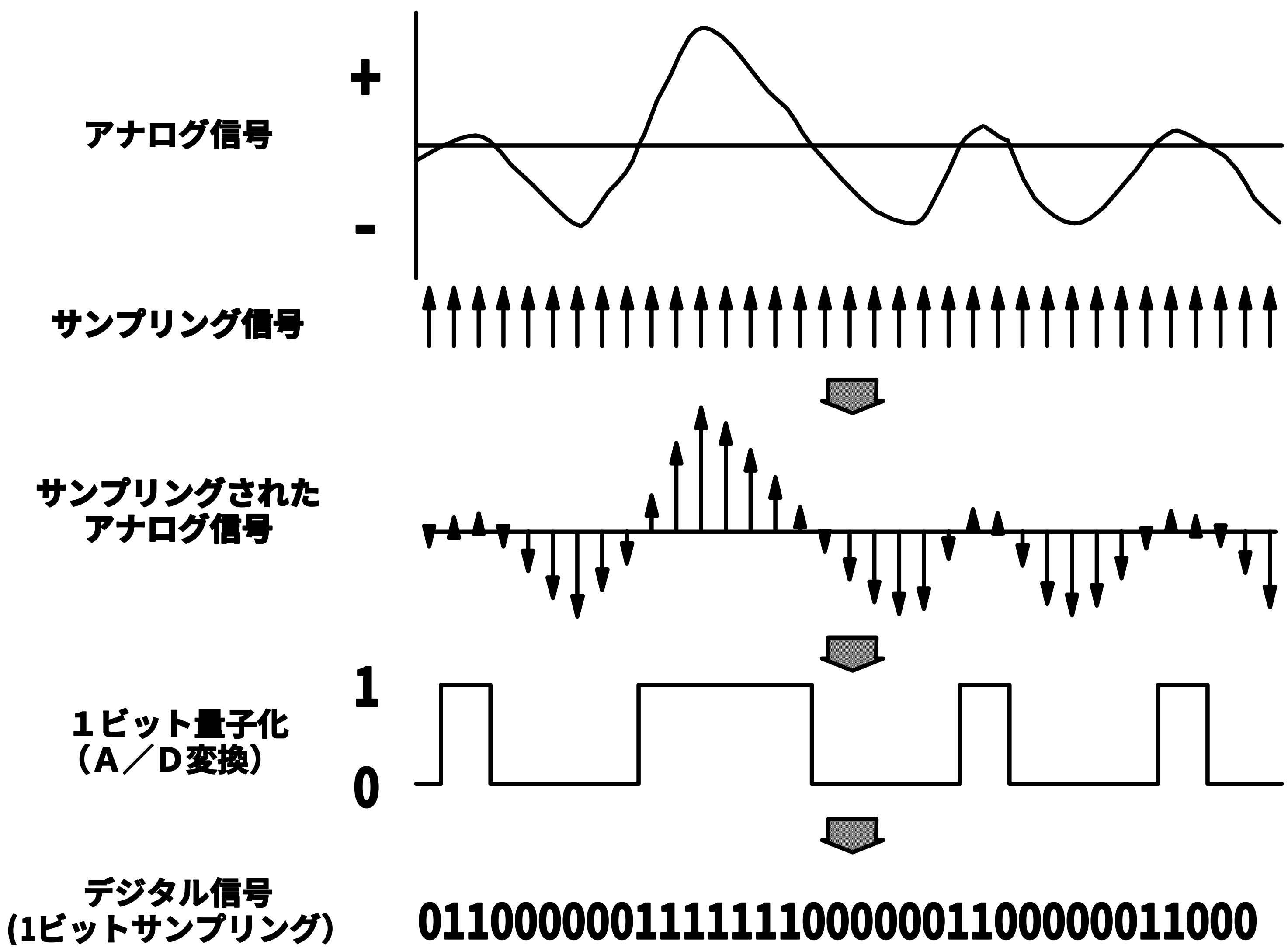
RF直接: τ で吸収可能
周波数変換: $2\pi f_0 \Delta\tau_g$ が残る

フリンジストッピング

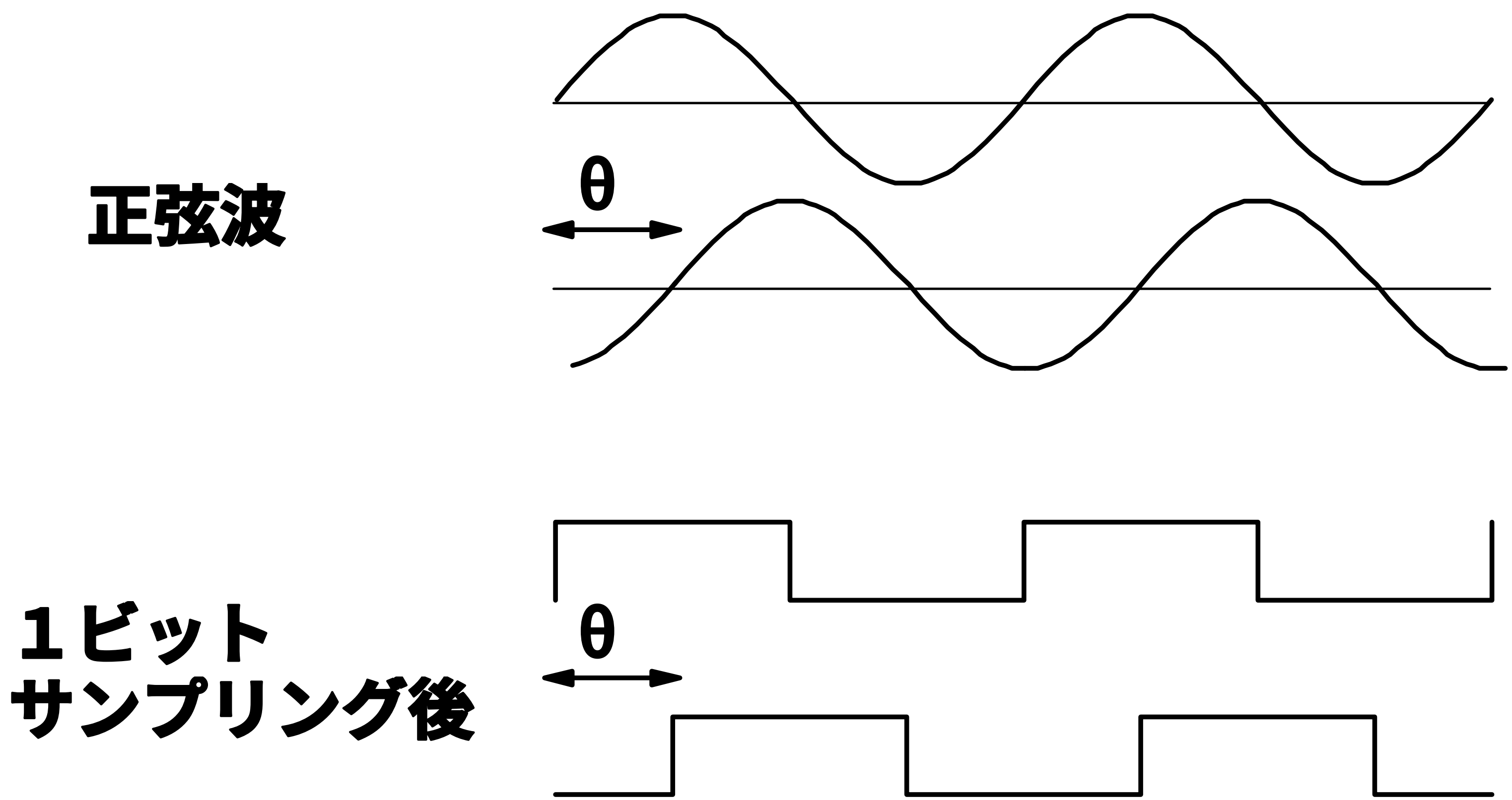
周波数変換後の相関関数例



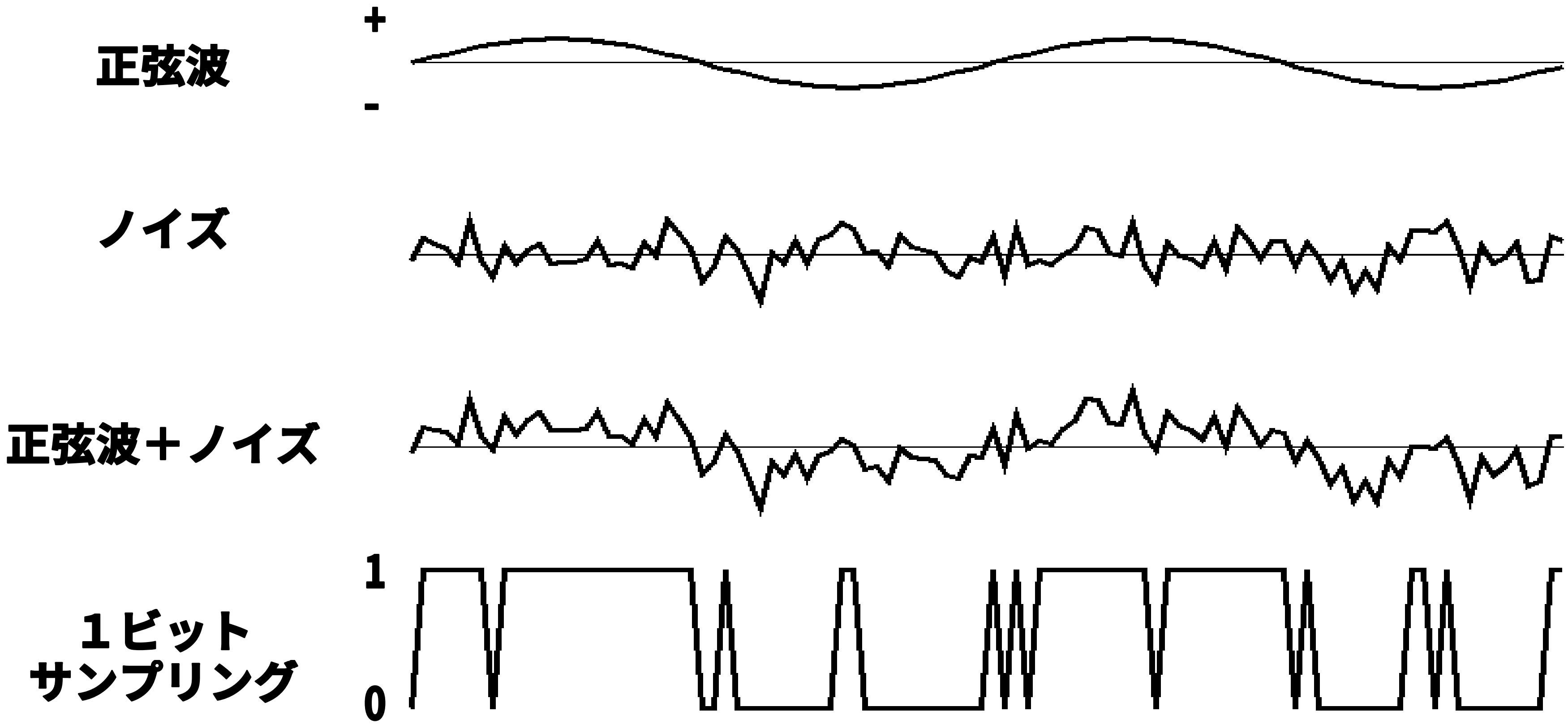
1ビットサンプリングの原理



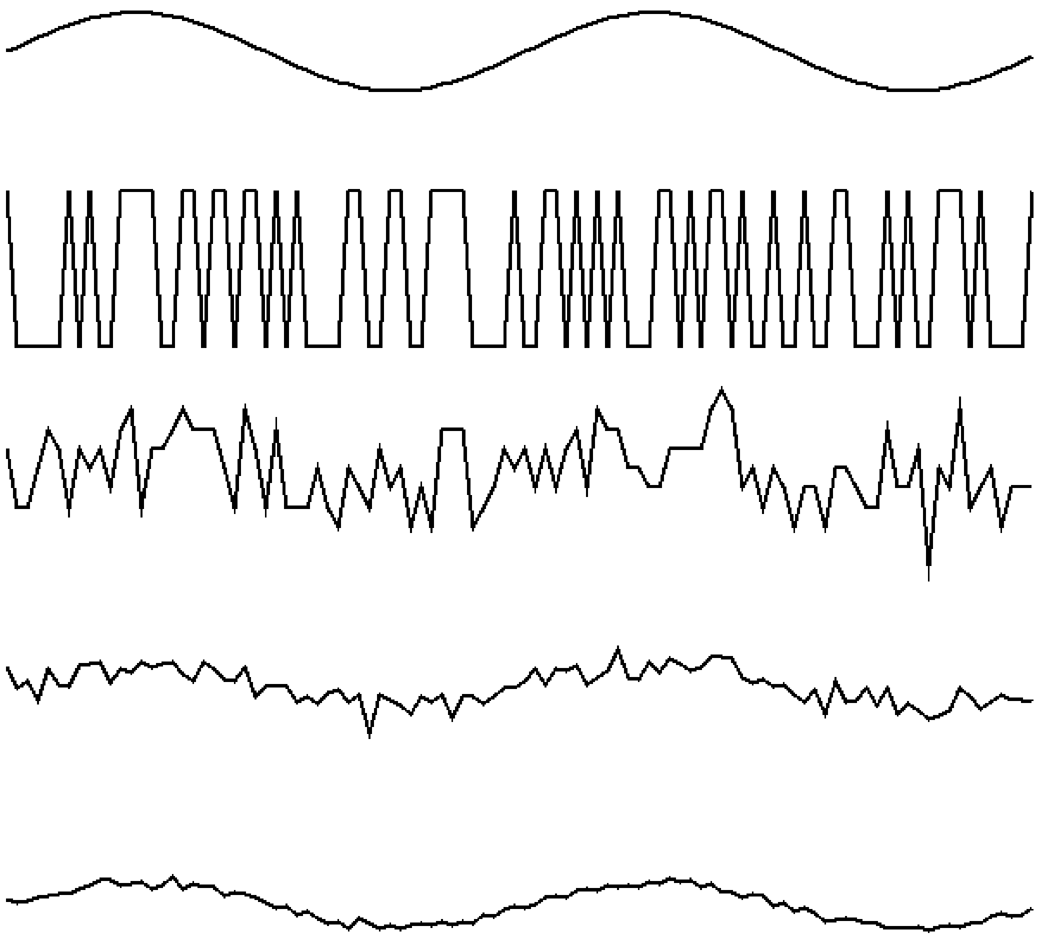
１ビットサンプリング後の位相情報



1ビットサンプリング後の位相情報
ノイズ＋正弦波



正弦波の復元



a　元の正弦波

b　正弦波＋10倍ノイズの1ビットサンプリング

c　10データの集合平均

d　100データの集合平均

e　1000データの集合平均

1ビットサンプリングによる相関損失

1ビットサンプリング後の信号の詳細な数学的解析は
Van Vleck, J.H. and Middleton, D., The spectrum of Clipped noise, Proc. IEEE, 54, 3, pp.2-19, 1966.
に詳しく記述されている

$$\rho_0 = \sin\{\frac{\pi}{2}\rho_c\}$$

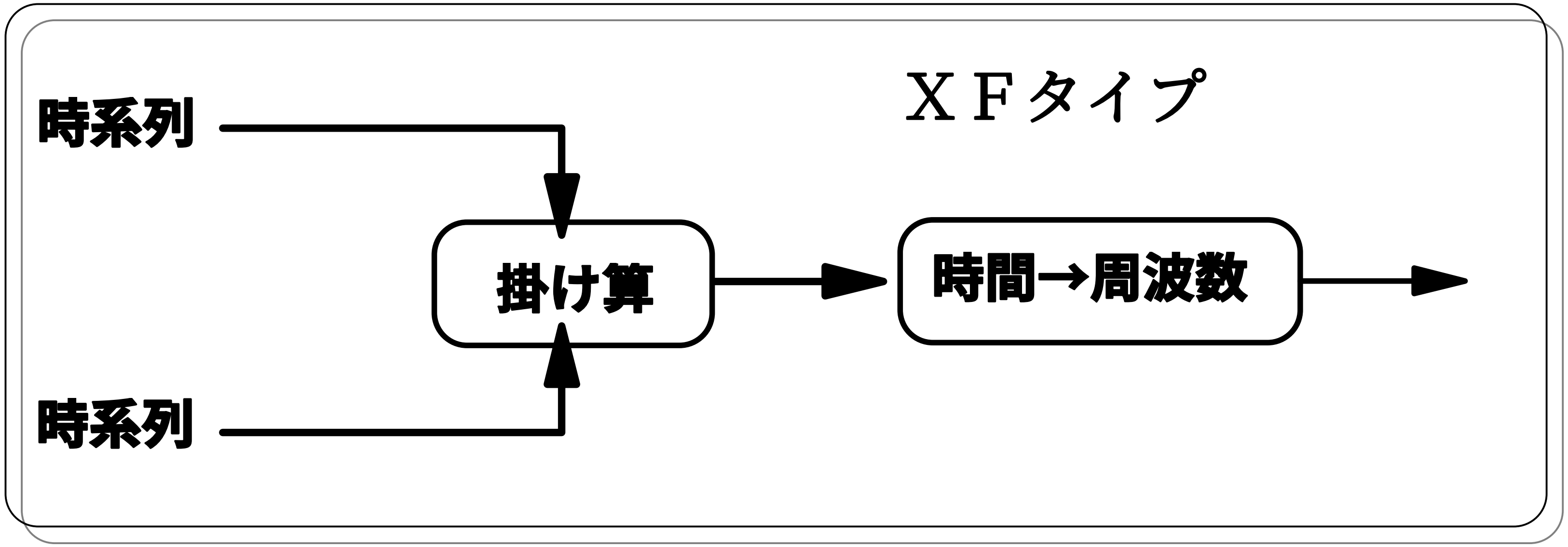
真の相関係数　　　1ビットサンプリング後の相関係数

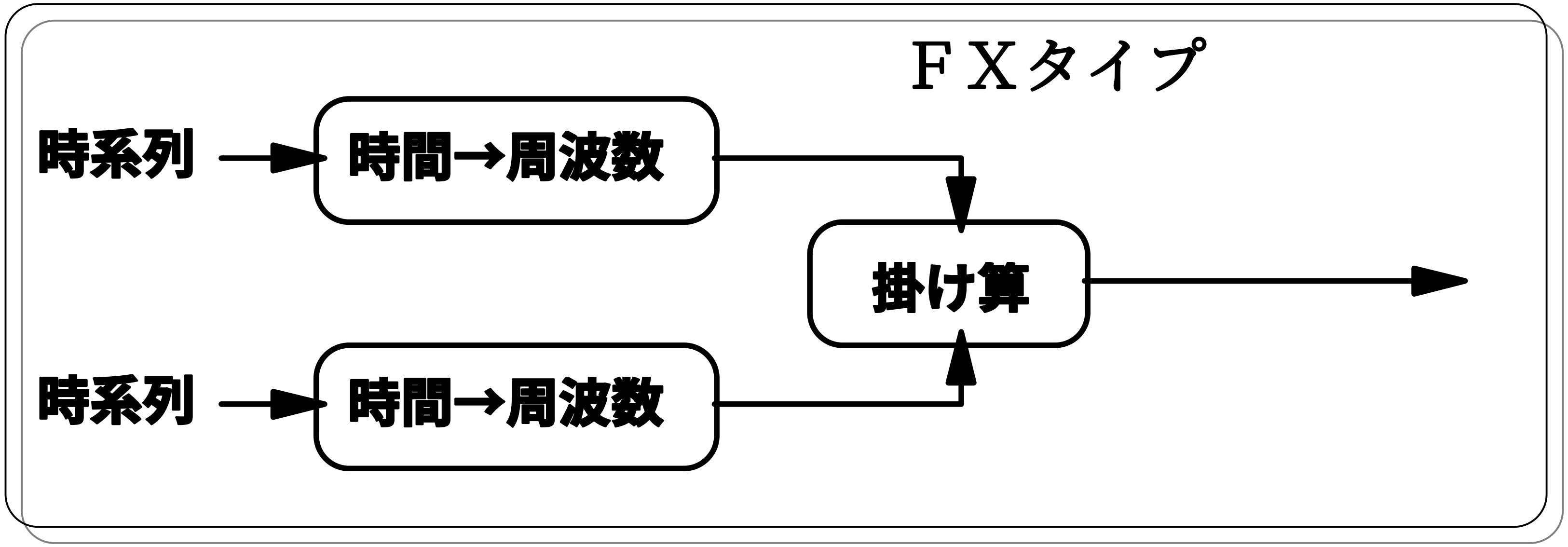
通常のVLBIでは相関係数は非常に小さい(0.01～0.001)

$$\rho_0 \approx \frac{\pi}{2}\rho_c$$

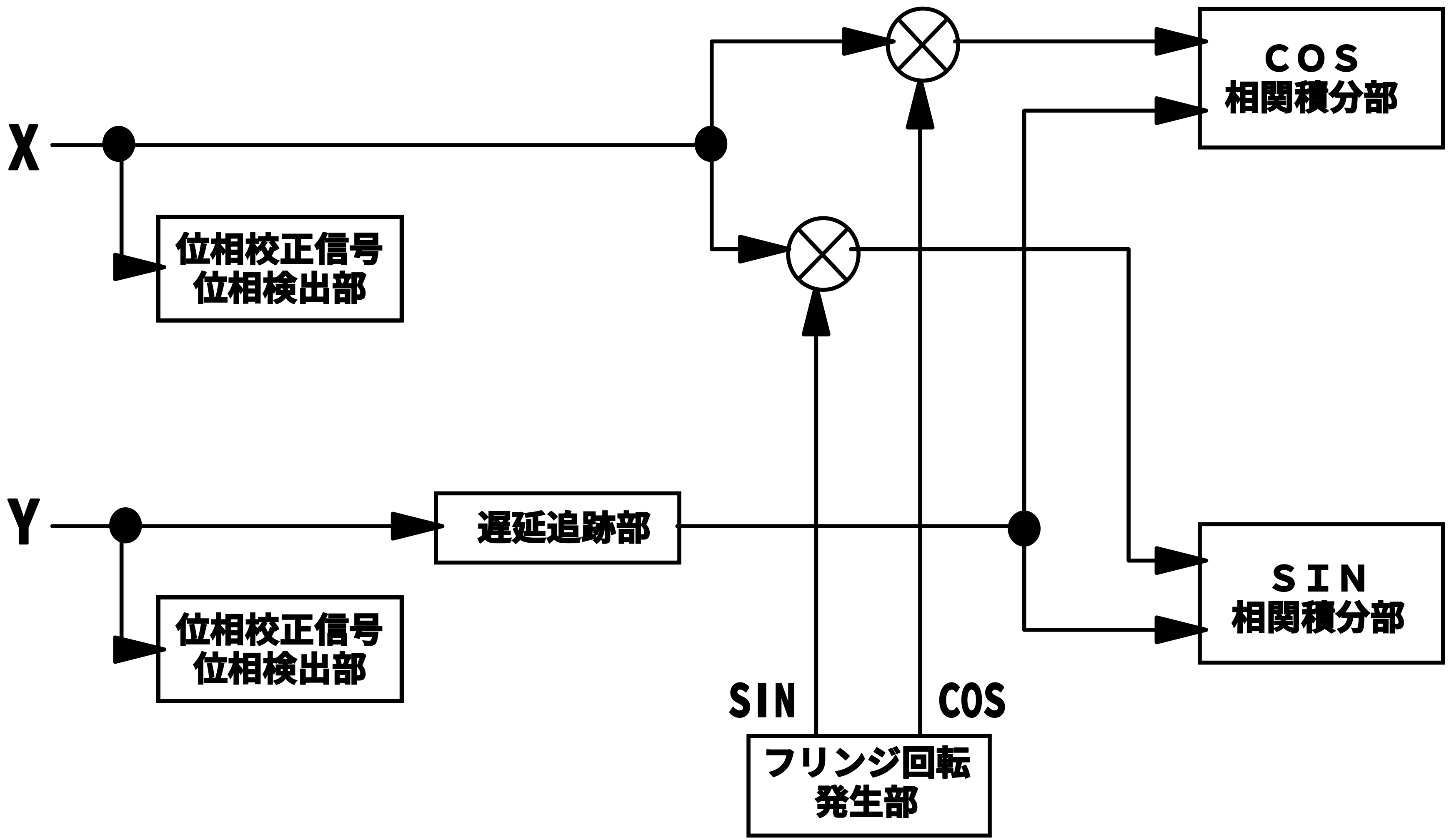
相関処理

相関処理

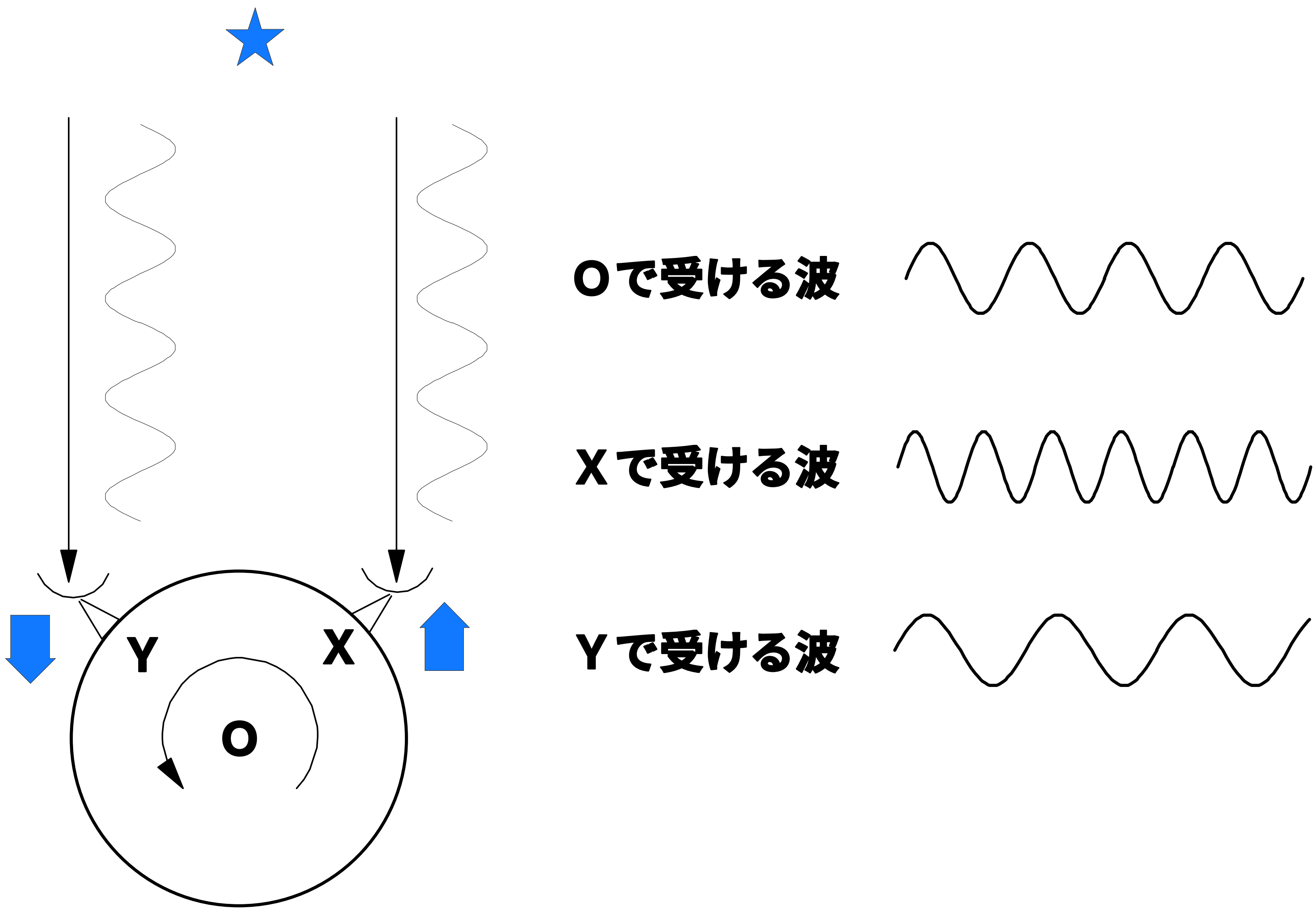




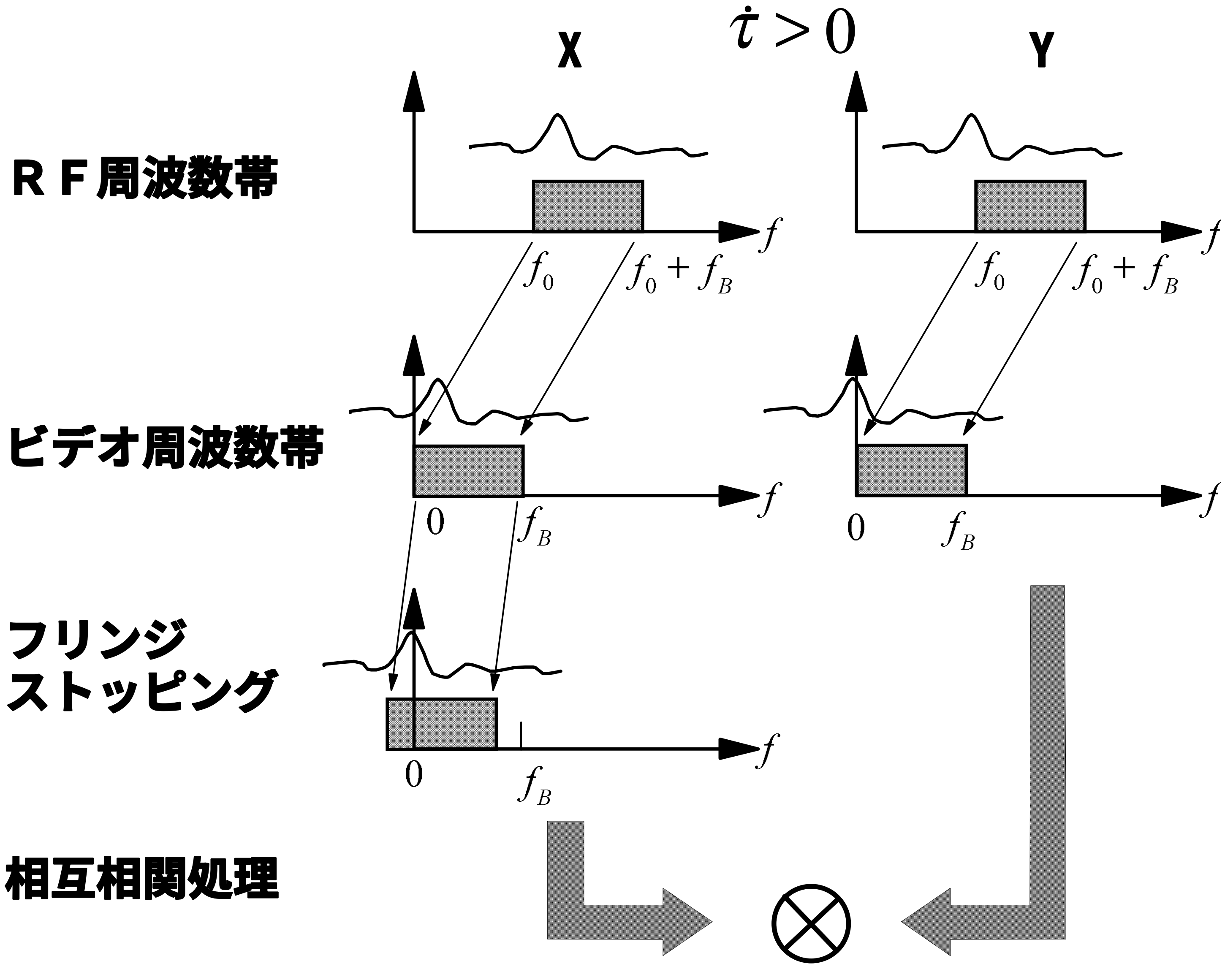
相関器ブロック図


X
Y
位相校正信号
位相検出部
位相校正信号
位相検出部
遅延追跡部
COS
相関積分部
SIN
相関積分部
SIN
COS
フリンジ回転
発生部

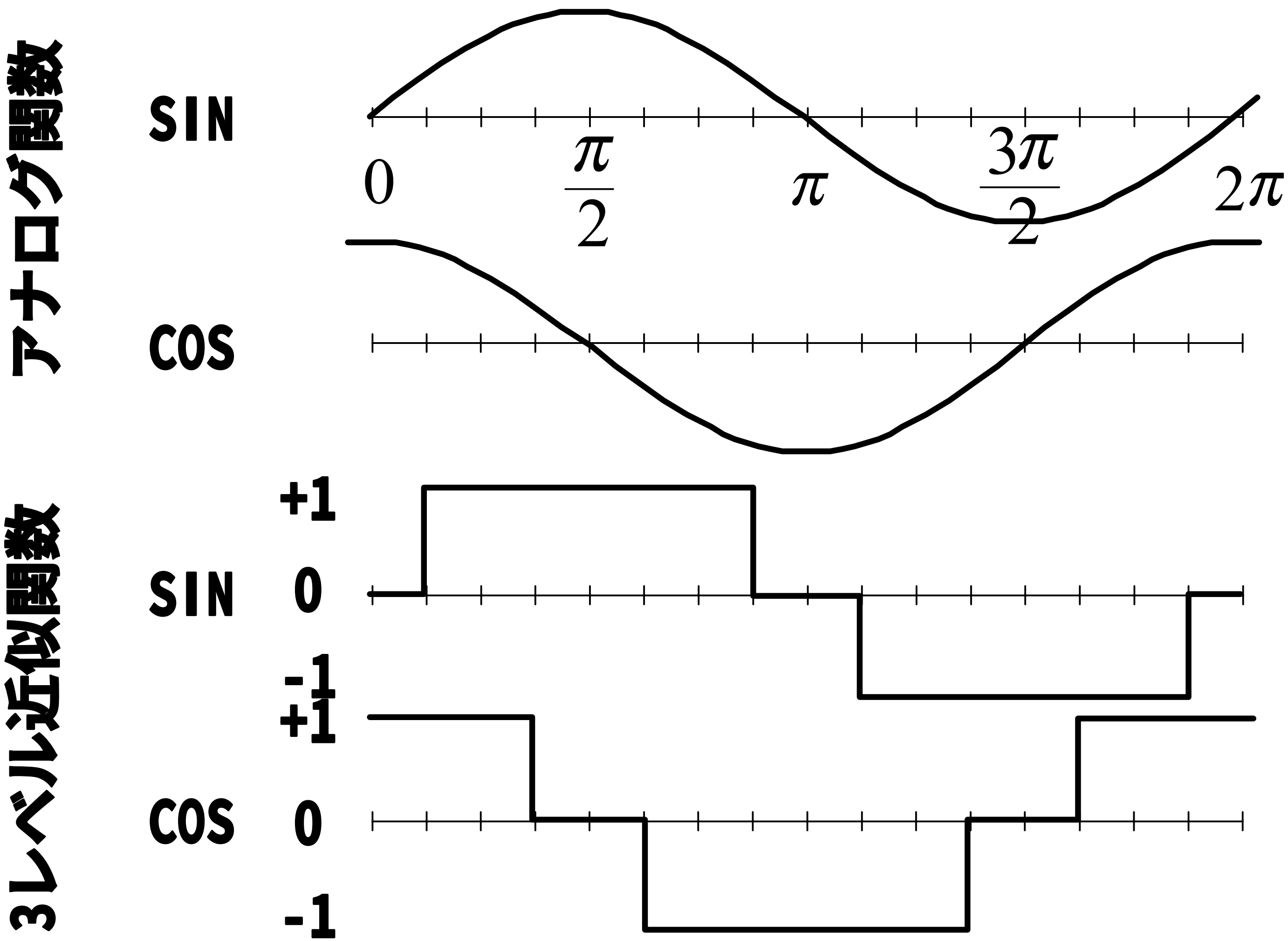
地球回転によって生じるドップラーシフト



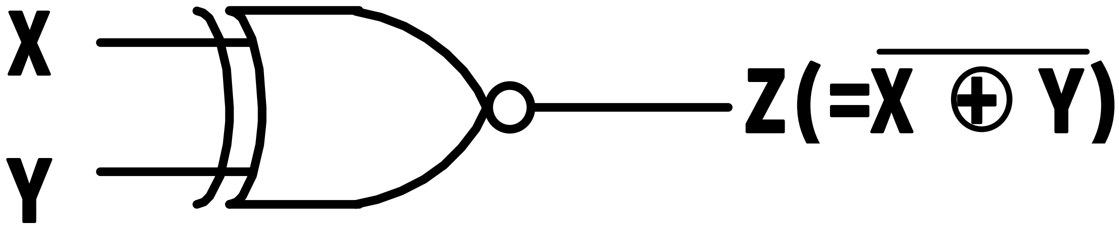
フリンジストッピングの定性的理解



三角関数の3レベル近似



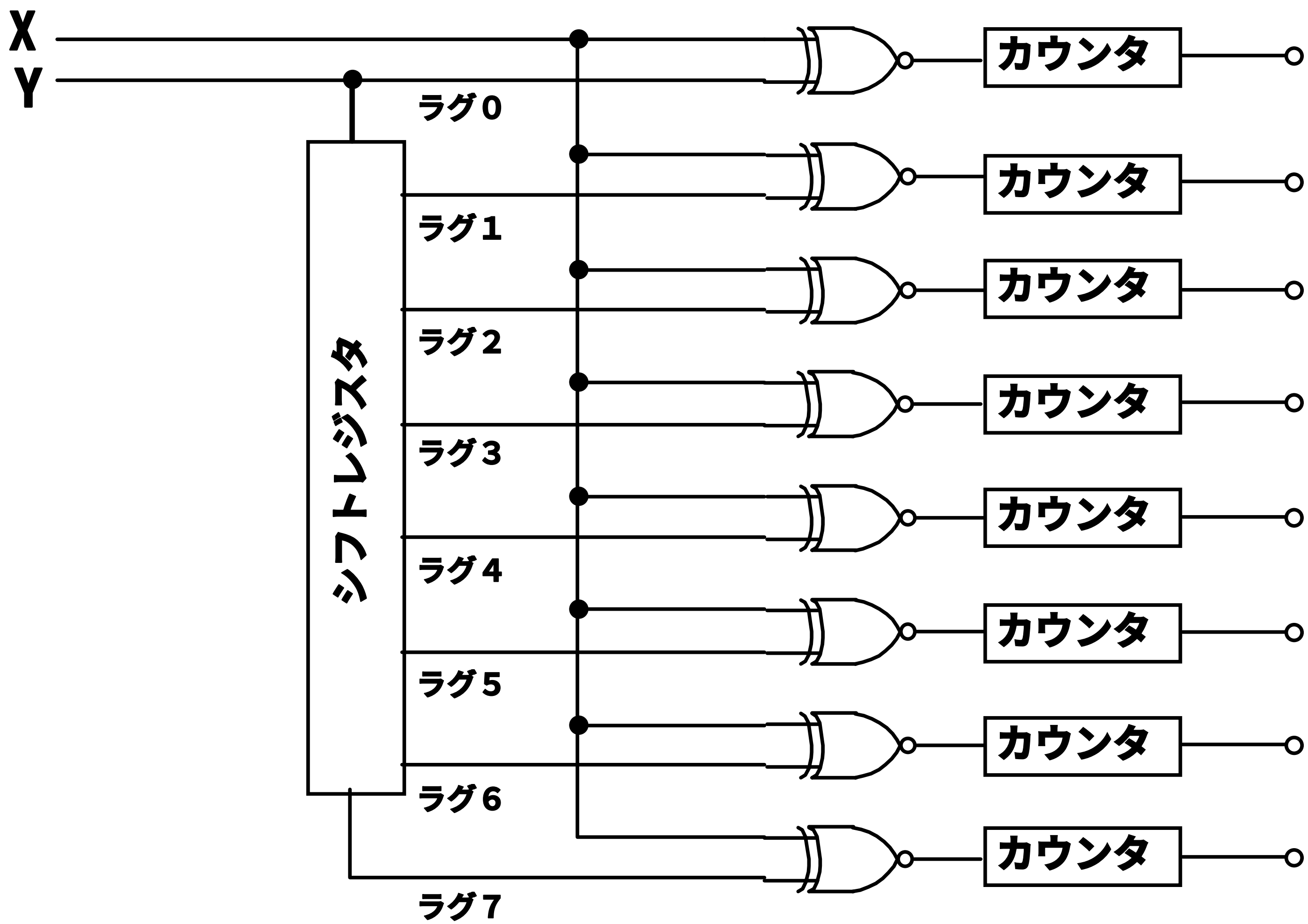
1ビット信号の相互相関



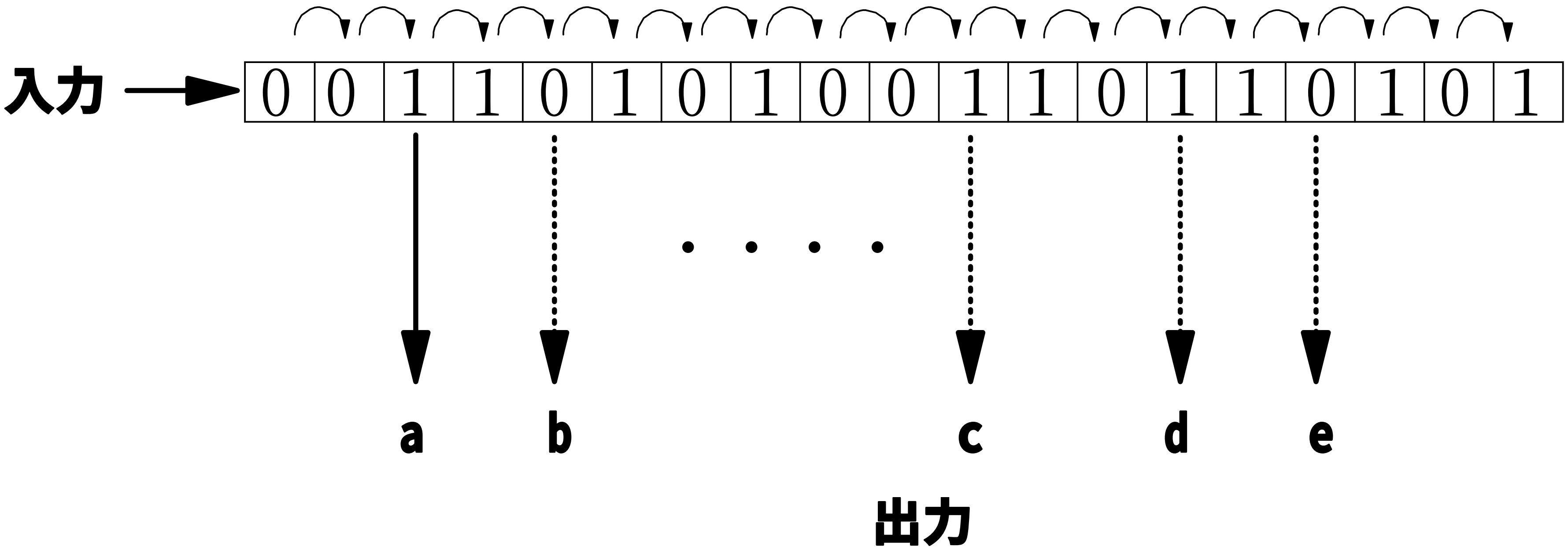
排他的NORの真理値表

X	Y	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

8ビットラグ相関器

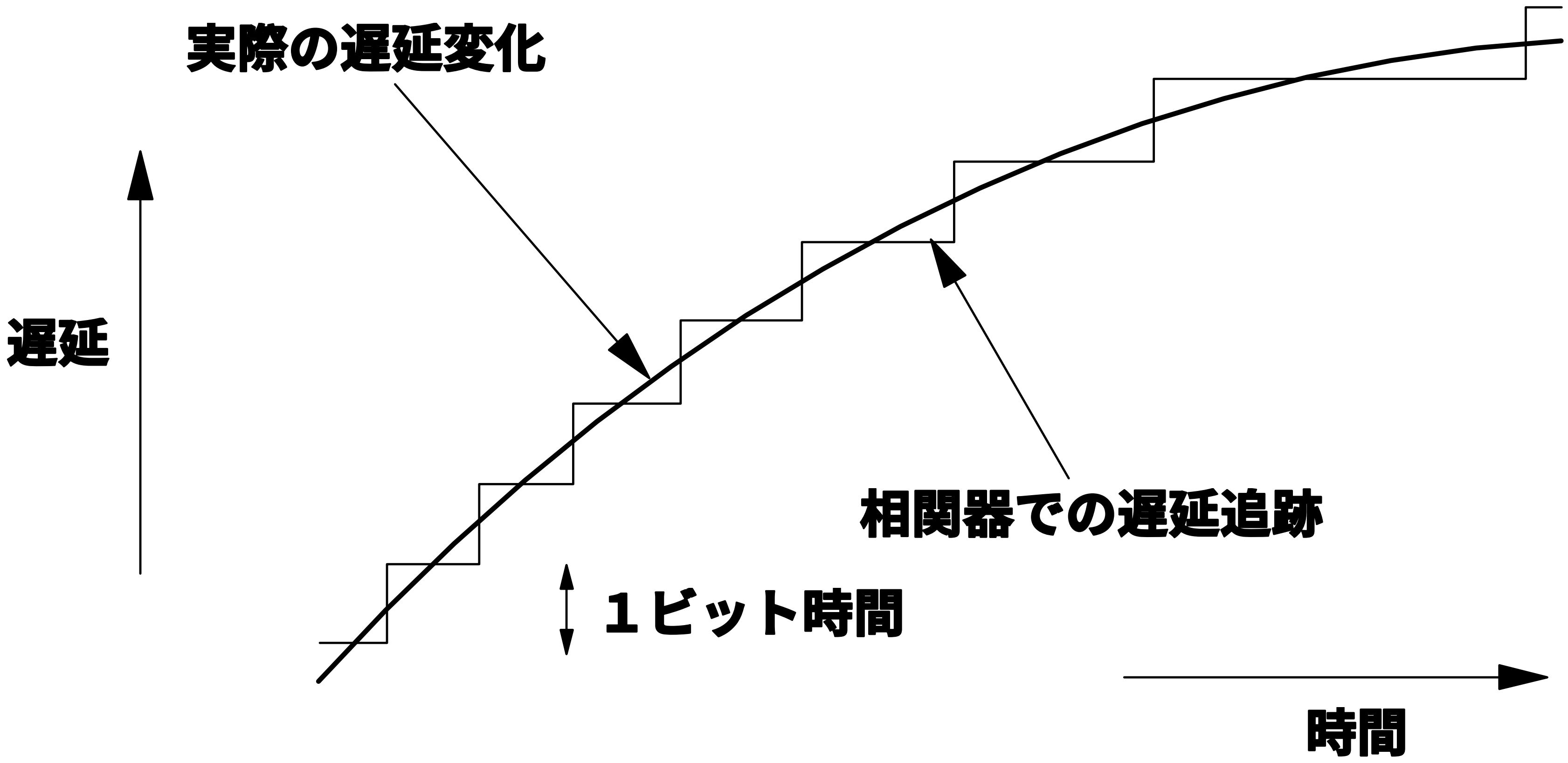

X
Y
シフトレジスタ
ラグ0
ラグ1
ラグ2
ラグ3
ラグ4
ラグ5
ラグ6
ラグ7
カウンタ
カウンタ
カウンタ
カウンタ
カウンタ
カウンタ
カウンタ
カウンタ

相関器での遅延追跡

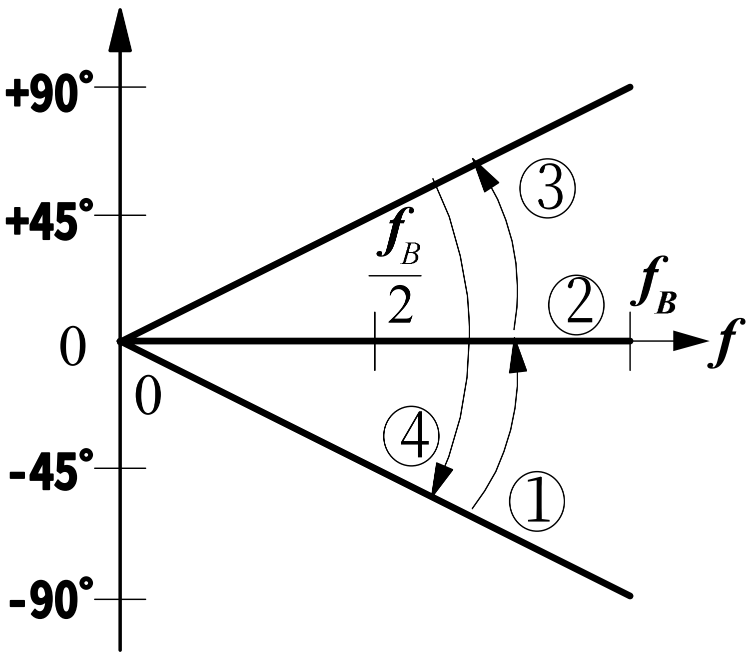


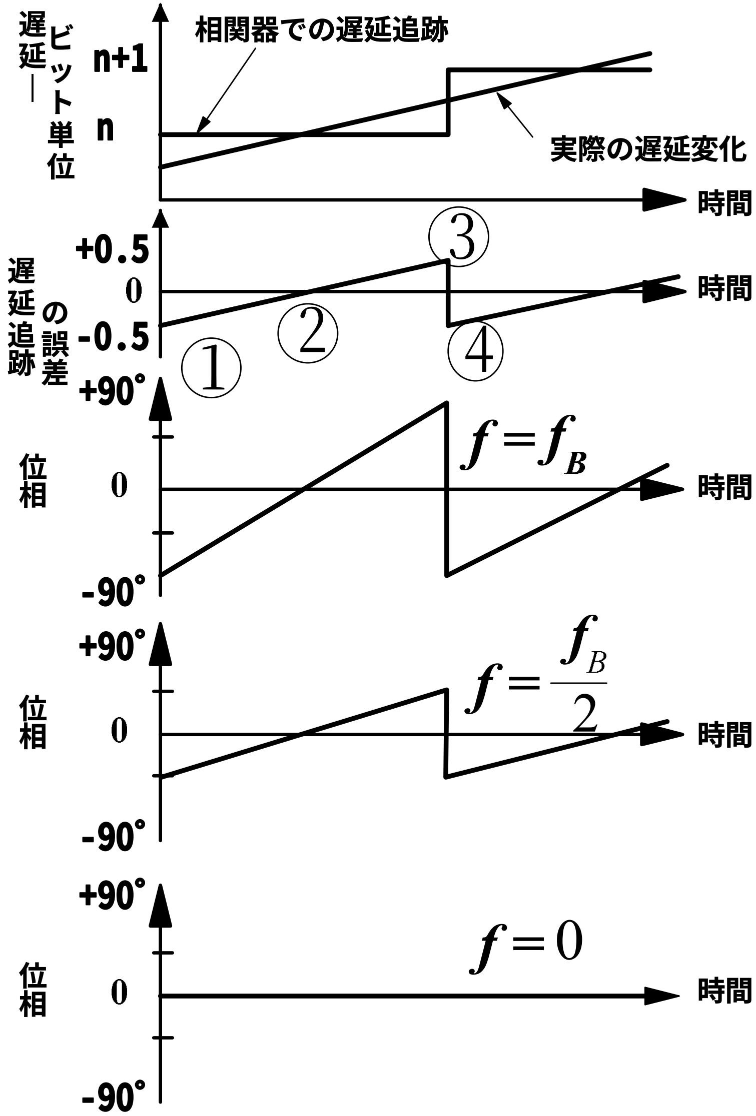
シフトレジスタの読み出しアドレスを変えることにより
遅延変化を追跡する

遅延追跡の誤差

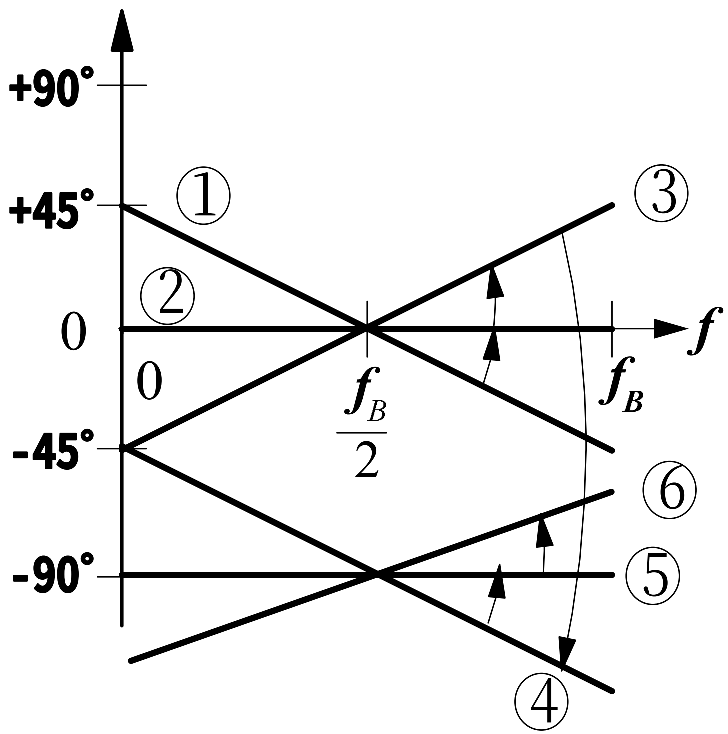


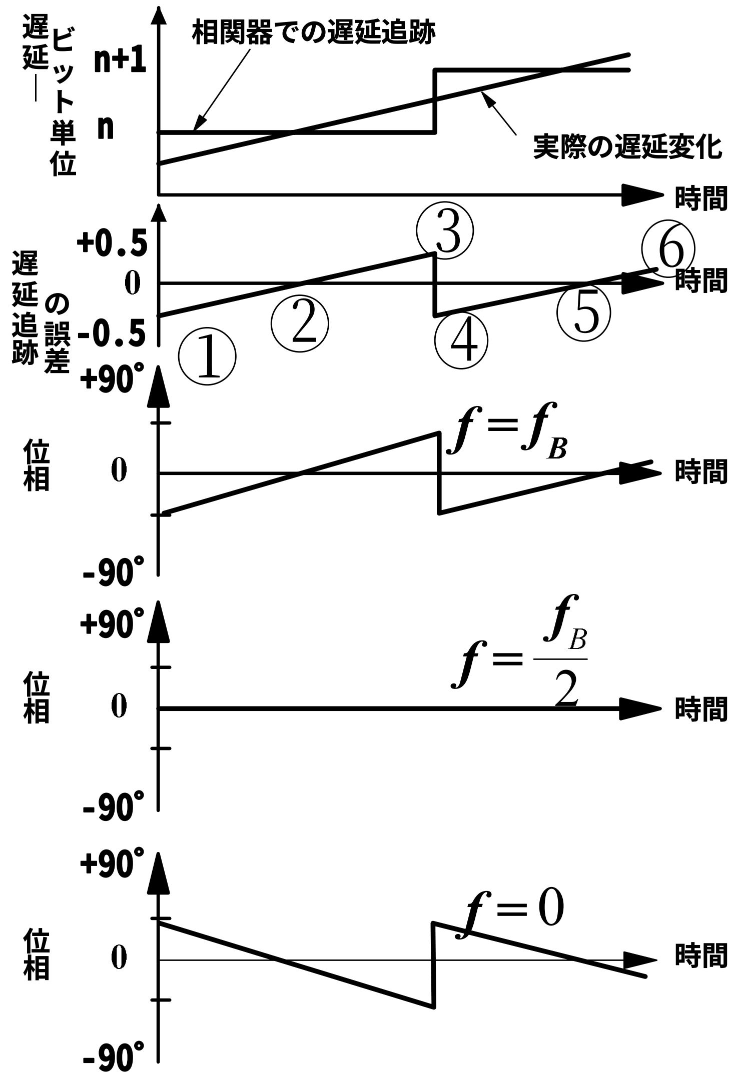
部分ビットの影響
（ベースバンドでフリンジストッピング）



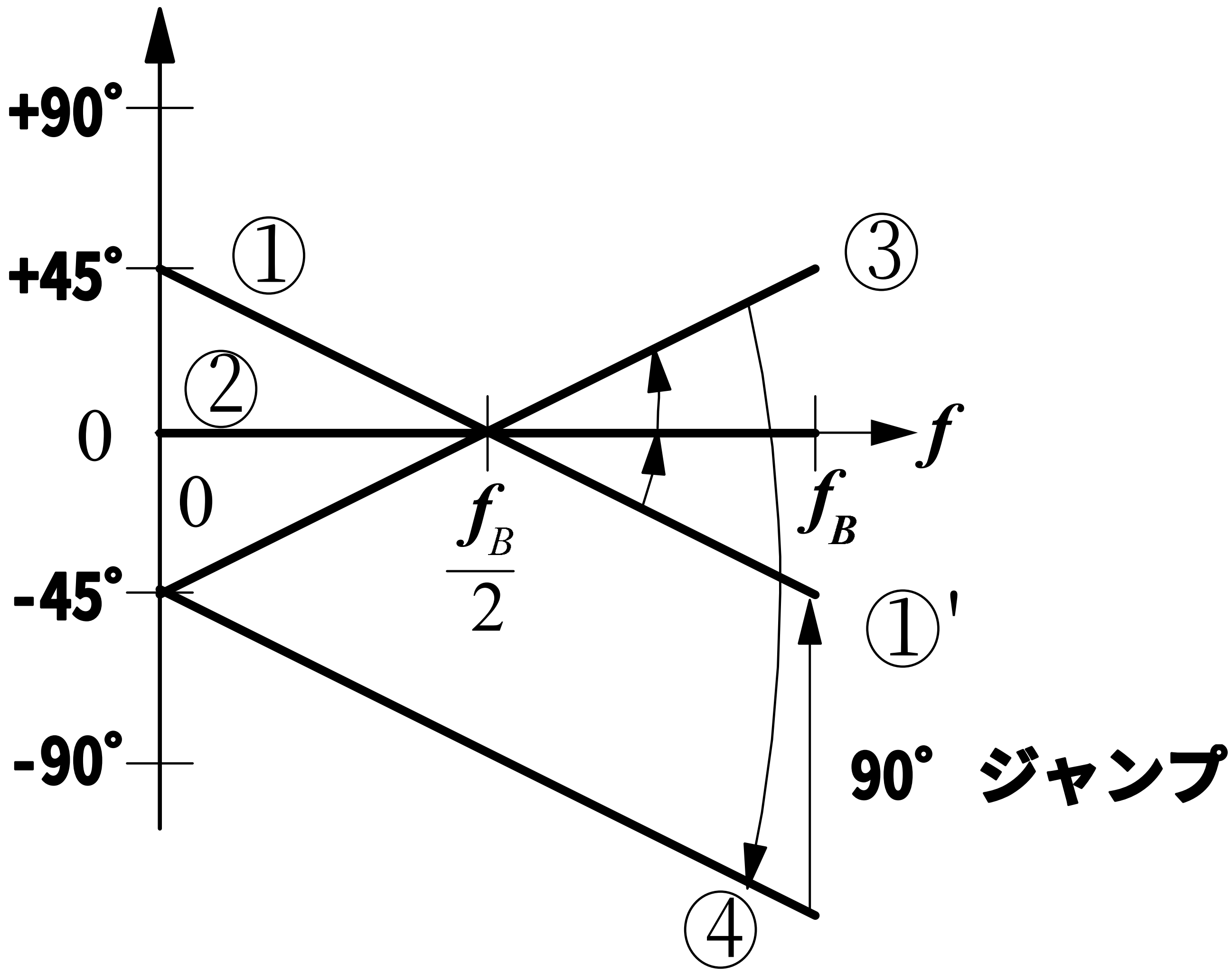


部分ビットの影響
（帯域中央でのフリンジストッピング）

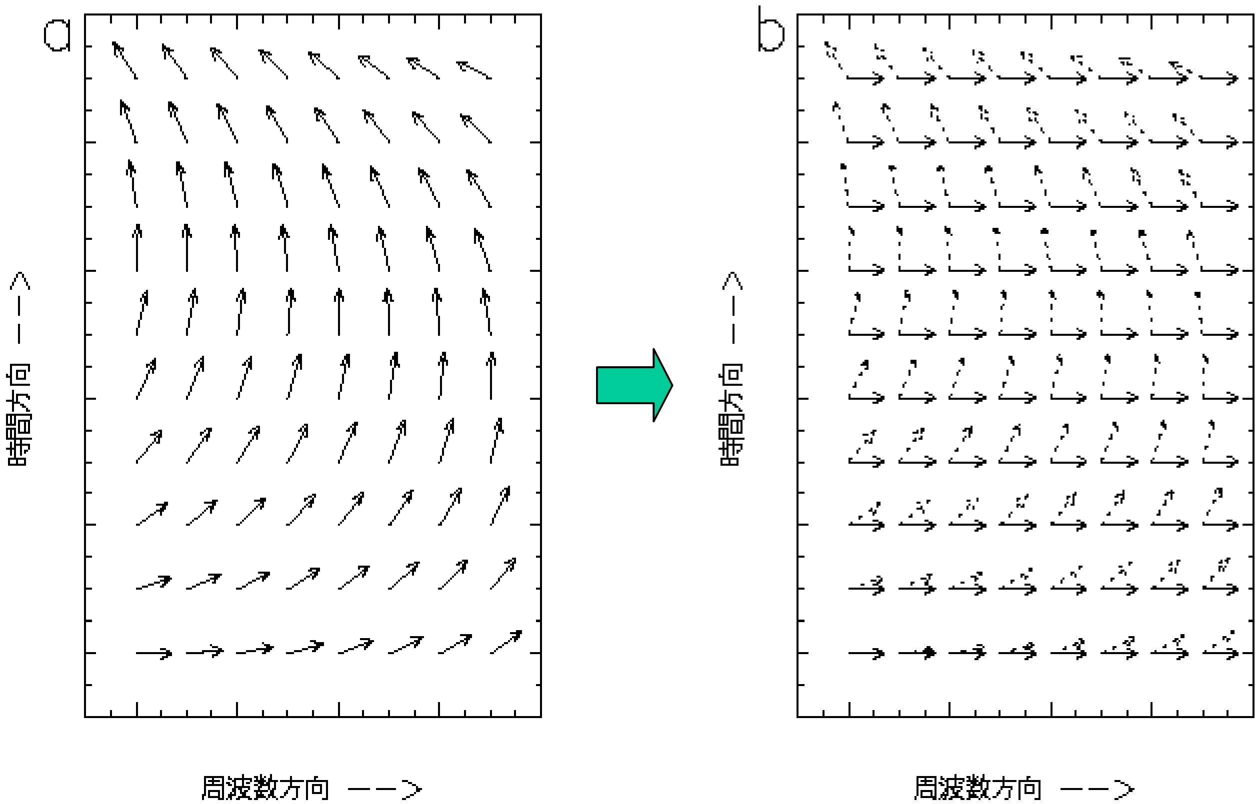




ビットシフト毎の90°位相ジャンプ



相関処理データから遅延時間残差および遅延時間変化率残差の求め方



$\Delta\tau$　周波数方向への位相回転を引き起こす

$\Delta\dot{\tau}$　時間方向への位相回転を引き起こす

粗決定サーチ

相関器出力（複素相互相関関数）$\xrightarrow[\text{FFT}]{}$ビデオクロススペクトル

$R(n,k,d)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $S_v(j,k,n)$

- n：周波数ch
- k：時間
- d：ラグ指標

- j：ビデオ帯域内周波数指標
- k：時間
- n：周波数ch

ビデオ帯域内で $\Delta\tau$　時間方向に $\Delta\dot{\tau}$　の補正を行い積分をすると、

$$F(n,\Delta\tau,\Delta\dot{\tau}) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left\{\frac{1}{j-1}\sum_{j=1}^{J-1} S_v(j,k,n)e^{-i2\pi f_j^v \Delta\tau}\right\}\cdot e^{-i2\pi f_0^n \Delta\dot{\tau}\Delta t k}$$

ここで f_j^v ：ビデオ帯域内の指標jに対応する周波数

f_0^n ：n-chのRF周波数　　Δt ：時間方向の間隔

粗決定サーチ関数

$$\boxed{F(\Delta\tau,\Delta\dot{\tau})=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|F(n,\Delta\tau,\Delta\dot{\tau})\right|}$$

$F(\Delta\tau,\Delta\dot{\tau})$ を最大化する

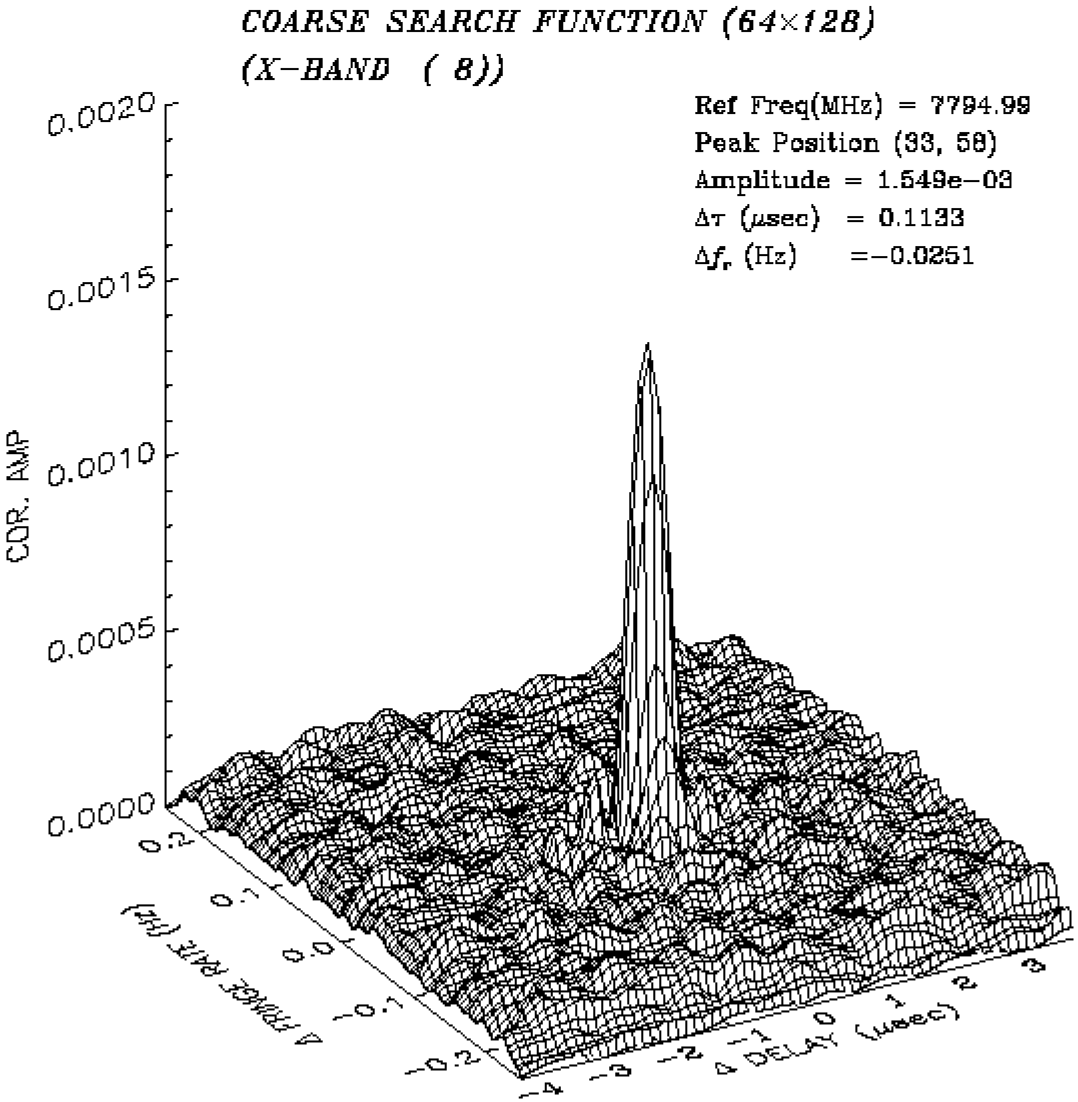
$\Delta\tau$, $\Delta\dot{\tau}$ を求めるのが粗決定サーチ

ところで、

$$F(n,\Delta\tau,\Delta\dot{\tau})=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left\{\frac{1}{j-1}\sum_{j=1}^{J-1}S_v(j,k,n)e^{-i2\pi f_j^v\Delta\tau}\right\}\cdot e^{-i2\pi f_0^n\Delta\dot{\tau}\Delta tk}$$

は、 $\Delta\tau$ および $f_0^n\Delta\dot{\tau}$ に関して二次元フーリエ変換の式

粗決定サーチ関数例


COARSE SEARCH FUNCTION (64×128)
(X-BAND (8))
Ref Freq(MHz) = 7794.99
Peak Position (33, 58)
Amplitude = 1.549e-03
Δτ (μsec) = 0.1133
Δf_r (Hz) =-0.0251
COR. AMP
0.0020
0.0015
0.0010
0.0005
0.0000
Δ FRINGE RATE (Hz)
0.2
0.1
0.0
-0.1
-0.2
Δ DELAY (μsec)
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3

精決定サーチ

準備として粗決定サーチで得た残差 $\Delta\tau_s$ $\Delta\dot{\tau}_s$
を用いて以下を計算

$$D_s(n,k) = \frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^{J-1} S_v(j,k,n)e^{-i2\pi(f_j^v \Delta\tau s + f_0^n \Delta\dot{\tau}_s \Delta t k)}$$

この $D_s(n,k)$ を用いて精決定サーチ関数を次式で定義

$$\boxed{D(\Delta\tau,\Delta\dot{\tau}) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} D_s(n,k)e^{-i(2\pi f_0^n \Delta\tau + \Delta\phi_n)}\right\}\cdot e^{-i2\pi f_0^n \Delta\dot{\tau}\Delta t k}}$$

ここで　$\Delta\phi_n = \phi_{nx} - \phi_{ny}$　n-ch 位相校正信号の位相差

精決定サーチ関数で{　}内の部分

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} D_s(n,k)e^{-i(2\pi f_0^n \Delta\tau + \Delta\phi_n)}$$

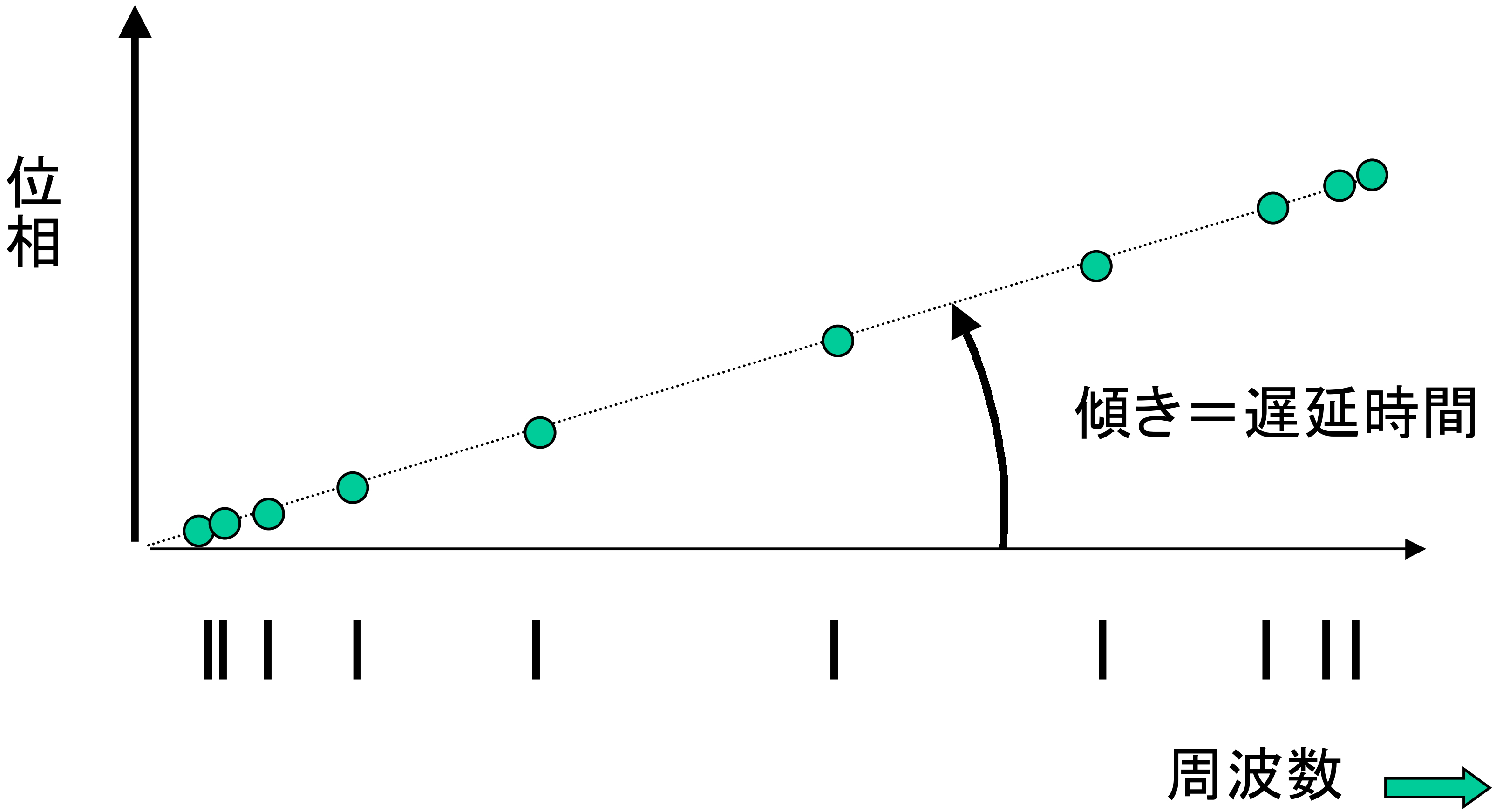
が、バンド幅合成と呼ばれる部分

バンド幅合成の原理

遅延時間の分解能　～　$\dfrac{1}{\text{周波数帯域幅}}$

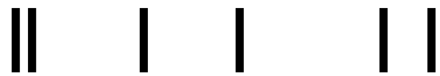
狭い帯域／ch　→　複数ch合成　→　等価的に広帯域を実現

周波数と位相差



周波数配置の例
（最小冗長配列に近い配列）

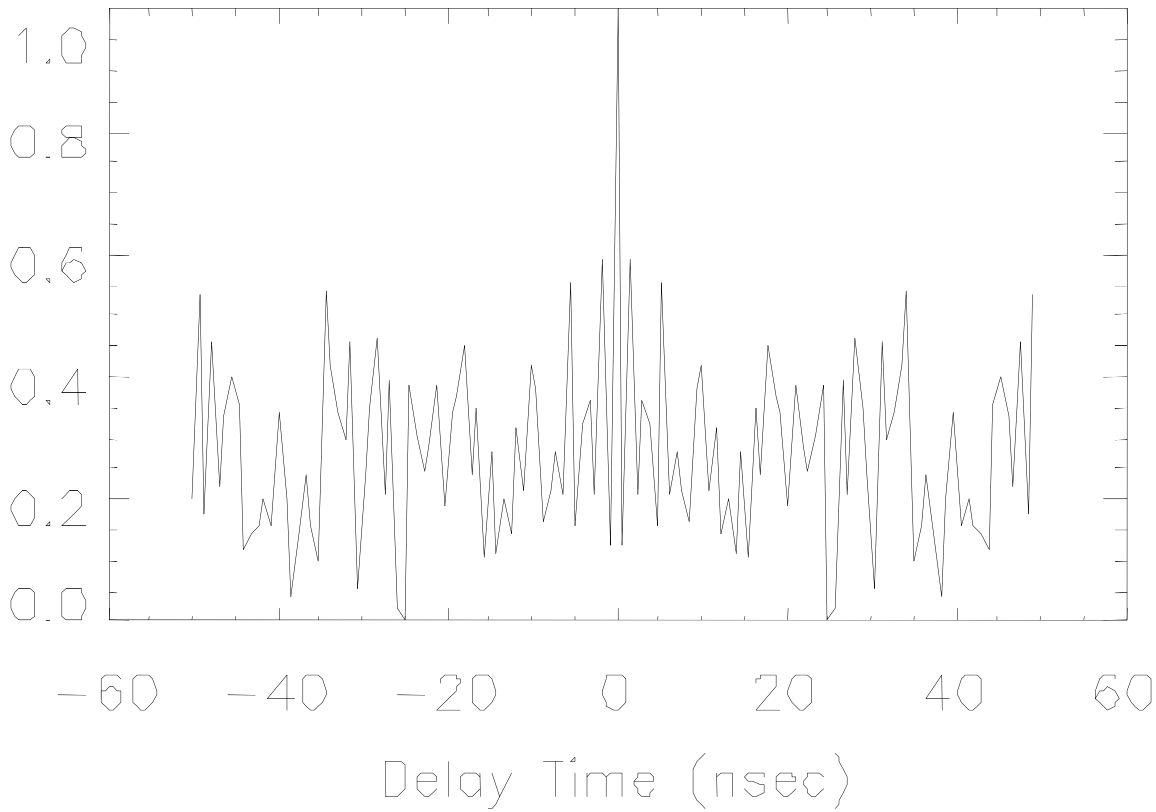
X-Band(MHz)	S-Band(MHz)
7714.99	2154.99
7724.99	2164.99
7754.99	2234.99
7814.99	2294.99
8034.99	2384.99
8234.99	2414.99
8414.99	
8524.99	
8564.99	
8584.99	



1 7 6 9 3

1 3 6 12 20 18 11 4 2

バンド幅合成関数（X-Band）



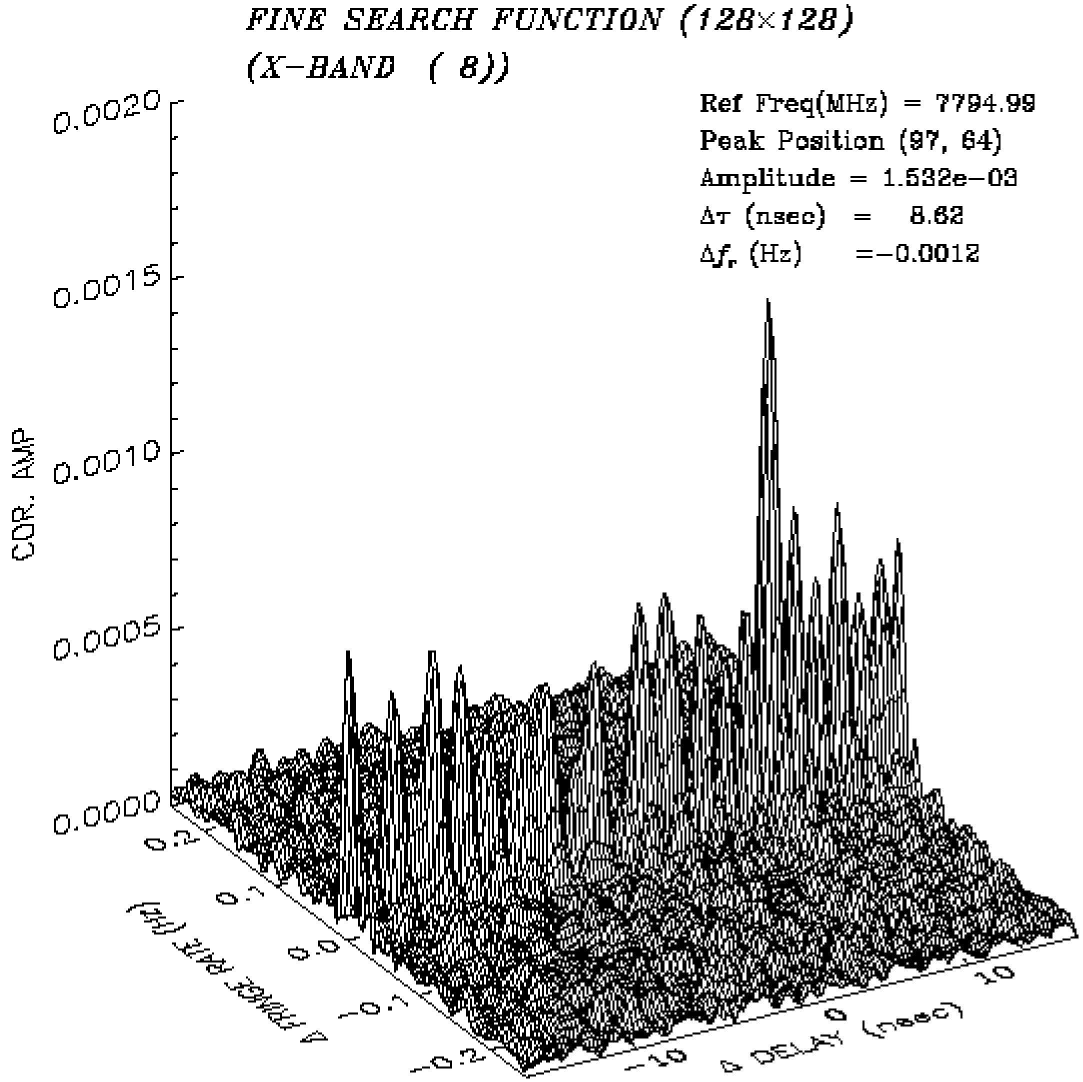
ところでバンド幅合成部分は

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} D_s(n,k) e^{-i(2\pi f_0^n \Delta\tau + \Delta\phi_n)}$$

$$= e^{-i2\pi f_0^1 \Delta\tau}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} D_s(n,k) e^{-i\phi_n} e^{-i2\pi(f_0^n - f_0^1)\Delta\tau}\right]$$

と変形することにより、[ ]内の計算にFFTが使用できる

精決定サーチ関数例


FINE SEARCH FUNCTION (128×128)
(X-BAND (8))
Ref Freq(MHz) = 7794.99
Peak Position (97, 64)
Amplitude = 1.532e-03
Δτ (nsec) = 8.62
Δf_r (Hz) =-0.0012
0.0020
0.0015
0.0010
0.0005
0.0000
COR. AMP
0.2
0.1
0.0
-0.1
-0.2
Δ FRINGE RATE (Hz)
-10
0
10
Δ DELAY (nsec)

理論誤差等

信号対雑音比 $SNR = \rho_0 \sqrt{2BT}$

フリンジ位相誤差 $\sigma_\phi = \dfrac{1}{SNR}$

粗決定遅延誤差 $\sigma_{\tau s} = \dfrac{\sqrt{3}}{\pi B \cdot SNR}$

精決定遅延誤差 $\sigma_{\tau m} = \dfrac{1}{2\pi\sigma_f \cdot SNR}$

等価帯域幅 $\sigma_f = \sqrt{\dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} N(f_n - \bar{f})^2}$

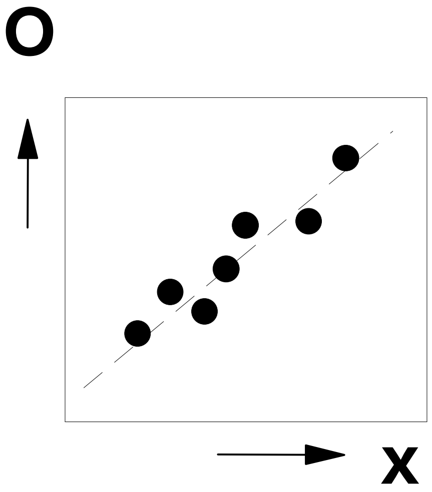
遅延変化率誤差 $\sigma_{\dot{\tau}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\pi f T \cdot SNR}$

基線解析

最小二乗推定法

（パラメータフィッティング）

観測された値：Ｏ
理論的に計算される値：Ｃ



Ｃは色々なパラメータを含む

例えば　Ｃ＝ａｘ＋ｂ

ａ，ｂはパラメータ

（Ｏ－Ｃ）を残差と呼ぶ

残差の二乗和が最小となるように
Ｃのパラメータを調整する

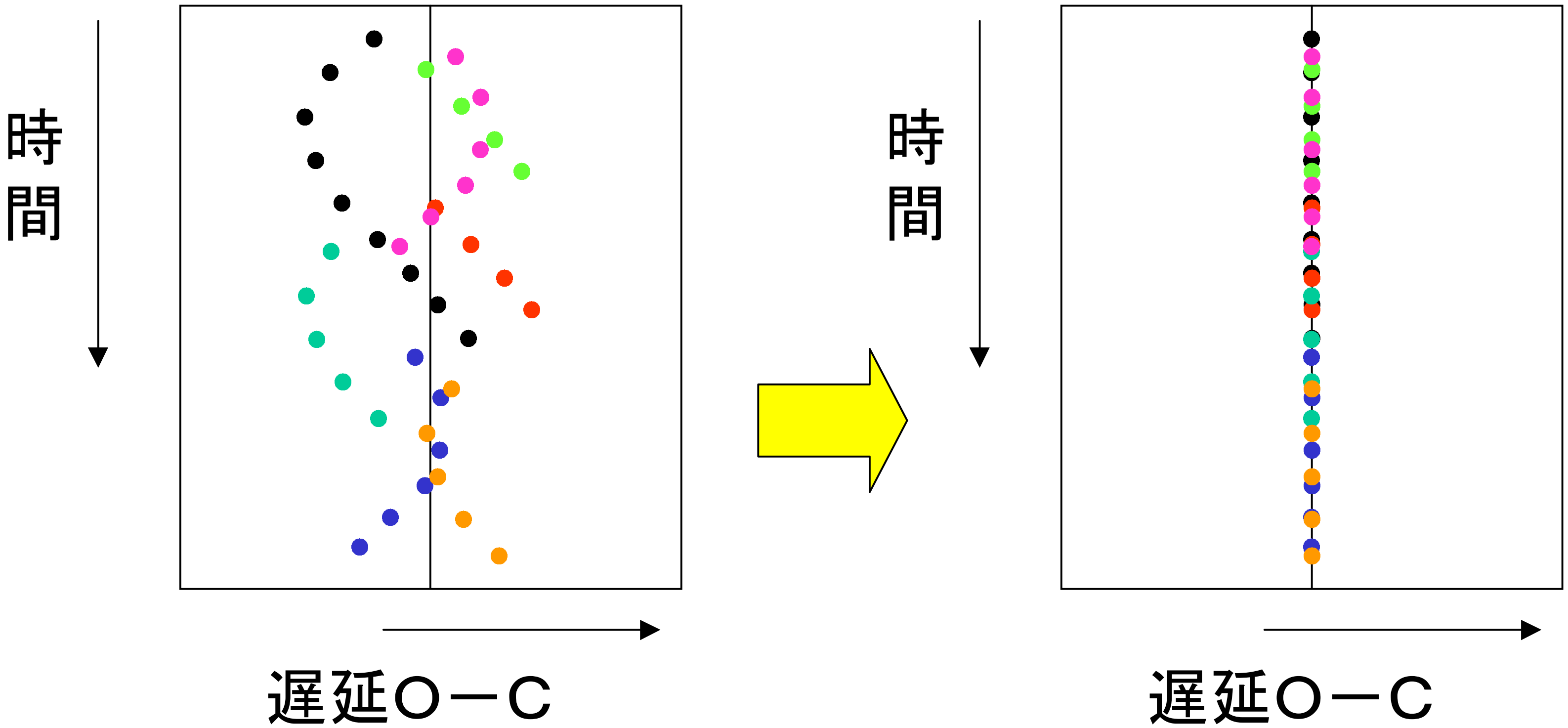
ＶＬＢＩ観測形態

スキャン：　電波星１回の観測（２－３分）
セッション：　１連のスキャンの集合

測地目的では

セッションの長さ：　２４時間
スキャン数　　　：　４００～６００
電波源　　　　　：　　１０数個

基線解析



局位置を調整して・・

参考文献

全般

高橋冨士信、近藤哲朗、高橋幸雄、“VLBI技術”、オーム社、１９９７

ＶＬＢＩ

Whitney, A.R., “Precision geodesy and astrometry bia very-long-baseline interferometer”, Ph.D.Thesis, M.I.T., 1974

Sovers, O.J., J.L.Fanselow, and C.S.Jacobs, “Astrometry and geodesy with radio interferometry: experiments, models, results”, Rev.Mod.Phys., Vol.70, No.4, 1998

フーリエ変換

Bracewell, R.N., “The Fourier transform and its applications”, McGraw-Hill, 1978.

宮川洋、今井秀樹（共訳）, “高速フーリエ変換”, 科学技術出版社、１９７９

信号解析、処理

Van Vlck, J.H. and D. Middleton, “The spectrum of clipped noise”, Proc. IEEE, 54, 3, pp.2-19, 1966.

日野幹雄、“スペクトル解析”, 朝倉書店、１９７７

得丸英勝（他共訳）, “ランダムデータの統計的処理”, 培風館, １９７６

中川徹、小柳義夫, “最小二乗法による実験データ解析”, 東京大学出版会、１９８２

南茂夫（編著）, “科学計測のための波形データ処理”, ＣＱ出版社, １９８６