福島登志夫　講義ノート　（1991年）

No. 0-1

Date

§0.

<Text book>

(標準)

1. Essential Relativistic Celestial Mechanics,
   1991, V.A. Brumberg, Adam Hilgar, Bristol.
2. Theory and Experiment in Gravitational Physics
   1981, C.M. Will, Cambridge Univ. Press, Cambridge
   9@C
3. Gravitation
   1973, Misner, Thorne & Wheeler, W.H. Freeman & Co. New York
4. 邦 The Theory of Fileds
   1962 Landau & Lifshitz Phys. Math. Publ., Moscow
5. 邦 The Theory of Relativity 「場の古典論」東京図書
   「相対性理論」みすず書房
   1952, C. Møller, Oxford Univ. Press, Oxford

読物

1. 邦 Was Einstein Right?
   ○ 1986, C.M. Will Basic Books, New York
   (邦)「アインシュタインは正しかったか」TBSブリタニカ 1989
   ↖ おもしろい (うらはなし)

難解

1. Relativity : the special theory 1955
2. : the general theory 1960
   J.L. Synge, North-Holland Publ. Co., Netherlands

<レポート>

3回 ~~月末, 年末, 学期末~~ 提示 締切
3 → A 10月末 11月末
2 → B 11月末 年始
C 年末 学期末
D

宛先:

time delay 等の評価
← 有限 VLBI eq の導出
文献の英訳
(一部の)

一般相対論的位置天文学・天体力学

§1 Why General Relativity ?

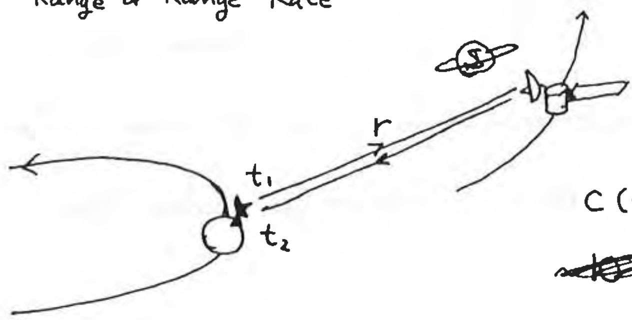
<New Obs. Tech.>

0) 時計 10^{-15}

H-maser, Rb, Cs, Pulsar(?)

1) R & RR Viking, Voyager, (Magellan, Galileo, Cassini, …)

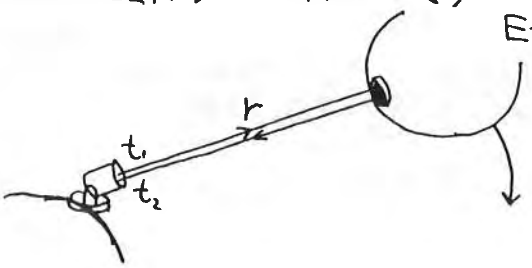
Range & Range Rate



$$c(t_2 - t_1) = r + \cdots$$

$6\,\mathrm{m} / 0.7\,\mathrm{AU} \sim 6\,\mathrm{m}/10^{11}\,\mathrm{m} \sim 10^{-11}$

2) LLR / SLR ☾, Lageos I, (II), Ajisai, Starlette, Etalon I, II, GEOIK 1, 2, 3, …



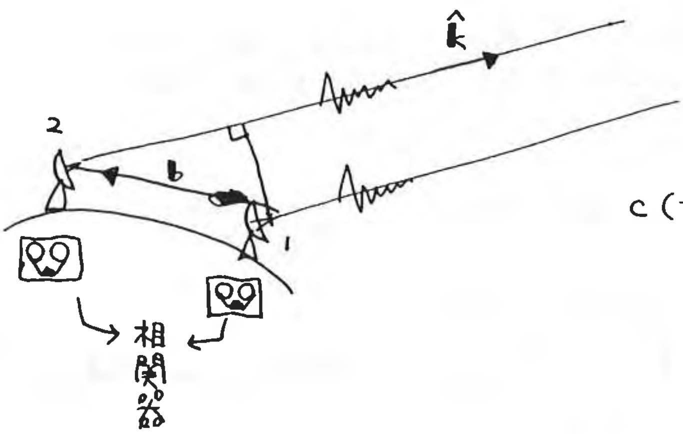
$$c(t_2 - t_1) = r + \cdots$$

$1\,\mathrm{mm} / 10^4\,\mathrm{km} \sim 10^{-10}$

3) VLBI

Very Long Baseline Interferometry

☆ quasar, AGN, radio*, ..

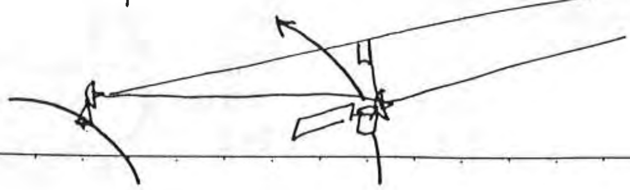


$$c(t_2 - t_1) = -\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{k}} + \cdots$$

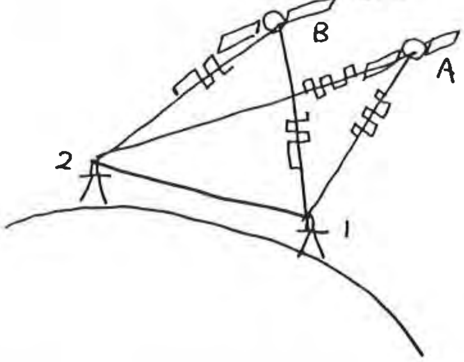
$1\,\mathrm{cm} / 10^4\,\mathrm{km} \sim 10^{-9}$

3.5) Space VLBI VSOP (1995 ?)

$1\,\mathrm{cm} / 10^5\,\mathrm{km} \sim 10^{-10}$



4) GPS / GLONASS

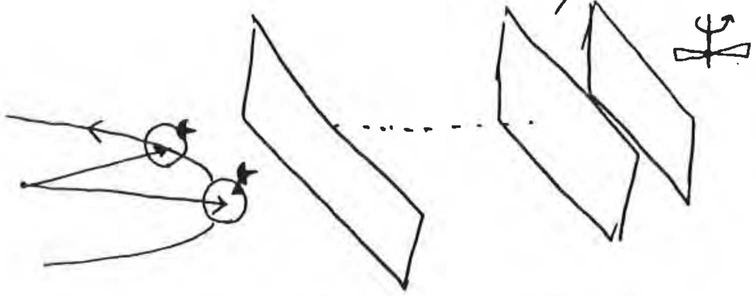


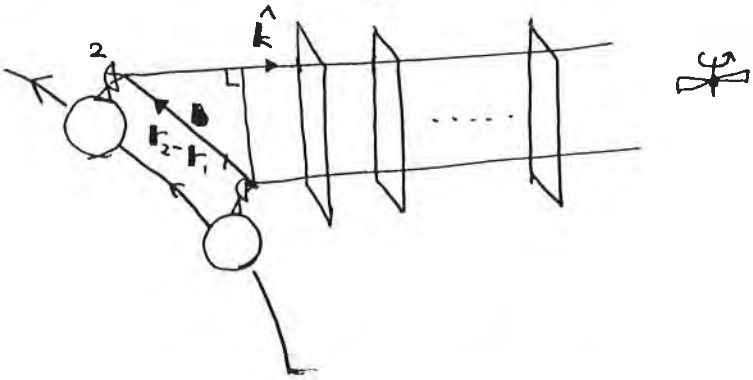
2重差

$$c(t_{2A} - t_{1A} - t_{2B} + t_{1B})$$
$$= r_{2A} - r_{1A} - r_{2B} + r_{1B} + \cdots$$

$10^{-7} \sim 10^{-8}$
$1_{mm}/100_{km} \sim 100_{km}$

5) Pulsar Arrival Time Analysis





$$c(t_2 - t_1) = -(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\cdot\hat{\mathbf{k}} + \cdots$$

? $\frac{10^{-6}}{10^{8}\,\mathrm{sec}} \sim 10^{-14}$

6) 逆LR, SSLR
Sat-Sat-LR

7) SCG
Super Conducting Gravimeter

< Order of Mag. >

			$V_{rot\oplus}$	$V_\oplus$	$V_{esc\odot}$
ニュートン力学		1			
特殊相対論	光行差 ドップラー偏位	$\frac{v}{c}$	10^{-6}	10^{-4}	3×10^{-3}
一般相対論	光の曲がり 〃 遅れ 近点移動 ⋮	$\left(\frac{v}{c}\right)^2$	10^{-12}	10^{-8}	10^{-5}
		$\left(\frac{v}{c}\right)^3$		10^{-12}	3×10^{-8}
		$\left(\frac{v}{c}\right)^4$		10^{-16}	10^{-10}
	重力波	$\left(\frac{v}{c}\right)^5$		10^{-20}	3×10^{-13}

<方法論>

弱い重力場の近似

ポスト・ニュートン　(一部 ポスト・ポスト・ニュートン)

<手法>

1次摂動論　(まれに 2次)

§2 一般相対論以前 (質点の力学の範囲)

1) ニュートン力学

質量 $m = \int \rho(x)\, d^3x$

時空 (t, x)

運動量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, $\mathbf{v} = \dfrac{dx}{dt}$
速度

不変量 $(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2$ 一定 ⇨ 3次元直交変換 3+3パラ

空間反転 3
or
鏡映 $\underset{\sim}{M}_x\begin{pmatrix}-1 & & \\ & +1 & \\ & & +1\end{pmatrix}, \underset{\sim}{M}_y, \underset{\sim}{M}_z$
&
回転 $\underset{\sim}{R}_x^{(\theta)}\begin{pmatrix}+1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \underset{\sim}{R}_y(\theta), \underset{\sim}{R}_z(\theta)$
3パラ

$R_i{}^{\tilde a}\delta_{\tilde a\tilde b}R_j{}^{\tilde b} = \delta_{ij}$

$(dx)^2 = (dx')^2$ $R^T = R^{-1}$ を要請する

運動の法則 Ⅰ $\mathbf{F} = 0$ ⇨ $x(t) = x_0 + \mathbf{v}_0 t$

Ⅱ $\dfrac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$

Ⅲ $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$

2) 万有引力 (ニュートンの重力理論)

2質点

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{G m_1 m_2}{r_{12}{}^3}\mathbf{r}_{12}$$

m_1 m_2 $\mathbf{F}_{12}$ $\mathbf{r}_{12}$

$\mathbf{r}_{12} = x_1 - x_2$

場

$$\mathbf{F} = m\frac{\partial U}{\partial x}$$

U: 力関数 force function
= −(ポテンシャル)

場の方程式
Poisson

$$\Delta U = 4\pi G\rho(x) \quad \cdots \text{linear}$$

$$U(x) = \int \frac{G\rho(x')}{|x - x'|} d^3x'$$

単連結有限体

$\dfrac{1}{r}$ → (球面)調和展開 $e^{im\varphi}$

基底: $r^{-(n+1)}(\cancel{C_{nm}\cos m\varphi + S_{nm}\sin m\varphi})P_n^m(\cos\theta)$

$$U = \frac{GM}{r} + \frac{GM}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n} P_n^m(\sin\beta)(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)$$

3) 特殊相対論

時空 spacetime　$x^\mu = (x^0 \equiv ct,\ \overbrace{x^1, x^2, x^3}^{\boldsymbol{x}})$

肩つき添字　・ギリシャ文字　$0 \to 3$
　　　　　　　ラテン　　　　$1 \to 3$

不変量

$$(\Delta s)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta \boldsymbol{x})^2$$
$$= \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

$\left(\begin{array}{l} \Delta t = t - t_0 \\ \Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \end{array} \text{ etc.}\right)$

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & 0 \\ & & +1 & \\ 0 & & & +1 \end{pmatrix}$$

Einstein の規約 $\underbrace{\sum_{\mu,\nu=0}^{3}}_{\text{落とす}} \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$

$\underbrace{\text{repeated}}_{\text{pair of}}$ indices ····· $\overbrace{\text{summation}}^{\text{implicit}}$ over $0 \to 3$　$\mu, \nu, \cdots$
$1 \to 3$　$i, j, \cdots$

・$A^{jj} \neq \sum_{j=1}^{3} A^{jj}$

$A^{j}{}_{j} = \sum_{j=1}^{3} A^{j}{}_{j}$

(対応する座標変換　ポアンカレ変換
$x^{\bar{\alpha}'} = X^{\bar{\alpha}'} + L_\mu{}^{\bar{\alpha}'} x^\mu$)
定数

この不変量 ⟶ $\overset{\text{座標差の}}{\text{変換}}$ ローレンツ変換という。

つまり　$\Delta x^\mu \xrightarrow{L_\mu{}^{\bar{\alpha}'}} \Delta x^{\bar{\alpha}'}$

座標系が違うので
違う添字で表す。
$\mu', \tilde{\alpha}, \hat{\beta}, \bar{\gamma}$, など

このとき

$$(\Delta s)^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$
$$= \eta_{\bar{\alpha}'\bar{\beta}'} \Delta x^{\bar{\alpha}'} \Delta x^{\bar{\beta}'}$$

となるような変換

$$\Delta x^{\bar{\alpha}'} = L_\mu{}^{\bar{\alpha}'} \Delta x^\mu$$

一般に $L_\mu{}^{\alpha}$: 4×4 行列

前頁 ↑ 10/23

▷ $L_\mu{}^{\tilde\alpha}$ はどんな行列か？

$$(\Delta S)^2 = \eta_{\mu\nu}\,\Delta x^\mu \Delta x^\nu = \eta_{\tilde\alpha\tilde\beta}\,\Delta x^{\tilde\alpha}\Delta x^{\tilde\beta}$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta x^{\tilde\alpha} &= L_\mu{}^{\tilde\alpha}\Delta x^\mu \\ \Delta x^{\tilde\beta} &= L_\nu{}^{\tilde\beta}\Delta x^\nu\end{aligned}\right)$$ を代入して

$$\eta_{\mu\nu}\,\Delta x^\mu \Delta x^\nu = \eta_{\tilde\alpha\tilde\beta}\,L_\mu{}^{\tilde\alpha}L_\nu{}^{\tilde\beta}\,\Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

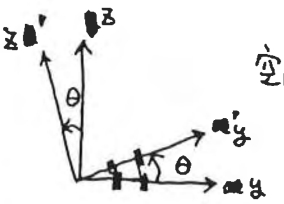
Δx^μ は任意 $\Rightarrow$ $$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\tilde\alpha\tilde\beta}\,L_\mu{}^{\tilde\alpha}L_\nu{}^{\tilde\beta}$$

$L_\mu{}^{\tilde\alpha}$ は 一種の 4次元 直交？行列（群） ローレンツ群 10成分 or 10-パラメーター

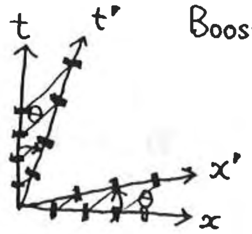
$$10 = 4 + 3 + 3$$

反転 ↑ 4、空間回転 ↑ 3、Boost ↑ 3

反転 $M_t = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ 0 & & & +1 \end{pmatrix}$, $M_x = \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & +1 & \\ 0 & & & +1 \end{pmatrix}$, …



空間回転 $R_x(\theta) = \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & +1 & & \\ & & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, …



Boost $L_x(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & & \\ & & +1 & \\ 0 & & & +1 \end{pmatrix}$, …　対称

$$\tan\theta = \tanh\alpha = \beta = \frac{v}{c}$$

↑ ある種の回転角

$$\cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \gamma$$

γ_{PPN} とは異

$$\sinh\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\beta$$

問　任意方向のBoost行列を導け

I i) S'系の原点はS系で速度 $\boldsymbol{v}$
　($\Delta x' = 0$ で $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$)

ii) $(\Delta s)^2$ 不変

iii) L は場所に依存しない

iv) $L^{-1}(\boldsymbol{v}) = L(-\boldsymbol{v})$

II) x方向のBoostを回転する。

S'系の原点をS系から見ると
($\Delta x' = 0$) で $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \boldsymbol{v}$

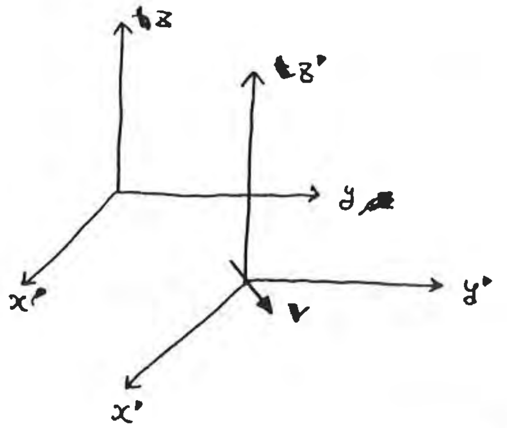
No. 2-4

Date

(ヒント　メラー p17 は x方向のBoostについて詳しく導いている)

→ レポート　提出 11月末 (どちらか)

▷ Boost　(任意方向)



S' 系が S系に対して 速度 $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{n}$ で動いている。

$$L_{\mu}{}^{\alpha'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\,{}^t\frac{\boldsymbol{v}}{c} \\ -\gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c} & \underset{\sim}{1} + (\gamma-1)\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} \end{pmatrix}$$

ただし $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$　　$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{v}}{v}$

$\otimes$ テンソル積　$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})_{ij} = a_i b_j$

逆変換 : $\boldsymbol{v} \to -\boldsymbol{v}$

$L_{\mu}{}^{\alpha'}(\boldsymbol{v})$

$$L_{\alpha'}{}^{\mu}(\boldsymbol{v}) = L_{\alpha}{}^{\mu'}(-\boldsymbol{v})$$

$$\Delta x^{\alpha'} = L_{\mu}{}^{\alpha'}\Delta x^{\mu}$$

$$\begin{cases} c\Delta t' = \gamma\,(c\Delta t - \boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{x}) \\ \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{x}}{c^2}\right) \\ \Delta\boldsymbol{x}' = -\gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot c\Delta t + \Delta\boldsymbol{x} + (\gamma-1)(\boldsymbol{n}\cdot\Delta\boldsymbol{x})\boldsymbol{n} \\ \quad\;\; = \Delta\boldsymbol{x} - \gamma\boldsymbol{v}\Delta t + (\gamma-1)(\boldsymbol{n}\cdot\Delta\boldsymbol{x})\boldsymbol{n} \end{cases}$$

逆

$$\begin{cases} \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{x}'}{c^2}\right) \\ \Delta\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{x}' + \gamma\boldsymbol{v}\Delta t' + (\gamma-1)(\boldsymbol{n}\cdot\Delta\boldsymbol{x}')\boldsymbol{n} \end{cases}$$

☆ S'の原点の運動
$\Delta\boldsymbol{x}' = 0$　⇒　$\begin{cases} \Delta t = \gamma\Delta t' \\ \Delta\boldsymbol{x} = \gamma\boldsymbol{v}\Delta t' = \boldsymbol{v}\Delta t \end{cases}$

ゆえに　S系で S'系の原点は $\frac{\Delta\boldsymbol{x}}{\Delta t} = \boldsymbol{v}$ で動いている。O.K.

☆ ~~合成則~~

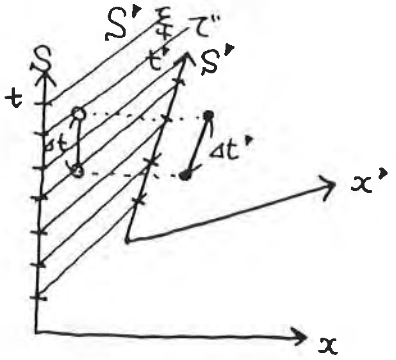
$$\cancel{L_{\mu}{}^{\alpha'}(\boldsymbol{v}_1)\,L_{\alpha'}{}^{\xi''}(\boldsymbol{v}_2) = L_{\mu}{}^{\xi''}(\boldsymbol{v})}$$

$$\cancel{\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2}{1 + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}}$$

(問)示せ
→ レポート (どちらか)　提出 11月末

▷ 時計の遅れ　(Lorentz) Time Dilatation

・ S'系で静止している時計をS系で見る。(どうやって??)



静止 → $\Delta x' = 0$

$$\Delta t = \gamma\, \Delta t'$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} > 1$$

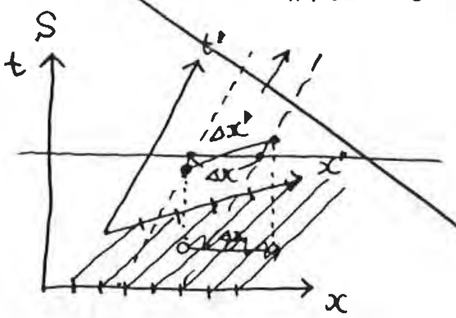
S'系で 1秒 → S系で γ秒

⇩

S'系の時計は ゆっくり進むように S系では見える。

※ ▷ ローレンツ収縮　Lorentz Contraction ~~(Expansion of Scale)~~ of Moving Bodie
(Expansion of Scales)

S'系で静止している物指をS系で計る。(どうやって??)



$\cancel{\Delta t' = 0}$ $\Delta t = 0$ ⇦ 答 S系で同時に計る

$$\Delta \boldsymbol{x}' = \Delta \boldsymbol{x} + (\gamma - 1)(\boldsymbol{n}\cdot\Delta \boldsymbol{x})\boldsymbol{n}$$

$\boldsymbol{n}$ 方向

$$\Delta x'_{\parallel} = \Delta \boldsymbol{x}'\cdot \boldsymbol{n}$$
$$= \gamma(\Delta \boldsymbol{x}\cdot \boldsymbol{n}) = \gamma\, \Delta x_{\parallel}$$

$\boldsymbol{n}$ ⊥方向

$$\Delta x'_{\perp} = \Delta x_{\perp}$$

運動方向成分　S系で 1m → S'系で γm

直交方向成分　S系で 1m → S'系で 1m

S'系の物指は S系でちぢんで見える

▷ Doppler Effect

~~逆数~~ ~~[illegible]~~ $\omega\Delta t$ は 3+1の 不変量 (~~[illegible]~~ら)

(位相 ϕ

$$c\Delta t' = L^{0'}{}_{0}\, c\Delta t + L^{0'}{}_{i}\, \Delta x^{i}$$

$$= \gamma\, c\Delta t - \gamma \frac{\boldsymbol{V}}{c}\cdot\Delta x$$

$\dfrac{\Delta x}{c\Delta t} = \boldsymbol{k}$: 光方向

$$\Delta t' = \Delta t\ \gamma\left(1 - \frac{\boldsymbol{V}}{c}\cdot\boldsymbol{k}\right)$$

$\omega'\Delta t' = \omega\Delta t$ より

$$\omega = \omega'\ \gamma\left(1 - \frac{\boldsymbol{V}}{c}\cdot\boldsymbol{k}\right)$$

ω' : 光源静止系における振動数

ω : 観測者 〃 (観測振動数)

$\boldsymbol{V}$: 光源の観測者から見た速度

$\boldsymbol{k}$: 光方向 (観測者から見た)

$$\gamma \sim 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{c}\right)^2 + O\left(\left(\frac{V}{c}\right)^4\right)$$

$$\therefore\ \omega = \omega'\left[1 - \frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k}}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{c}\right)^2\right] + \cdots$$

$$\frac{\omega - \omega'}{\omega'} = -\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k}}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{c}\right)^2 + \cdots$$

$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k} > 0$ 遠ざかる $\Rightarrow$ $\omega - \omega' < 0$ red shift

正確には

$$\frac{\omega - \omega'}{\omega'} = \gamma\left(1 - \frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k}}{c}\right) - 1$$

$$= \frac{\gamma^2\left(1 - \frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k}}{c}\right)^2 - 1}{\gamma\left(1 - \frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k}}{c}\right) + 1}$$

~~分母~~ -

$$= \frac{\cancel{1} - 2\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k}}{c} + \left(\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k}}{c}\right)^2 \cancel{-1} + \frac{V^2}{c}}{\left(1 - \frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k}}{c}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} + 1} = -\frac{\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k}}{c} + \frac{1}{2}\left\{\frac{V^2}{c} + \left(\frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k}}{c}\right)^2\right\}}{\left\{\left(1 - \frac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k}}{c}\right)\sqrt{\quad} + 1\right\}/2}$$

▷ 固有時 proper time

$$(\Delta s)^2 = -c^2(\Delta\tau)^2$$

…… ~~静止している~~ 運動物体と共に動く 時計

$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta t)^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta x)^2$$
$$= (\Delta t)^2\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2\right]$$

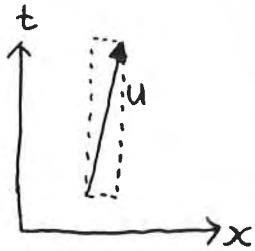
$\boldsymbol{v} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2} = \frac{1}{\gamma} \le 1$$

τ : 固有時 proper time

$$(\Delta t = \gamma\,\Delta\tau)$$

▷ 4元速度 4-velocity



4次元化. $\boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt}$ 時間の 特殊化

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = c\,\frac{dt}{d\tau} = c\gamma$$

$$u^i \;(= \boldsymbol{u}\,) = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx}{dt} = \gamma\boldsymbol{v}$$

$u^0 \gg u^i$
:timelike

$\boldsymbol{v}$: 3-velocity or 座標速度 coordinate velocity

独立3成分

4元運動量, 運動方程式

$$\|u^\mu\| = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu} = \sqrt{c^2\gamma^2 - \gamma^2\boldsymbol{v}^2} = c$$

絶対値は光速(

▷ 4元加速度 4-acceleration

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$$

$$\frac{d\gamma^2}{dt} = -\frac{-2\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{c^2}}{\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right)^2} = 2\gamma^4\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{c^2}$$

$$a^0 = \frac{du^0}{d\tau} = c\,\frac{d\gamma}{d\tau} = c\,\frac{dt}{d\tau}\frac{d\gamma}{dt} = c\gamma\frac{d\gamma}{dt}$$
$$= \frac{1}{2}c\,\frac{d\gamma^2}{dt} = \gamma^4\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{c}$$

$\boldsymbol{\alpha} \equiv \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ 座標加速度

No. 2-9

Date

$$a^i = \frac{du^i}{d\tau} = \frac{d(\gamma \boldsymbol{v})}{d\tau} = \frac{d\gamma}{d\tau}\boldsymbol{v} + \gamma \frac{d\boldsymbol{v}}{d\tau}$$

$$= \frac{a^0}{c}\boldsymbol{v} + \gamma^2 \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

$$= \gamma^4 \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{c^2}\boldsymbol{v} + \gamma^2 \boldsymbol{\alpha}$$

明らかに　$a^i \gg a^0$

a^μ : spacelike

実は　$a^\mu \perp u^\mu \leftarrow \|u^\mu\| = c = $ 一定

$$c^2 = -\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$$

$\frac{d}{d\tau}$

$$0 = -\eta_{\mu\nu} a^\mu u^\nu - \eta_{\mu\nu} u^\mu a^\nu$$

$$= -2\eta_{\mu\nu} u^\mu a^\nu = -2u^\mu a_\mu$$

$\therefore\ u^\mu a_\mu = 0$　　拘束 → 独立3成分

▷4元運動量

$$p^\mu = m u^\mu$$

ただし $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u} = m\gamma\boldsymbol{v}$

$$\left.\begin{aligned} \|p^\mu\| &= m\|u^\mu\| = mc \\ p^0 &= m u^0 = mc\gamma = \frac{E}{c} \end{aligned}\right\} \quad m^2c^2 = -\frac{E^2}{c^2} + \boldsymbol{p}^2$$

$$\therefore\ E^2 = m^2c^4 + \boldsymbol{p}^2c^2$$

有名な公式

$$E = mc^2\gamma = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \underset{\uparrow \atop E_0}{mc^2} + \underset{\uparrow \atop T}{\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2} + \cdots$$

▷運動方程式

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu$$

f^μ : 4元力　4-force

同じように 拘束

$$0 = p_\mu \frac{dp^\mu}{d\tau} = \eta_{\mu\nu} p^\mu f^\nu$$

質点のとき $\dfrac{dp^\mu}{d\tau} = m\dfrac{du^\mu}{d\tau} = f^\mu$

$\dfrac{f^\mu}{m} = a^\mu$ とおいて

~~電磁気（荷電粒子）の場合~~

$\cancel{f^\mu = \dfrac{e}{mc} F^\mu{}_\nu p^\nu}$

4元加速度

$$F^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\lambda} F_{\lambda\nu}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E} & & \\ & 0 & B_3 & -B_2 \\ +\mathbf{E} & & 0 & B_1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}\cdot\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{c}{\gamma^4} a^0 \\ \gamma^2\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} + \dfrac{a^0}{c}\mathbf{v} = a^i \end{cases}$$

$$\therefore \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\gamma^2}\left[a^i - \frac{a^0}{c}\mathbf{v}\right]$$

$\Rightarrow$ 座標加速度 $\left(\alpha = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}\right)$ は 座標力 (a^i) と平行でない!!

（電磁気もそう）

さて この後？

1) 電磁気力 $\Rightarrow$ 相対論的電磁気学

2) 質点 → 有限体
- 剛体 ‥‥ × 困難
- 連続体 $\begin{cases} \text{流体（液体・気体）‥‥相対論的流体力学} \\ \text{一般連続体 ‥‥ ？} \end{cases}$

3) 万有引力 ？？

☆ 疑問

特殊相対性原理 ‥‥ 慣性系間 （だから特殊）

加速度運動は特殊相対論では扱えない？？

以上の議論は一般‥‥を特殊化したものと考えないといけない。

例） Thomas Precession 自転粒子（スピン）

$\boldsymbol{\Omega} \simeq -\dfrac{1}{2c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{a}$ で 歳差運動する。 なぜか？

電磁気力による加速度

逐次 Lorentz 変換 ← 正当か？

10/30

▷荷電粒子の 運動eq.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) \qquad \left[\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla\times\mathbf{A} \end{aligned}\right]$$

Lorentz力

$$\frac{dE}{dt} = e\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}$$

$$p^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} u^0$$ と考える

$$A_{\mu} = \begin{pmatrix} \phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$$ とおく

$$p^{\mu} = m u^{\mu} = m\frac{dt}{d\tau}\begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = m u^0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\mathbf{v}}{c} \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$ とすると

$$F_{0j} = \frac{\partial A_j}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^j}$$

$$= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\phi\right)_j = -E_j$$

$$\frac{E}{c} = m u^0$$

$$E = m c u^0 = m c^2 \frac{dt}{d\tau}$$

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \epsilon_{ijk} B_k$$

$$F_{j0} = \frac{\partial A_0}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^0} = \left(-\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)_j = (\mathbf{E})_j$$

$$F^{\mu}{}_{\nu} p^{\nu} = \eta^{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} p^{\nu}$$

$$F^{0}{}_{\nu} p^{\nu} = \eta^{0\lambda} F_{\lambda\nu} p^{\nu} = -F_{0\nu} p^{\nu} = -F_{0j} p^j = F_{j0} p^j = \frac{u^0}{c}\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}$$

$$= \frac{m u^0}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}$$

$$F^{j}{}_{\nu} p^{\nu} = \eta^{j\lambda} F_{\lambda\nu} p^{\nu} = +F_{j\nu} p^{\nu} = F_{j0} p^0 + F_{jk} p^k$$

$$= p^0 \mathbf{E} + \epsilon_{jkl} p^k B_l$$

$$= m u^0 \mathbf{E} + \frac{u^0}{c}\mathbf{P}\times\mathbf{B} = m u_0\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$$

No.

Dale

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{E}{c}\right) = \frac{e}{m u_0}\left(\frac{m u^0}{c}\, \mathbf{v}\cdot\mathbf{E}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{p} = \frac{e}{m u_0}\, m_0 u^0 \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p^\mu}{u^0}\right) = \frac{e}{m u^0} F^\mu{}_\nu\, p^\nu$$

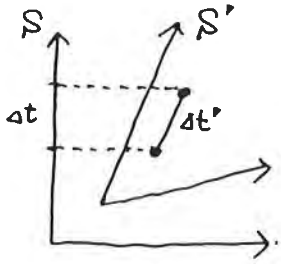
$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{p^\mu}{u^0}\right) = f^\mu = \frac{e}{m} F^\mu{}_\nu\, p^\nu$$

1991/10/30

M2
(西田君の指摘)

・「光の伝播は関係ない」(Lorentz変換, Lorentz収縮, 時間の遅れ)

これは正しい → 前回(10/30)の説明は misleading

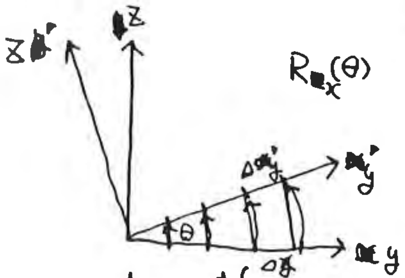


$$\begin{cases} c\Delta t = \gamma c\Delta t' + \gamma\beta\Delta x' \\ \Delta x = \gamma\beta c\Delta t' + \gamma\Delta x' \end{cases} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

直ちに S系への射影をとって (Δx'=0だから)

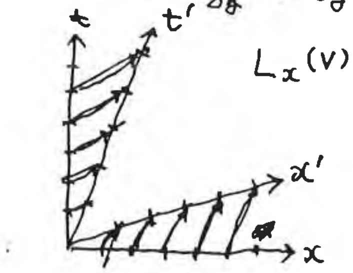
$$\Delta t = \gamma\Delta t'$$

図では縮んでいるように見えるが これは目盛りの違いによる。



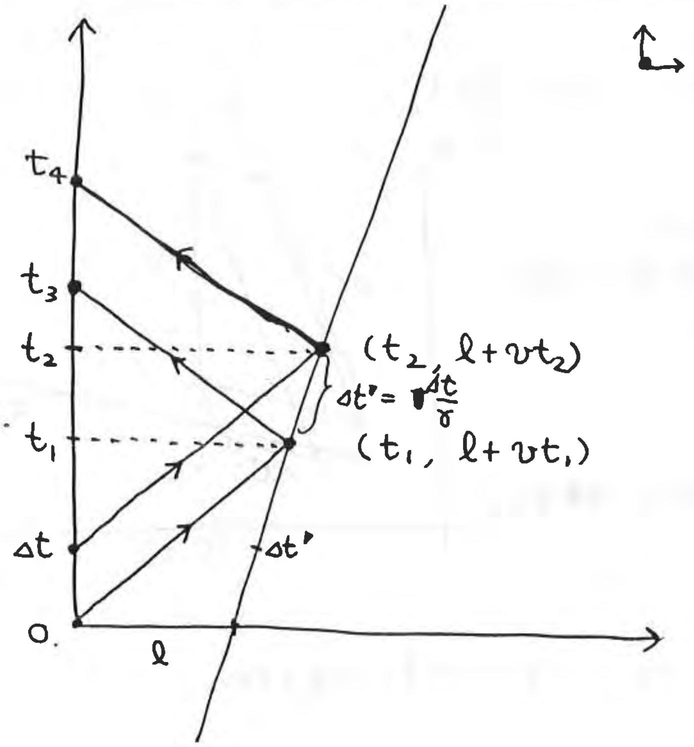
$$\begin{cases} \Delta y = \cos\theta\,\Delta y' - \sin\theta\,\Delta z' \\ \Delta z = \sin\theta\,\Delta y' + \cos\theta\,\Delta z' \end{cases}$$

$$\Delta z' = 0 \Rightarrow \Delta y = \cos\theta\,\Delta y' < \Delta y'$$



$$\begin{cases} c\Delta t = \cosh\alpha\cdot c\Delta t' + \sinh\alpha\cdot\Delta x' \\ \Delta x = \sinh\alpha\cdot c\Delta t' + \cosh\alpha\cdot\Delta x' \end{cases}$$

$$\Delta x' = 0 \Rightarrow \Delta t = \cosh\alpha\,\Delta t' > \Delta t'$$



$$c(t_2-\Delta t) = l + vt_2$$

$$ct_1 = l + vt_1$$

$$t_1 = \frac{l}{c-v}$$

$$t_2 = \frac{l+c\Delta t}{c-v}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{c}{c-v}\Delta t$$

$$= \frac{\Delta t}{1-\frac{v}{c}}$$

$$t_3 = 2t_1 \qquad t_4 - t_2 = t_2 - \Delta t$$

$$t_4 = 2t_2 - \Delta t$$

$$t_4 - t_3 = 2(t_2 - t_1) - \Delta t$$

$$= \frac{2\Delta t}{1-\frac{v}{c}} - \Delta t = \left(\frac{2}{1-\frac{v}{c}} - 1\right)\Delta t$$

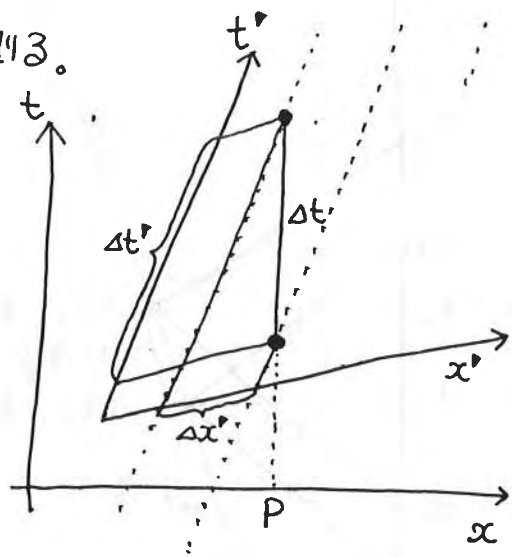
$$= \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\Delta t$$

$$\Delta t' = \gamma \Delta t$$

▷ ローレンツ収縮

運

S'系で静止している物指をS系で測る。



どうやって？　~~物指の~~ (すなわち $\Delta x=0$)

物指

(その1) S系の静止した1点で物指の通過時間差を測り v をかける

$$L = -v\Delta t$$

(ー符号は時間差と物指の向きが逆なため)

ローレンツ変換の式で

$$\Delta \boldsymbol{x}' = \Delta \boldsymbol{x} - \gamma \boldsymbol{v}\Delta t + (\gamma-1)(\boldsymbol{n}\cdot\Delta \boldsymbol{x})\boldsymbol{n}$$

だから

$\Delta \boldsymbol{x}=0$ より

$$\Delta \boldsymbol{x}' = -\gamma \boldsymbol{v}\Delta t$$

$L' = |\Delta \boldsymbol{x}'|$ とすると

$$L' = \gamma L$$

$$L = \frac{L'}{\gamma}$$

S'系で1mの物指は(この測り方だと)S系で $\frac{1}{\gamma}$ 倍に縮んでみえる。

▷ ローレンツ収縮（その2）

（その2）
S系の で同時に
物指の両端を測り、
その差から長さを求める。

$$L = \delta x$$

ローレンツ変換の式で

$$\Delta \boldsymbol{x} = \Delta \boldsymbol{x}' + \gamma \boldsymbol{V} \Delta t' + (\gamma - 1)(\boldsymbol{n} \cdot \Delta \boldsymbol{x}')\boldsymbol{n}$$

↓

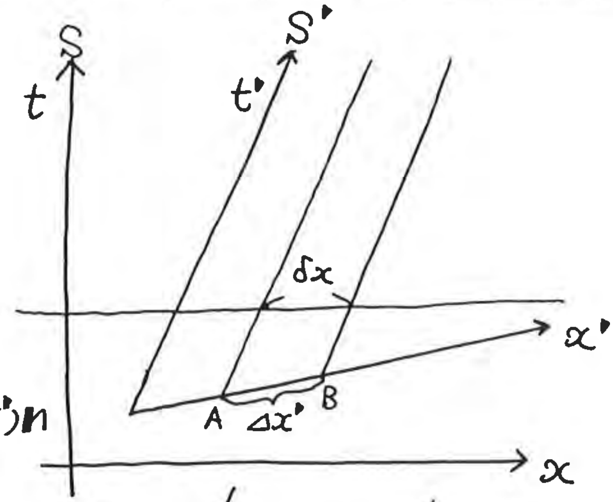
$$\Delta x = \gamma \Delta x'$$

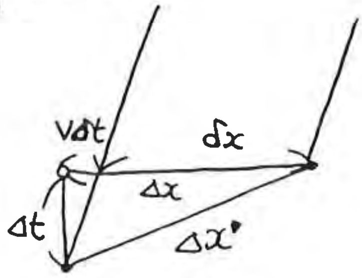
一方

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{V \cdot \Delta x'}{c^2} \right)$$

↓

$$\Delta t = \gamma \frac{V \Delta x'}{c^2}$$





右図より

$$\begin{aligned} \delta x &= \Delta x - V \Delta t \\ &= \gamma \Delta x' - \gamma \frac{V^2}{c^2} \Delta x' \\ &= \gamma \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \Delta x' \\ &= \frac{\Delta x'}{\gamma} \end{aligned}$$

$$L = \frac{L'}{\gamma}$$

▷ 速度の合成則

$$\boldsymbol{u} = \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\Delta t} \quad \text{の変換}$$

$$u^{\alpha'} = c\frac{\Delta x^{\alpha'}}{\Delta x^{0'}} = c\,\frac{L^{\alpha'}{}_{0}\Delta x^0 + L^{\alpha'}{}_{i}\Delta x^i}{L^{0'}{}_{0}\Delta x^0 + L^{0'}{}_{i}\Delta x^i}$$

$$= c\,\frac{cL^{\alpha'}{}_{0} + L^{\alpha'}{}_{i}u^i}{cL^{0'}{}_{0} + L^{0'}{}_{i}u^i}$$

$$\frac{u^{\alpha'}}{c} = \frac{-\gamma\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} + (\gamma-1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}}{c\gamma - \gamma\boldsymbol{v}\cdot\frac{\boldsymbol{u}}{c}}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u} - \gamma\boldsymbol{v} + (\gamma-1)\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}}{v^2}}{\gamma\left(1 - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{c^2}\right)}$$

特に $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ のとき $\quad \boldsymbol{u}' = \frac{\boldsymbol{u}}{\gamma} - \boldsymbol{v}$

$\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$ のとき

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{u\cdot v}{c^2}}$$

成分に分けると

$$u'_{\parallel} = \frac{u_{\parallel} - V}{1 - \frac{u_{\parallel}V}{c^2}}, \quad u'_{\perp} = \frac{u_{\perp}}{\gamma\left(1 - \frac{u_{\parallel}V}{c^2}\right)}$$

展開すると $\quad \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2} \cong 1 - \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2} \qquad \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}$

$$u'_{\parallel} \cong \left(1 + \frac{u_{\parallel}V}{c^2}\right)(u_{\parallel} - V) = u_{\parallel} - V + \frac{u_{\parallel}V}{c^2}(u_{\parallel} - V)$$

$$u'_{\perp} \cong \left[1 + \frac{1}{c^2}\left(-\frac{V^2}{2} + u_{\parallel}V\right)\right](u_{\perp})$$

$$= u_{\perp} + \frac{1}{c^2}\left[\left(-\frac{V^2}{2} + u_{\parallel}V\right)u_{\perp}\right]$$

▷ 光行差

$\boldsymbol{k} = \dfrac{\Delta x}{c\Delta t}$ の変換

$\boldsymbol{u}$ の変換式を用いて ($\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{k}$ と代入して)

$$c\boldsymbol{k}' = \frac{c\boldsymbol{k} - \gamma\boldsymbol{V} + (\gamma-1)\dfrac{(\boldsymbol{V}\cdot c\boldsymbol{k})\boldsymbol{V}}{V^2}}{\gamma\left(1 - \dfrac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k}}{c}\right)}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{k}' = \frac{\boldsymbol{k} - \gamma\dfrac{\boldsymbol{V}}{c} + (\gamma-1)\dfrac{(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{V}}{V^2}}{\gamma\left(1 - \dfrac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k}}{c}\right)} \qquad (|\boldsymbol{k}'| = 1)$$

特に

$\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{V}$ のとき $\quad \boldsymbol{k}' = \dfrac{\boldsymbol{k}}{\gamma} - \dfrac{\boldsymbol{V}}{c} \qquad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \sim 1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{V}{c}\right)^2$

$\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{V}$ のとき $\quad \boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}$

成分に分けると

$$k'_{\parallel} = \frac{k_{\parallel} - \dfrac{V}{c}}{1 - \dfrac{k_{\parallel}V}{c}}, \qquad \boldsymbol{k}'_{\perp} = \frac{\boldsymbol{k}_{\perp}}{\gamma\left(1 - \dfrac{k_{\parallel}V}{c}\right)}$$

展開すると

$$k'_{\parallel} \cong \left[1 + \frac{k_{\parallel}V}{c} + \left(\frac{k_{\parallel}V}{c}\right)^2\right]\left(k_{\parallel} - \frac{V}{c}\right)$$
$$= k_{\parallel} - \frac{V}{c}(1-k_{\parallel}^2) - \left(\frac{V}{c}\right)^2 k_{\parallel}(1-k_{\parallel}^2) + \cdots$$

$$\boldsymbol{k}'_{\perp} \cong \left(1 - \frac{V^2}{2c^2}\right)\left(1 + \frac{k_{\parallel}V}{c} + \left(\frac{k_{\parallel}V}{c}\right)^2 + \cdots\right)\boldsymbol{k}_{\perp}$$
$$= \boldsymbol{k}_{\perp} + \frac{V}{c}k_{\parallel}\boldsymbol{k}_{\perp} + \left(\frac{V}{c}\right)^2\left(k_{\parallel}^2 - \frac{1}{2}\right)\boldsymbol{k}_{\perp} + \cdots$$

一般には

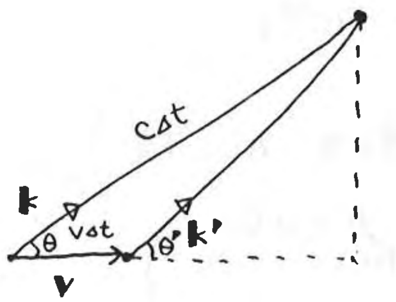
$$\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} - \frac{1}{c}\left[\boldsymbol{V} - (\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}\right] + \frac{1}{c^2}\left[\left\{(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k})^2 - \frac{V^2}{2}\right\}\boldsymbol{k} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{V}\right] + \cdots$$

$$\tan\Delta\theta' = \frac{\tan\theta' - \tan\theta}{1+\tan\theta'\tan\theta} = \frac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta - \frac{v}{c}} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1 + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta - \frac{v}{c}}\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta + \frac{v}{c}\sin\theta}{\cos^2\theta - \frac{v}{c}\cos\theta + \sin^2\theta}$$

$$= \frac{\frac{v}{c}\sin\theta}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}$$

▷ 光行差 (Newton的考え方)



$$\mathbf{k}' = \frac{\mathbf{k} - \frac{\mathbf{v}}{c}}{\left|\mathbf{k} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right|}$$

$$\Delta\theta' = \theta' - \theta$$

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - \frac{v}{c}} \quad \text{or} \quad \tan\Delta\theta' = \frac{\frac{v}{c}\sin\theta}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}$$

$\mathbf{k} \perp \mathbf{v}$ のとき
$(\theta = 90°)$

$$\left|\mathbf{k} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right| = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}$$

$$\Delta\theta' = \tan^{-1}\frac{v}{c}$$

$\mathbf{k} \parallel \mathbf{v}$ のとき $\quad \mathbf{k}' = \mathbf{k}$

展開すると $\quad \left|\mathbf{k} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right| = \sqrt{1 - 2\mathbf{k}\cdot\frac{\mathbf{v}}{c} + \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \cdots \quad \text{より}$$

$$\frac{1}{|\quad|} = 1 + \mathbf{k}\cdot\frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{3}{2}\left(\mathbf{k}\cdot\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2 + \cdots$$

$$\therefore \mathbf{k}' = \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right)\left(1 + \mathbf{k}\cdot\frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{3}{2}\left(\mathbf{k}\cdot\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2 + \cdots\right)$$

$$= \mathbf{k} - \frac{1}{c}\left[\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}\right] + \frac{1}{c^2}\left[\left\{\frac{3}{2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})^2 - \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right\}\mathbf{k} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\mathbf{v}\right] + \cdots$$

$$\left(\mathbf{k}'_N - \mathbf{k}'_{SR} \cong \frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{2}\left\{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})^2\mathbf{k} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\mathbf{v}\right\} + \cdots\right)$$

§3 一般相対論への招待

アインシュタイン 1915 (特殊 → 1907)

<指導原理>

1. 一般相対性原理　　物理法則は一般座標変換に対して不変

2. 等価原理　　重力 は 力ではない
force

(3. 対応原理)

$v \to 0$　　特殊相対論

$c \to \infty$　　ニュートン力学＋万有引力

「一般相対論的天体力学 とは 歪んだ時空における自由運動を議論する学問」
(ポアンカレ 「天体力学とは 万有引力だけが働いている運動 〃 」

▷ 曲がった時空 の 導入

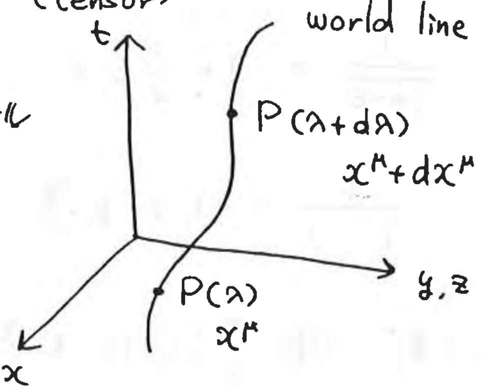
(不変量) 線素　　$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$　　2次形式 2-form

計量(テンソル) metric (tensor) → 対称2階共変テンソル

変位　　dx^μ : (反変) ベクトル
contravariant
$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$　(共変) 偏微分ベクトル
covariant

アフィンパラメータ　λ : 世界線に固有

アフィン速度　$\frac{dx^\mu}{d\lambda}$



4元速度　　$\lambda \leftarrow \tau$: 固有時　　⇨ 時間的世界線
timelike　$cdt \gtrsim dx^i$

$u = \frac{dx^\mu}{d\tau}$

(4元方向余弦　　$\lambda \leftarrow s$: 固有長　　⇨ 空間的世界線
spacelike　$cdt \lesssim dx^i$

$w = \frac{dx^\mu}{ds}$)

$\lambda \leftarrow$ そのまま　　⇨ 長さ0世界線
null　　$cdt \sim dx^i$

▷ なぜ座標系が必要か

1) 方程式 ← 共変 covariant　　　2) 独立でない → 拘束アリ

~~…~~ 単一粒子なら　それでOK

But

~~…~~ 多体系　　　固有時 → 世界線に固有　　重力多体を

particle　　　τ

$1 \cdots i \cdots N$　　τ_i → Nコ存在 ⇒ (individual time step　ITS法) みたいになってしまう

多時間理論は複雑

よって　1つの　ものさし (gauge) 座標系 (coord. sys.) を導入し、全ての現象をこれで記述

(手順)

$\boxed{\text{共変(4次元)方程式}}$ $i=1$

⋮

$\boxed{\quad}$ $i=N$

} ⇒ 単一座標系で書く {$\boxed{\text{3次元}}$ ⋮

▷ 絶対微分

4元加速度　$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)$?　　⇒ これは 反変ベクトルで無い!

(実際)

(一般)座標変換　$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\mu)$　　$x^\mu \to x^{\alpha'}$

$$dx^{\alpha'} = E^{\alpha'}{}_{\mu}\, dx^\mu \qquad E^{\alpha'}{}_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}$$ 変換のヤコビアン

このとき

~~…~~ $u^\mu \left(= \frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)$ の全微分　du^μの変換は

$$u^{\alpha'} = E^{\alpha'}{}_{\mu}\, u^\mu$$

を微分して

$$du^{\alpha'} = \underset{\neq 0}{(dE^{\alpha'}{}_{\mu})}\, u^\mu + E^{\alpha'}{}_{\mu}\, du^\mu$$

$$\therefore \quad du^{\alpha'} \neq E^{\alpha'}{}_{\mu}\, du^\mu$$

別の考え方
パラメータ λ $\qquad u^\mu = u^\mu(x^\mu, \lambda)$

$$u^\mu + du^\mu = u^\mu(x^\mu + dx^\mu, \lambda + d\lambda)$$
$$u^\mu + \delta u^\mu = u^\mu(x^\mu + dx^\mu, \lambda)$$

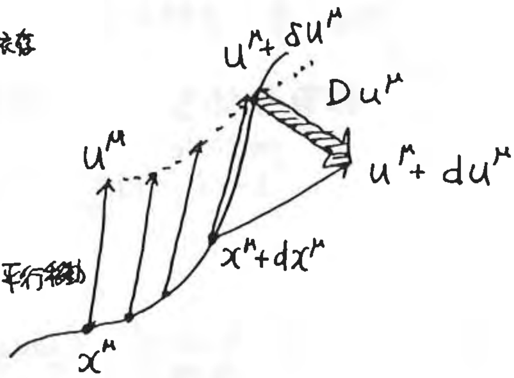
$$Du^\mu \equiv \frac{\partial u^\mu}{\partial \lambda} d\lambda = du^\mu - \delta u^\mu$$

テンソルの性質を保存する微分は何か？ ← 絶対微分 D
absolute derivative

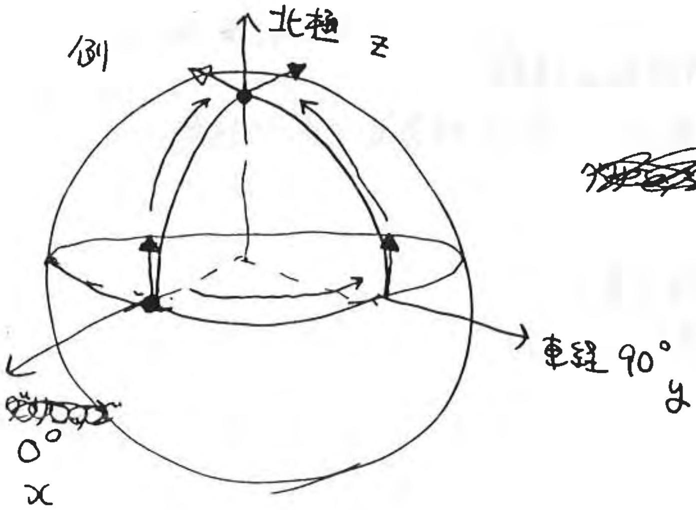
$$D = d - \delta$$

平行移動による差 (path に依存)
parallel

曲がった線に沿って平行移動すると $\delta \neq 0$



例



一般に $\quad \delta u^\mu$ は

$$\delta u^\mu \propto dx^\mu$$ 変位が小 → 平行移動差も小
$$\propto u^\mu$$ 元の量が小 → 〃

$$\therefore \quad \delta u^\mu(x^\rho) = C^\mu_{\nu\lambda}(x^\rho)\, u^\nu dx^\lambda$$

接続係数 connection coeff.

一般相対論 伝統的に

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = -C^\mu_{\nu\lambda}$$

クリストッフェルの記号 とよぶ
Christoffel's symbol
↑
テンソルでないから

$$\therefore \quad Du^\mu = du^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu dx^\lambda$$

(公式) $DA = dA$ 　　A：スカラー

$DB^{\mu} = dB^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} B^{\nu} dx^{\lambda}$ 　　積の微分則が成立つとき

$DC_{\mu} = dC_{\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} C_{\nu} dx^{\lambda}$ ← ($A = B^{\mu}C_{\mu}$ とおくと すぐ出てくる) 以下同様

~~$DE_{\mu\nu} = dE_{\mu\nu}$~~

$DE^{\mu\nu} = dE^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} E^{\alpha} dx^{\beta} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} E^{\alpha} dx^{\beta}$

$DF^{\mu}{}_{\nu} = dF^{\mu}{}_{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} F^{\alpha}{}_{\nu} dx^{\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} F^{\mu}{}_{\alpha} dx^{\beta}$

⋮

D アフィン微分 ~~共変微分~~

$\frac{D}{d\lambda}$ 　　D：絶対微分

アフィン加速度 $\frac{D}{d\lambda}\left(\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\right)$ 　　4元加速度 $\frac{D}{d\tau}\left(\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right) = \frac{DU^{\mu}}{d\tau}$

共変微分 (絶対偏微分? ~~のテンソル表示~~)

~~$\frac{DB^{\mu}}{d\lambda} = \frac{dB^{\mu}}{d\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha\beta} B^{\nu} \frac{dx^{\alpha\beta}}{d\lambda} = \bigcirc^{\mu}{}_{\nu} B^{\nu} = B^{\mu}$~~

~~$\frac{d}{d\lambda}\delta^{\mu}_{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha\beta}}{d\lambda}$~~

$DB^{\mu} = dB^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} B^{\nu} dx^{\lambda}$ 　　普通の(座標)偏微分 カンマ

$DB^{\mu} = \underbrace{B^{\mu}{}_{;\lambda}}_{\text{共変微分}} dx^{\lambda}$ 　セミコロン 　　$dB^{\mu} = \underbrace{B^{\mu}{}_{,\lambda}}_{\frac{\partial B^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}} dx^{\lambda}$

一般に 　$D = dx^{\mu}\nabla_{\mu}$

$\nabla_{\mu} = \frac{D}{\partial x^{\mu}}$ 　　$\frac{D}{d\tau} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}\nabla_{\mu} = u^{\mu}\nabla_{\mu}$ 　($= \nabla_u$ とも書く)

▷ 運動方程式（質点）

$$\frac{Dp^\mu}{d\tau} = f^\mu$$

ただし　$p^\mu = m u^\mu$　：質点の運動量

（ラグランジュ形式で書いてもいいが、散逸(drag)などがあると ややこしい）

さて 等価原理より

$$f^\mu = 0 \quad (\text{非重力 force} = 0 \text{ のみを考える})$$

$$0 = \frac{Dp^\mu}{d\tau} = m\frac{Du^\mu}{d\tau}$$

▷ 測地線

$$\frac{Du^\mu}{d\tau} = 0 \qquad （時間的）測地線.$$

書き直すと

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu u^\lambda = 0$$

（$u^0 \to$　特殊相対論）

座標速度への書き換え.

$$\begin{cases} \dfrac{du^0}{d\tau} + \Gamma^0_{\nu\lambda} u^\nu u^\lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{du^j}{d\tau} + \Gamma^j_{\nu\lambda} u^\nu u^\lambda = 0 \end{cases}$$

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix}$$

$u^j = \dfrac{u^0}{c} v^j$ ，　$\dfrac{d}{d\tau} = \dfrac{u^0}{c}\dfrac{d}{dt}$ より　（$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ ← 後で示す）

$$\begin{cases} \dfrac{u^0}{c}\dfrac{du^0}{dt} + (u^0)^2\left[\Gamma^0_{00} + 2\Gamma^0_{i0}\dfrac{v^i}{c} + \Gamma^0_{ij}\dfrac{v^i}{c}\dfrac{v^j}{c}\right] = 0 \\[2ex] \dfrac{u^0}{c}\dfrac{du^0}{dt}\dfrac{v^k}{c} + \dfrac{(u^0)^2}{c^2}\dfrac{dv^k}{dt} + (u^0)^2\left[\Gamma^k_{00} + 2\Gamma^k_{i0}\dfrac{v^i}{c} + \Gamma^k_{ij}\dfrac{v^i}{c}\dfrac{v^j}{c}\right] = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dv^k}{dt} = -c^2\Gamma^k_{00} + c v^k \Gamma^0_{00} - 2c v^i \Gamma^k_{i0} + 2 v^k v^i \Gamma^0_{i0} - v^i v^j \Gamma^k_{ij} + \frac{1}{c} v^k v^i v^j \Gamma^0_{ij}$$

Γ は座標だけの関数　（もし $m \to 0$ なら v^kには依存しない）
この極限で $\dot{v}$ は v の3次式となる。

（これは長さ0測地線についても成立つ）

▷ $g_{\mu\nu}$, $\delta^{\mu}{}_{\nu}$, $g^{\mu\nu}$ $(, \eta_{\mu\nu})$

さて $(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = dx^{\mu} dx_{\mu}$

$g_{\mu\nu}$ は座標に依存した表現　　$g_{\mu\nu} dx^{\mu} \equiv dx_{\nu}$ と書く

「指標の上げ下げ」

$\delta^{\mu}{}_{\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$　　$A^{\mu}{}_{\nu} = g_{\nu\rho} A^{\mu\rho}$ etc.

とすると

$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}{}_{\lambda}$ で定義される $g^{\mu\nu}$ (反変計量テンソル) 11/6

▷ $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$?

(要請)　I　指標の上げ下げ $\longleftrightarrow$ D (絶対微分) 可換

(II　積の微分法則をみたす
$D(A^{\mu} B_{\nu}) = (DA^{\mu}) B_{\nu} + A^{\mu} (DB_{\nu})$ etc.)

これから直ちに

$$D g_{\mu\nu} = D \delta^{\mu}{}_{\nu} = D g^{\mu\nu} \ (= D \eta_{\mu\nu}) = 0$$

つまり $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ は $\underbrace{\text{定数}}_{\text{Dに対し}}$ と同じようにふるまう。

さて この要請から

$$0 = D g_{\mu\nu} = d g_{\mu\nu} - (\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\rho} g_{\mu\lambda}) dx^{\rho}$$

$$\therefore \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\rho} g_{\mu\lambda}$$

ところで

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}$$

$\because$) ϕ スカラー場として $\dfrac{D}{\partial x^{\lambda}}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}}\right) = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} - \Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda} \dfrac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}}$

$\mu \leftrightarrow \lambda$　　$\dfrac{D}{\partial x^{\mu}}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x^{\lambda}}\right) = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} - \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\mu} \dfrac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}}$

$$\therefore \frac{D}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}}\right) - \frac{D}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^{\lambda}}\right) = (\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}) \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}}$$

テンソル eq.　直交座標系で 左辺 $= 0$ $(D \to \partial)$

$$\therefore 0 = (\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}) \frac{\partial\phi}{\partial x^{\nu}}$$

座標変換しても 0⇒0 ~~[illegible]~~ 一方 ϕ は任意

$$\therefore \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$$

▷ $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$?（その2）
さて

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} g_{\mu\lambda}$$

$(\mu,\nu,\rho)+(\nu,\rho,\mu)-(\rho,\mu,\nu)$ を作ると

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} = 2\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} \equiv 2\Gamma_{\nu,\mu\rho} \text{ とすると}$$

$$\therefore \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} = g^{\lambda\kappa}(\Gamma_{\kappa,\mu\rho})$$
$$= \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa}\left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\kappa\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\kappa}}\right)$$

書き直して

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa}\left(\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa}}\right)$$
$$= \frac{1}{2} g^{\mu\kappa}(g_{\nu\kappa,\lambda} + g_{\kappa\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\kappa})$$

▷ 場の方程式

運動方程式 ← Γ ← g ← 場の方程式

Γ：力　g：ポテンシャル

大ざっぱにいって

普通は （アインシュタインの）重力場の方程式 $G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$
を弱い場の近似で解いて g の展開形を求める。

しかし、場の方程式は一意でない （Brans-Dicke 他）

↳ PPN formalism

§4 ~~PPN フォーマリズム~~

Newtonian metric　ニュートン近似

(対応原理)　・重力 ↘ 0　特殊相対性理論

$$\therefore \quad g_{\mu\nu} \cong \eta_{\mu\nu}$$

そこで　$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$ とおく。

さて遅い粒子　($v \ll c$) だけ考えると　($\epsilon = \frac{v}{c}$ とおく　ε は微小量 $\sim 10^{-3} \sim$)

$$\cancel{\left|\frac{\partial}{\partial t} g_{\mu\nu}(x^\lambda)\right| \sim \left|\frac{\partial x}{\partial t}\right| \cdot |g_{\mu\nu}| \sim \frac{v}{c}|g_{\mu\nu}| \sim \varepsilon |g_{\mu\nu}|}$$

つまり　$\cancel{\frac{\partial}{\partial t} \sim \varepsilon \quad \text{一方} \quad v \sim \varepsilon}$

運動方程式

$$\frac{dv^k}{dt} = -c^2 \Gamma^k_{00} + c\left(v^k \Gamma^0_{00} - 2v^i \Gamma^k_{i0}\right) + \left(2v^k v^i \Gamma^0_{i0} - v^i v^j \Gamma^k_{ij}\right) + \frac{1}{c} v^k v^i v^j \Gamma^0_{ij}$$

$$\simeq -c^2 \Gamma^k_{00}$$

重力ポテンシャルを ϕ とすると　ニュートン力学では

$$\frac{dv^k}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^k}$$

すなわち　もう1つの対応原理から

$$-c^2 \Gamma^k_{00} \sim \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$$

さて

$$\Gamma^k_{00} \sim -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \qquad \text{(後で示す)}$$

となるので　これは

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2}$$

を示唆する。

従って
$$\begin{cases} g_{00} \sim -1 + \dfrac{2\phi}{c^2} + \cdots \\ g_{0j} \sim 0 + \cdots \\ g_{ij} \sim \delta_{ij} + \cdots \end{cases}$$

この近似を ニュートン近似 という。

▷ 固有時の方程式

固有時 τ : 任意に動いている時計 の刻む時系

$$(ds)^2 = -c^2 d\tau^2$$
$$= g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 \left(-g_{00} - \frac{2g_{0j}}{c}\frac{dx^j}{dt} - \frac{g_{ij}}{c^2}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \right)$$

$$d\tau^2 \sim dt^2 \left(1 - \frac{2\phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right) \qquad v = \frac{dx}{dt}$$ 時計の座標速度

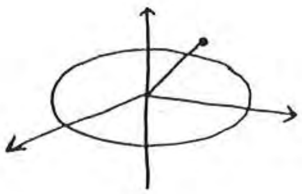
ϕ : 時計の重力 力関数 (この座標系における)
(ポテンシャル とroughにいうこともある)

$$\frac{d\tau}{dt} \simeq \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(2\phi + v^2\right)} \sim 1 - \frac{1}{c^2}\left(\phi + \frac{v^2}{2}\right) + \cdots$$

重力による 時計の遅れ　Lorentz　$O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right)$

固有時の方程式 Eq. of Proper time　Gravitational Time Dilation

▷ ジオイド上の時計



回転している地球上に固定された時計を考える。

地心座標系で

(地球以外の天体を無視)

このとき　ϕ : 地球の重力ポテンシャル @ 時計
　　　　　v : 時計の地心速度

すると $\phi + \dfrac{v^2}{2}$ … 回転座標系の有効ポテンシャル　$v = \omega \times r$ 剛体回転

ある意味でつくりもの

ところが 回転座標系 ′ では

$$\left.\begin{aligned} \phi' &= \phi + \frac{v^2}{2} \\ v' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \phi' + \frac{v'^2}{2} = \phi + \frac{v^2}{2}$$

固有時は (ϕの) 1次 では不変

測地学　重力　gravity　$\phi + \frac{v^2}{2}$

(万有引力的)重力　gravitation　ϕ

この意味で

重力一定 の 面 (—のうち 1つ) を ジオイド geoid と呼ぶ

ポテンシャル

(等重力ポテンシャル面 のうち 平均海水面 と一致するもの)

→ 火星では? 木星では?

つまり「固有時は ジオイド面 (広く 等重力ポテンシャル面) 上では、ϕの1次 ($\frac{v}{c}$の2次) の 精度で 同等である」

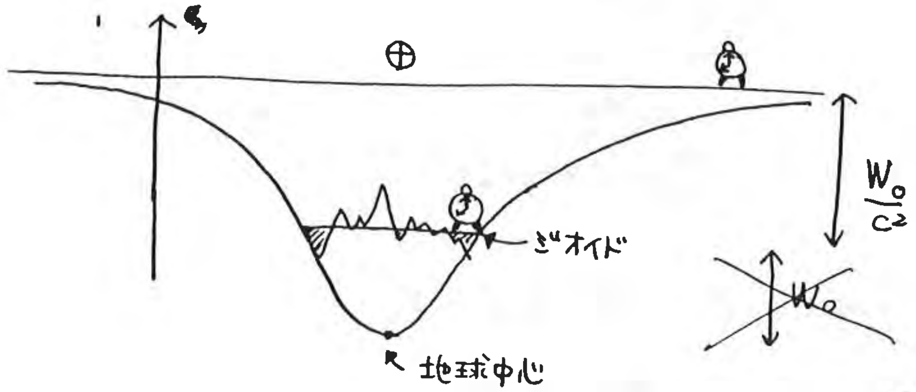
← これを利用して 時計の(ラフな)同期が行われている。

$$W_0 = \left(\phi_E + \frac{v_{rot}^2}{2}\right)_{\text{ジオイド面}} \sim 6.263686\underset{\pm 30}{0} \times 10^{+7}\ m^2/s^2$$

$$\frac{W_0}{c^2} \sim \frac{6.2636860 \times 10^{+7}}{(2.99792458 \times 10^8\ m/s)^2} \sim 6.96929\overset{3}{1} \times 10^{-10}$$

↑ 10^{-15}

どこのポテンシャル差か?



$g \sim \cancel{10}\ 9.8\ m/s^2$

$c^2 \sim 1.00 \times 10^{17}\ m^2/s^2$

⇩

$h = 1\ \cancel{k}m$

$$\frac{gh}{c^2} \sim \frac{9.8}{10^{17}} \sim 10^{-17}$$

つまり

$9.8 \times 10^{-17} / m \sim 10^{-16}/m$

で 原子時計の rate が 変わる。

(1 day ≈ 8.64×10^4 sec　~ 10 ms/day

10^{-8} sec/day)

▷ 地表 (≒ ジオイド上)

$$\Delta W = W - W_0 \cong \Delta\left(\phi_E + \frac{v^2}{2}\right) \sim -g\,h$$

h: 標高

g: 重力加速度 gravity

▷ ~~人工衛星上の~~時計 ~~(GPS)~~
自由運動する

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{1}{c^2}\left(\phi + \frac{v^2}{2}\right)$$

$$\phi = \frac{\mu}{r} \qquad \mu = GM$$

ケプラー運動 (楕円), $e<1$)

エネルギー積分 $\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$ より直ちに

a: semi-major axis

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{1}{c^2}\left[\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{2a}\right]$$

$$= 1 - \frac{\mu}{c^2 a}\left[2\frac{a}{r} - \frac{1}{2}\right]$$

さて $\frac{r}{a} = 1 - e\cos u$ u: eccentric anomaly (E とも書く)

また

$na\,dt = r\,du$ より n: mean motion $\mu = n^2 a^3$

$$d\tau = \int\left\{1 - \frac{\mu}{c^2 a}\left[2\frac{a}{r} - \frac{1}{2}\right]\right\} dt$$

$$= \left[1 + \frac{\mu}{2c^2 a}\right]\int dt - \frac{2\mu}{c^2 a}\underbrace{\int \frac{a}{r}dt}_{\frac{1}{n}\int du}$$

$$\tau - \tau_0 = \left(1 + \frac{\mu}{2c^2 a}\right)(t - t_0) - \frac{2\mu}{c^2 n a}(u - u_0)$$

さて

(Kepler eq.) $u - e\sin u = l = n(t - t_0) + l_0$

$$= \left(1 - \frac{3\mu}{2c^2 a}\right)(t - t_0) - \frac{2\mu e}{c^2 n a}\sin u$$

$\frac{\mu}{c^2}$: half of gravitational radius

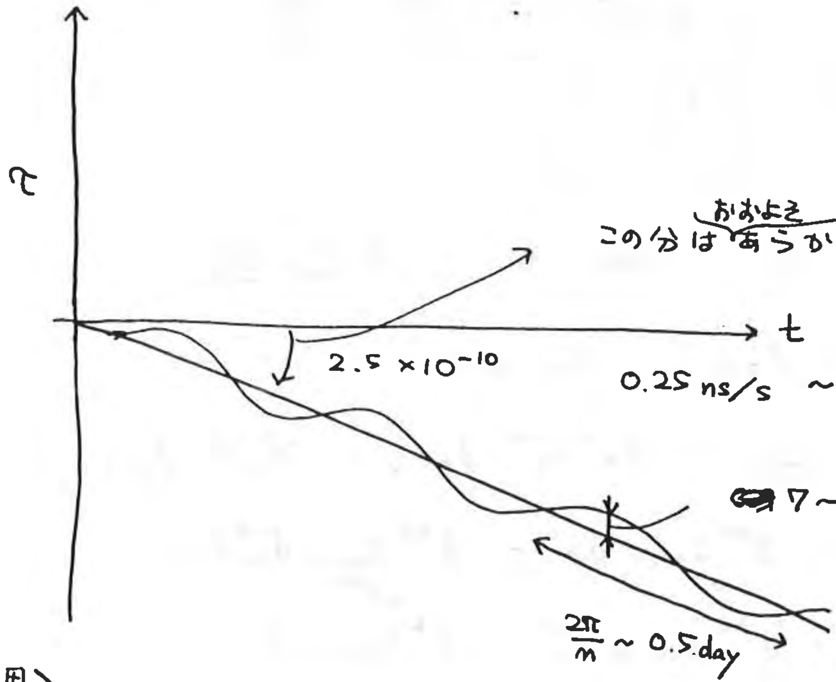
		μ	μ/c^2
$\odot$ ~	~~2.95 km~~	$1.327\times10^{20}\ m^3/s^2$	: 1.476 k
$\oplus$ ~	~~8.87 mm~~	3.99×10^{14}	: 4.44 mm

$e \sim 0.003 - 0.010$

GPS/NAVSTAR $\quad a \sim \overset{2.656}{2.6} \times 10^{7}\,\mathrm{m}$ $\quad n = \sqrt{\dfrac{\mu}{a^3}} \simeq 1.459 \times 10^{-4}\ \mathrm{rad/s}$

$$\frac{3}{2}\frac{\mu}{c^2 a} \sim 1.5 \times \frac{\overset{4.44}{\cancel{8.9}} \times 10^{-3}}{2.66 \times 10^{7}} \sim 2.50 \times 10^{-10}$$

$$2\frac{\mu}{c^2 a}\cdot\frac{e}{n} \sim 2 \times \frac{4.44 \times 10^{-3}}{2.66 \times 10^{9}} \cdot \frac{0.003 - 0.010}{1.459 \times 10^{-4}} \sim (6.9 - 22.9) \times 10^{-9}$$



この分は $\overbrace{\text{あらかじめ}}^{\text{おおよそ}}$ adjust してある

0.25 ns/s ~ 21.6 μs/day ~ 7.9 ms/y

<応用>

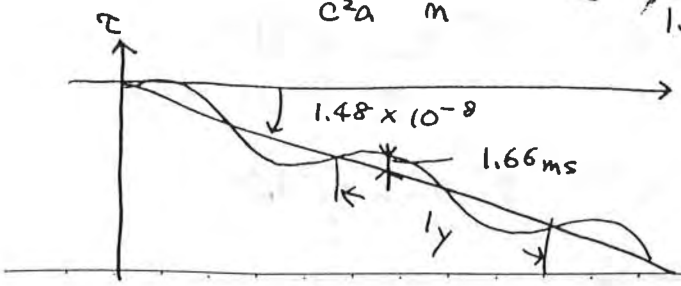
太陽の回りの地球

$e \sim 0.0167$

$n = \dfrac{2\pi}{365.2422 \cdot 86400} \sim 1.98 \times 10^{-7}\ \mathrm{rad}$

$$\frac{3}{2}\frac{\mu}{c^2 a} \sim 1.5 \times \frac{1.48 \times 10^{3}}{1.50 \times 10^{11}} \sim 1.48 \times 10^{-8}$$

$$2\frac{\mu}{c^2 a}\cdot\frac{e}{n} \sim 2 \times \frac{1.48 \times 10^{3}}{1.50 \times 10^{11}} \times \frac{0.0167}{1.98 \times 10^{-7}} \sim 1.66 \times 10^{-3}$$



14.8 ns/s ~ 1.28 ms/day ~ 0.47 s/y

光の運動

▷ 運動方程式 再考

~~粒子説 or 幾何光学 の 極限 を考える。~~

~~（考える長さ $d \gg \lambda$ 波長なら OK.）~~

~~スリット etc.~~

さて

ニュートン近似 で 運動方程式を考えると

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \dfrac{2\phi}{c^2} \\ g_{0j} = 0 \\ g_{ij} = \delta_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^{00} = \dfrac{1}{-1+\frac{2\phi}{c^2}} = -1 - \dfrac{2\phi}{c^2} - \dfrac{4\phi^2}{c^4} - \cdots \\ g^{0j} = 0 \\ g^{ij} = \delta^{ij} \end{cases}$$

$$g_{00,0} = \frac{2\dot{\phi}}{c^3} \qquad g_{00,k} = \frac{2\phi_{,k}}{c^2} \qquad \text{other} = 0 \qquad {}_{,0} = \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\therefore\ \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa}\left(g_{\nu\kappa,\lambda} + g_{\kappa\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\kappa}\right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\mu\kappa}\left(\delta_\nu{}^0 \delta_\kappa{}^0\, g_{00,\lambda} + \delta_\kappa{}^0 \delta_\lambda{}^0\, g_{00,\nu} - \delta_\lambda{}^0 \delta_\nu{}^0\, g_{00,\kappa}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(g^{\mu 0} g_{00,\lambda}\, \delta_\nu{}^0 + g^{\mu 0} g_{00,\nu}\, \delta_\lambda{}^0 - g^{\mu\kappa} g_{00,\kappa}\, \delta_\lambda{}^0 \delta_\nu{}^0\right)$$

$$\Gamma^k_{00} = \frac{1}{2}\left(\overset{0}{\uparrow}\!\!\!\! g^{k0} g_{00,0}\, \cancel{\delta_0{}^0} + \overset{0}{\uparrow}\!\!\!\! g^{k0} g_{00,0}\, \cancel{\delta_0{}^0} - \overset{\delta^{kk}}{\uparrow}\!\!\!\! g^{kk} g_{00,k}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} g_{00,k} = -\frac{1}{c^2}\phi_{,k}$$

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}\left(g^{00} g_{00,0} + g^{00} g_{00,0} - g^{0k} g_{00,k}\right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{00} g_{00,0} = -\frac{1}{c^3}\dot{\phi}\ \frac{1}{\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)}$$

$$\Gamma^k_{i0} = \frac{1}{2}\left(g^{k0} g_{00,0}\, \underset{0}{\underset{\downarrow}{\delta_i{}^0}} + \underset{0}{\underset{\downarrow}{g^{k0}}} g_{00,i}\, \delta_0{}^0 - g^{kk} g_{00,k}\, \underset{0}{\underset{\downarrow}{\delta_i{}^0}} \delta_0{}^0\right)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^0_{i0} = \frac{1}{2}\left(g^{00} g_{00,0}\, \underset{0}{\underset{\downarrow}{\delta_i{}^0}} + g^{00} g_{00,i}\, \delta_0{}^0 - g^{0k} g_{00,k}\, \underset{0}{\underset{\downarrow}{\delta_i{}^0}} \delta_0{}^0\right)$$

$$= \frac{1}{2} g^{00} g_{00,i} = -\frac{1}{c^2}\phi_{,k} \cdot \frac{1}{1-\frac{2\phi}{c^2}}$$

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\left(g^{k0} g_{00,i}\, \underset{0}{\delta_j^0} + g^{k0} g_{00,j}\, \underset{0}{\delta_i^0} - g^{kK} g_{00,K}\, \underset{0}{\delta_i^0 \delta_j^0}\right)$$

$$= 0$$

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}\left(g^{00} g_{00,i}\, \underset{0}{\delta_j^0} + g^{00} g_{00,j}\, \underset{0}{\delta_i^0} - g^{0k} g_{00,k}\, \underset{0}{\delta_i^0 \delta_j^0}\right)$$

$$= 0$$

よって

$$\Gamma^k_{00} = -\frac{\phi_{,k}}{c^2}, \quad \Gamma^0_{00} = -\frac{\dot{\phi}}{c^3\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)}, \quad \Gamma^0_{i0} = -\frac{\phi_{,i}}{c^2}\frac{1}{1-\frac{2\phi}{c^2}}$$

other $= 0$

よって

$$\frac{dv^k}{dt} = -c^2\Gamma^k_{00} + c v^k \Gamma^0_{00} + 2 v^k v^i \Gamma^0_{i0}$$

$$= \phi_{,k} - \frac{v_k}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{1}{1-\frac{2\phi}{c^2}} - \frac{v_k}{c^2} v_i \phi_{,i} \frac{1}{1-\frac{2\phi}{c^2}}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla\phi - \frac{1}{1-\frac{2\phi}{c^2}}\left[\frac{1}{c}\dot{\phi} + \frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\nabla\phi\right]\frac{\mathbf{v}}{c}$$

$\phi, \dot{\phi} \sim 0$
$v \sim c$ で

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla\phi - \frac{1}{1-\frac{2\phi}{c^2}}\left(\underset{\frac{d\phi}{dt}}{\underbrace{\dot{\phi} + \mathbf{v}\cdot\nabla\phi}}\right)\frac{\mathbf{v}}{c^2}} \sim \nabla\phi - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\nabla\phi\right)\frac{\mathbf{v}}{c}$$

ニュートン近似の運動方程式 ← これは間違い

(Einstein も最初まちがえた。
光の曲がりを計算するとき)

なぜか？

最初の仮定 と 得られた結果が consistent でない

↑ ニュートン近似 ⇑ $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla\phi$, $\frac{v}{c} \ll 1$

↑ 上記の eq. of m. $\frac{v}{c} \sim 1$

⇔ 勝手に拡張 --- まちがい (数え切れ) あり

§5 ポスト・ガリレイ近似

次 じゃ post-Newton 近似か？ そうじゃなくて

▷ ニュートンの次の近似　post-Galilean or (Linear)

(光の運動
　光 $v \sim c$ の粒子と考えても まあ(大じょうぶ) 少し違うところもあるけど)

さて 時間反転 M_t を考えると $g_{\mu\nu}$ のうち g_{0j} のみ符号を変える。
v の奇数次は符号を変え、偶数次は符号を変えない。

よって

ニュートン近似　ポスト・ニュートン近似

$$g_{00} = -1 + \frac{2\phi}{c^2} + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right) + \cdots$$

$$g_{0j} = 0 + O\left(\frac{v}{c}\right) + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^3\right) + \cdots$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right) + \cdots$$

←ここまでポスト・ガリレイ近似

(ただし $O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^5\right)$ になると重力波が現われるため複雑)

そのまえに

▷ 回転　しらみつぶしから

g_{0j} に $\left(\frac{v}{c}\right)^1$ の項はあるのか？ ← ない (もしあればコリオリ力が出てくる)

今、空間(剛体)回転 という一つの座標変換 を考えよう

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = Rx \end{cases}$$

たとえば $R = R_z(\psi) R_x(\theta) R_z(\varphi)$　オイラー角 (φ, θ, ψ)

$$x^{a'} = R_i{}^{a'} x^i$$

このとき $\dfrac{\partial x^{a'}}{\partial x^i} = R_i{}^{a'}$　$\dfrac{\partial x^{0'}}{\partial x^i} = 0$　$\dfrac{\partial x^{a'}}{\partial x^0} = \dfrac{1}{c}\dfrac{dR_i{}^{a'}}{dt}x^i$

今 簡単のために $R = R_z(\omega t)$ としよう。　ω：一定

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x\cos\omega t - y\sin\omega t \\ y' = x\sin\omega t + y\cos\omega t \\ z' = z \end{cases}$$

このとき

$$\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^0} = \frac{\partial x'}{c\partial t} = -\frac{\omega}{c}(x\sin\omega t + y\cos\omega t) = -\frac{\omega y'}{c}$$

$$\frac{\partial y'}{c\partial t} = +\frac{\omega}{c}(x\cos\omega t - y\sin\omega t) = +\frac{\omega x'}{c}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \cos\omega t$$

$$R_\mu{}^{\alpha'} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega}{c}y' & \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ +\frac{\omega}{c}x' & \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \qquad \cancel{R_{\alpha'}{}^{\mu} = \begin{pmatrix} +1 & \frac{\omega}{c}y' & -\frac{\omega}{c}x' & 0 \\ 0 & \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ 0 & -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{g_{\alpha'\beta'} = R_{\alpha'}{}^{\mu} R_{\beta'}{}^{\nu} g_{\mu\nu}} \qquad R_{\alpha'}{}^{\mu} = \cdot R$$

$$\cancel{g_{0'0'} =}$$

$$g_{\mu\nu} = R_\mu{}^{\alpha'} R_\nu{}^{\beta'} g_{\alpha'\beta'} \qquad g_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha'\beta'} \text{ とした}$$

$$\begin{aligned} g_{00} &= R_0{}^{\alpha'} R_0{}^{\beta'} g_{\alpha'\beta'} \\ &= (R_0{}^{0'})^2 g_{00} + 2(R_0{}^{0'}) R_0{}^{i'} g_{0i'} + R_0{}^{i'} R_0{}^{j'} g_{i'j'} \\ &\cancel{= g_{00} + 2\frac{\omega}{c}\left[x' g_{01'} - y' g_{02'}\right]} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \\ &= \overset{-1}{g_{0'0'}} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (y'^2 + x'^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{0j} &= R_0{}^{\alpha'} R_j{}^{\beta'} g_{\alpha'\beta'} \\ &= R_0{}^{0'} \underset{\downarrow 0}{R_j{}^{0'}} g_{0'0'} + R_0{}^{i'} \underset{\downarrow 0}{R_j{}^{0'}} g_{i'0'} + R_0{}^{i'} R_j{}^{k'} g_{i'k'} \\ &= R_0{}^{i'} R_j{}^{i'} \end{aligned}$$

$$g_{01} = -\frac{\omega}{c} y' \cos\omega t + \frac{\omega}{c} x' \sin\omega t = -\frac{\omega}{c} y$$

$$g_{02} = +\frac{\omega}{c} y' \sin\omega t + \frac{\omega}{c} x' \cos\omega t = +\frac{\omega}{c} x$$

$$g_{03} = 0$$

$$\begin{aligned} g_{ij} &= R_i{}^{\alpha'} R_j{}^{\beta'} g_{\alpha'\beta'} \\ &= R_i{}^{0'} \underset{\downarrow 0}{R_j{}^{0'}} g_{0'0'} + 2R_i{}^{k'} \underset{\downarrow 0}{R_j{}^{0'}} g_{0'k'} + R_i{}^{k'} R_j{}^{l'} g_{k'l'} \\ &= R_i{}^{k'} R_j{}^{k'} = \delta_{ij} \end{aligned}$$

回転 $R_z(\omega t)$ で

$$\eta_{\alpha'\beta'} \longrightarrow g_{\mu\nu}$$

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \dfrac{\omega^2(x^2+y^2)}{c^2} \\ g_{01} = -\dfrac{\omega y}{c} \\ g_{02} = +\dfrac{\omega x}{c} \\ g_{03} = 0 \\ g_{ij} = \delta_{ij} \end{cases}$$

← 遠心力ポテンシャル

一般に $\dfrac{d\underset{\sim}{R}}{dt} = \underset{\sim}{\Omega}\underset{\sim}{R}$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \dfrac{v_{rot}^2}{c^2} \\ g_{0j} = \dfrac{v_{rot}}{c} \\ g_{ij} = \delta_{ij} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{v}_{rot} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x} \quad (= \underset{\sim}{\Omega}\boldsymbol{x})$$

空間(剛体)回転 ⟷ g は密接に関係する。

そこで 一般に

$g_{0j} \neq 0$ のとき

$(g)_j = g_{0j}$ とおいて $\qquad g = g(t, x)$

$$g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = g_{\alpha'\beta'}\, dx^{\alpha'} dx^{\beta'}$$

さて、g_{0j} が $O(\frac{v}{c})$ で 0でないとき 適当な座標変換で $O(\frac{v}{c}) \to 0$ とすることができる。

(実際) 1) g_{0j} の $O(\frac{v}{c})$ の項が 定数 (xによらない)だったとしよう。

このとき 適当な直交変換 ($P_\mu{}^{\alpha'}$ は xによらない定数)

$$x^{\alpha'} = P_\mu{}^{\alpha'} x^\mu$$

を施せば g_{0j} の定数部分は消去できる。

$$(ds)^2 \sim -(dx^0)^2 + (dx^j)^2 + \cdots$$

となる。

2) 次に g_{0j} の $O(\frac{v}{c})$ の項が x の関数 $g_j(x)$ だったとしよう

No. 5-4

Date

$$,0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

もし

$g_{0j} = O\left(\frac{v}{c}\right)$ だったとすると.

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \frac{2\phi}{c^2} \\ g_{0j} = g_j = \frac{W}{c} \\ g_{ij} = \delta_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^{00} = \frac{1 - g^{0j} g_{0j}}{g_{00}} \sim -1 - \frac{2\phi}{c^2} + \frac{W^2}{c^2} \\ g^{0j} = -g^{00} g_{0j} \sim -g_j = -\frac{W}{c} \\ g^{ij} = \delta_{ij} - g^{0i} g_{0j} \sim \delta_{ij} + g \otimes g \quad \frac{1}{c^2} W \otimes W \end{cases}$$

$$g_{00,0} = \frac{2\dot\phi}{c^3}, \quad g_{00,k} = \frac{2\phi_{,k}}{c^2}, \quad g_{0j,0} = \frac{\dot W}{c^2}, \quad g_{0j,k} = \frac{W_{j,k}}{c}$$

other = 0

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} (g_{\nu\kappa,\lambda} + g_{\kappa\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\kappa})$$

$$\Gamma^k_{00} = \frac{1}{2}\Big(\underset{1}{g^{k0}} \underset{3}{g_{00,0}} + \underset{1}{g^{k0}} \underset{3}{g_{00,0}} - \underset{1}{g^{k0}} \underset{3}{g_{00,0}} + \underset{0}{g^{kl}} \underset{2}{g_{0l,0}} + \underset{0}{g^{kl}} \underset{2}{g_{l0,0}} - \underset{0}{g^{kl}} \underset{2}{g_{00,l}} \Big) = \frac{1}{2}\left(g^{k0} g_{00,0} + 2 g^{kl} g_{0l,0} - g^{kl} g_{00}\right)$$

$$\sim \left(\frac{\dot W}{c^2} - \frac{\nabla\phi}{c^2}\right)_k \quad \left(\sim \frac{\dot W_k}{c^2} - \frac{\phi_{,k}}{c^2}\right)$$

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}\left(\underset{0}{g^{00}} \underset{3}{g_{00,0}} + 2 \underset{1}{g^{0l}} \underset{2}{g_{0l,0}} - \underset{1}{g^{0l}} \underset{2}{g_{00,l}} \right)$$

$$\sim O(3)$$

$$\Gamma^k_{i0} = \frac{1}{2}\Big(\cancel{g^{k0} g_{i0,0}} + \underset{1}{g^{k0}} \underset{2}{g_{00,i}} - \cancel{g^{k0} g_{0i,0}} + \underset{0}{g^{ki}} \underset{\to 0}{g_{ij,0}} + \underset{0}{g^{kj}} \underset{1}{g_{j0,i}} - \underset{0}{g^{kj}} \underset{1}{g_{0i,j}} \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(g_{k0,i} - g_{0i,k}\right)$$

$$= \frac{1}{2c}\left(W_{k,i} - W_{i,k}\right)$$

others ～ 小

$$\frac{dv_k}{dt} \simeq \cancel{-\dot W_k + \phi_{,k}} - c^2 \Gamma^k_{00} - 2cv^i \Gamma^k_{i0}$$

$$\sim -\dot W_k + \phi_{,k} - v^i (W_{k,i} - W_{i,k})$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \cancel{\nabla\phi - \dot{\mathbf{W}} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{W} + \nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{W})}$$

$$= \nabla\phi - \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{W})$$

$c\times(a\times b)$
$= -(a\cdot c)b + (b\cdot c)a$

電磁場の Lorentz 力の公式

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m}\left[\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right]$$

where
$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{H} = \nabla\times\mathbf{A} \end{cases}$$

とくらべてみると

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{w})$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{e}{m}\Phi &= -\phi \\ \frac{e}{mc}\mathbf{A} &= \mathbf{w} \end{aligned}\right\}$$ という対応がつく

回転 … (コリオリ力) → 磁場　　11/2 ↑

ニュートン力学での経験によれば
適当な座標系をとれば
さて (慣性系) で 少なくとも $\dot{\mathbf{w}} = 0$, $\nabla\times\mathbf{w} = 0$ とできる。
$\mathbf{w}$ の定数部分も 2次形式の対角化で OK.

よって g_{0j} に $O\left(\frac{v}{c}\right)$ は ないとしてよい。

▷ ポスト・ガリレイ近似 の メトリック

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \dfrac{2\phi}{c^2} \\ g_{0j} = 0 \\ g_{ij} = \delta_{ij} + (?) \end{cases}$$

$(?) \leftarrow \dfrac{2\Phi_{ij}}{c^2}$ と便宜的に書く

Φ_{ij} ?

前提
1) 2階 対称
2) ∞ で $\to 0$
3) ρ, x だけの関数 ← やや恣意的 (簡単)
4) 空間回転 に対して 2階テンソル → $|x-x'|$

よって
$$\Phi_{ij} = \gamma_1\phi\,\delta_{ij} + \gamma_2\phi_{ij}$$
とおける。

⇒ 一つの可能性
$$\begin{cases} \delta_{ij}\phi \\ \phi^{(x)}_{ij} \equiv \displaystyle\int \frac{\rho'(x-x')_i(x-x')_j}{|x-x'|^3}dx' \end{cases}$$

(もっと妙ちきりんなものも考えることはできる
$$\text{ex)}\ \int \frac{\rho'(x')\,e^{-\frac{(x-x')^2}{a^2}}}{|x-x'|}\,dx$$

$\frac{\chi}{c^2 r^2} \sim 1$

$x \sim \frac{\chi}{c^2 r} \sim \frac{1}{c^2}\frac{\partial \chi}{\partial x}$

ゲージ変換 $t \to \tilde{t}$

$$\left\{ x^j \to \tilde{x}^{\tilde{j}} \equiv x^j - \frac{\gamma_2}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^j}\underbrace{\int d^3x' \rho(x')|x-x'|}_{\chi \text{ とおく}} \right.$$

スーパーポテンシャル

$$\left(\Delta\chi = -2\phi \right)$$

重調和

すると

$$\frac{\partial x^{\tilde{j}}}{\partial x^k} = \delta^j_k - \frac{\gamma_2}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^j \partial x^k}$$

$$= \delta_{jk} - \frac{\gamma_2}{c^2}\int d^3x' \rho(x')\left[\frac{\delta_{jk}}{|x-x'|} - \frac{(x-x')_j (x-x')_k}{|x-x'|^3}\right]$$

$$= \delta_{jk} - \gamma_2 \frac{\phi}{c^2}\delta_{jk} + \gamma_2\frac{\phi_{jk}}{c^2} \qquad \frac{\partial x^k}{\partial x^{\tilde{j}}} = \left(\delta_{jk} + \frac{\gamma_2\phi}{c^2}\delta_{jk} - \gamma_2 \ldots\right.$$

$$g_{ij} \to g_{\tilde{i}\tilde{j}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\tilde{i}}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\tilde{j}}} g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^l}{\partial x^{\tilde{i}}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{\tilde{j}}} g_{lm}$$

$$= \left(\delta_{l\tilde{i}} + \frac{\gamma_2\phi}{c^2}\delta_{l\tilde{i}} - \frac{\gamma_2\phi_{l\tilde{i}}}{c^2}\right)\left(\delta_{m\tilde{j}} + \frac{\gamma_2\phi}{c^2}\delta_{m\tilde{j}} - \frac{\gamma_2\phi_{m\tilde{j}}}{c^2}\right)\left(\delta_{lm} + \frac{2\gamma_1\phi}{c^2}\delta_{lm} + \frac{2\gamma_2\phi_{lm}}{c^2}\right)$$

$$= +\delta_{ij} + 2(\gamma_1+\gamma_2)\frac{\phi}{c^2}\delta_{ij} + \cdots$$

$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ とおく　　γ : PPN パラメーター ← Lorentz因子の $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ と区別せよ!

アインシュタイン「GTR」

$\gamma = 1$

ブランス・ディッケ「スカラーテンソル」

$\gamma = \frac{1+\omega}{2+\omega}$ $\left(\begin{array}{c}\omega \to \infty\\ \text{アインシュタイン}\end{array}\right)$

結局　$\Phi_{ij} = \gamma\phi\,\delta_{ij}$ とおいてよい

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \frac{2\phi}{c^2} \\ g_{0j} = 0 \\ g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{2\gamma\phi}{c^2}\delta_{ij} \end{cases} \to G = \begin{pmatrix} -1+\frac{2\phi}{c^2} & 0 \\ 0 & \left(1+\frac{2\gamma\phi}{c^2}\right)\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

▷ (遅い粒子の) 運動方程式

まず

$$\begin{cases} g^{00} = \frac{1}{g_{00}} = \frac{1}{-1+\frac{2\phi}{c^2}} \\ g^{0j} = -(g_{ji})^{-1} g^{00} \overset{\nearrow 0}{g_{0i}} = 0 \\ g^{ij} = \delta_{ij}\frac{1}{1+\frac{2\gamma\phi}{c^2}} \end{cases} \qquad G^{-1} = \begin{pmatrix} -1-\frac{2\phi}{c^2} & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{2\gamma\phi}{c^2}\right)\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$g_{00,0} = \frac{2\dot{\phi}}{c^3}, \quad g_{00,k} = \frac{2\phi_{,k}}{c^2}, \quad g_{0j,\mu} = 0$$

$$g_{ij,0} = \frac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{ij}, \quad g_{ij,k} = \frac{2\gamma\phi_{,k}}{c^2}\delta_{ij}$$

これより

$$\Gamma^k_{00} = \frac{1}{2}\left[g^{k0} \overset{\nearrow 0}{g_{00,0}} + 2 g^{kj} \overset{\nearrow 0}{g_{0j,0}} - g^{kj} g_{00,j} \right]$$

$$= -\frac{\phi_{,k}}{c^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{2\gamma\phi}{c^2}} \sim -\frac{\phi_{,k}}{c^2}$$

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}\left[g^{00} g_{00,0} + 2 \underset{\downarrow 0}{g^{0j}} g_{0j,0} - \underset{\downarrow 0}{g^{0j}} g_{00,j} \right]$$

$$= -\frac{\dot{\phi}}{c^3} \frac{1}{1-\frac{2\phi}{c^2}} \sim -\frac{\dot{\phi}}{c^3}$$

$$\Gamma^k_{j0} = \frac{1}{2}\left[\underset{\downarrow 0}{g^{k0}} g_{00,j} + g^{kl} \underset{\downarrow 0}{g_{0l,j}} + g^{kl} g_{lj,0} - g^{kl} \underset{\downarrow 0}{g_{0j,l}} \right]$$

$$= + \frac{\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta^k_j \frac{1}{1+\frac{2\gamma\phi}{c^2}} \sim + \frac{\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta^k_j$$

$$\Gamma^0_{j0} = \frac{1}{2}\left[g^{00} g_{00,j} + \underset{\downarrow 0}{g^{0l}} g_{0l,j} + \underset{\downarrow 0}{g^{0l}} g_{lj,0} - \underset{\downarrow 0}{g^{0l}} g_{0j,l} \right]$$

$$= -\frac{\phi_{,j}}{c^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{2\phi}{c^2}} \sim -\frac{\phi_{,j}}{c^2}$$

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\left[\underset{\downarrow 0}{g^{k0}} g_{0i,j} + \underset{\downarrow 0}{g^{k0}} g_{0j,i} - \underset{\downarrow 0}{g^{k0}} g_{ij,0} + g^{kl} g_{li,j} + g^{kl} g_{lj,i} - g^{kl} g_{ij,l} \right]$$

$$= + \frac{\gamma}{c^2}\left[\phi_{,i}\delta^k_j + \phi_{,j}\delta^k_i - \phi_{,k}\delta^i_j \right] \frac{1}{1+\frac{2\gamma\phi}{c^2}}$$

$$\sim + \frac{\gamma}{c^2}\left(\phi_{,i}\delta_{kj} + \phi_{,j}\delta_{ki} - \phi_{,k}\delta_{ij} \right)$$

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}\left[g^{00} \underset{\downarrow 0}{g_{0i,j}} + g^{00} \underset{\downarrow 0}{g_{0j,i}} - g^{00} g_{ij,0} + \overset{0}{\uparrow}{g^{0l}} g_{li,j} + \overset{0}{\uparrow}{g^{0l}} g_{lj,i} - \overset{0}{\uparrow}{g^{0l}} g_{ij,l} \right]$$

$$= + \frac{\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{ij} \frac{1}{1-\frac{2\phi}{c^2}} \sim \frac{\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{ij}$$

結局

$$\frac{dv^k}{dt} = -c^2\Gamma^k_{00} + c v^k \Gamma^0_{00} - 2c v^i \Gamma^k_{i0} + 2v^k v^i \Gamma^0_{i0} - v^i v^j \Gamma^k_{ij} + \frac{1}{c} v^k v^i v^j \Gamma^0_{ij}$$

$$= +\phi_{,k} - \frac{\dot\phi}{c^2} v^k - 2c v^i \cdot \frac{\gamma\dot\phi}{c^3}\delta^k_i + 2v^k v^i \cdot \left(-\frac{\phi_{,i}}{c^2}\right) - v^i v^j \frac{\gamma}{c^2}\left(\phi_{,i}\delta_{kj} + \phi_{,j}\delta_{ki} - \phi_{,k}\delta_{ij}\right) + \frac{1}{c} v^k v^i v^j \frac{\gamma\dot\phi}{c^3}\delta_{ij}$$

$$= \phi_{,k} - (1+2\gamma)\frac{\dot\phi}{c^2} v^k - 2\frac{v_i\phi_{,i}}{c^2} v^k - \frac{\gamma}{c^2}\left(v^i\phi_{,i} v^k + v^j\phi_{,j} v^k - v^i v^i \phi_{,k}\right) + \frac{\gamma\dot\phi}{c^4} v^i v^i v^k$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla\phi - (1+2\gamma)\frac{\dot\phi}{c^2}\mathbf{v} - 2(1+\gamma)\frac{\mathbf{v}\cdot\nabla\phi}{c^2}\mathbf{v} + \frac{\gamma\mathbf{v}^2}{c^2}\nabla\phi + \frac{\gamma\mathbf{v}^2\dot\phi}{c^4}\mathbf{v}$$

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(1+\gamma\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)\nabla\phi \underline{- \left\{(1+2\gamma) - \gamma\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right\}\frac{\dot\phi}{c^2}\mathbf{v}} - 2(1+\gamma)\frac{\mathbf{v}\cdot\nabla\phi}{c^2}\mathbf{v}}$$

本当は（無視してきた）g_{0j} の（と同じ）オーダーなので ここは正しくない

これが速い粒子 $\mathbf{v} \sim c$ の運動方程式
（ポスト・ガリレイ近似での）

▷ 光の運動方程式

光の場合　長さ0の測地線　$(ds)^2 = 0$
より拘束条件

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$$

$$0 = g_{00} + 2g_{0j}\frac{dx^j}{dx^0} + g_{ij}\frac{dx^i}{dx^0}\frac{dx^j}{dx^0}$$

$$= -1 + \frac{2\phi}{c^2} + \left(1 + \frac{2\gamma\phi}{c^2}\right)\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}$$

$$\therefore \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} = \frac{1 - \frac{2\phi}{c^2}}{1 + \frac{2\gamma\phi}{c^2}} \cong 1 - 2(1+\gamma)\frac{\phi}{c^2}$$

$\frac{\mathbf{v}^2}{c^2} = 1$ と近似して

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (1+\gamma)\nabla\phi - \frac{\dot\phi}{c^2}\mathbf{v} - 2(1+\gamma)\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\nabla\phi\right)\frac{\mathbf{v}}{c}$$

1つ下のオーダー

結局

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (1+\gamma)\left[\nabla\phi - 2\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\nabla\phi\right)\frac{\mathbf{v}}{c}\right] - \overbrace{\frac{\dot{\phi}}{c^2}\mathbf{v}}^{小さい}$$

これが（ポスト・ガリレイ近似の）光の運動方程式
（もちろん積分 $\left|\frac{\mathbf{v}}{c}\right| = 1 - (1+\gamma)\frac{\phi}{c^2}$ があるが…）

§6 光の運動

さて光に影響する重力場自体の時間変化は小さい $\dot{\phi} \sim \frac{|\nabla\phi|}{c}$
（例えば太陽の運動）

このとき $\frac{\dot{\phi}}{c^2}\mathbf{v}$ は次のオーダーになる

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (1+\gamma)\left[\nabla\phi - 2\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\nabla\phi\right)\frac{\mathbf{v}}{c}\right]$$

$$\nabla\phi = -\frac{GM_J}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_J|^3}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_J)$$

GM_J：天体Jの GM
$\mathbf{x}_J$：〃 位置

$\frac{|\nabla\phi|}{c^2} \ll 1$ より 摂動論で解く

0次

$$\frac{d\mathbf{v}^{(0)}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

解（等速直線運動）

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{v}_0$$
$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0(t-t_0)$$

1次の $\overbrace{解}^{補正}$

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{v}^{(1)}}{dt} = (1+\gamma)\left[\nabla\phi(\mathbf{x}^{(0)}) - 2\left(\dfrac{\mathbf{v}^{(0)}}{c}\cdot\nabla\phi(\mathbf{x}^{(0)})\right)\dfrac{\mathbf{v}^{(0)}}{c}\right] \\[2ex] \dfrac{d\mathbf{x}^{(1)}}{dt} = \mathbf{v}^{(1)} \end{cases}$$

初期条件 $t=t_0$ で $\mathbf{v}^{(1)}=0$, $\mathbf{x}^{(1)}=0$

さて

$1+\gamma$ は定数

$\dfrac{\mathbf{v}^{(0)}}{c}$ は定ベクトル だから

もし

$$\begin{cases} \dfrac{d\Delta \mathbf{v}}{dt} = \nabla\phi(\mathbf{x}^{(0)}) \\ \dfrac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \Delta\mathbf{v}\end{cases}$$

が解ければ

$$\mathbf{v}^{(1)} = (1+\gamma)\left[\Delta\mathbf{v} - 2\left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c}\cdot\Delta\mathbf{v}\right)\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c}\right]$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = (1+\gamma)\left[\Delta\mathbf{x} - 2\left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c}\cdot\Delta\mathbf{x}\right)\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c}\right]$$

は 元の方程式をみたす解である。

公式

$$\int dt\,\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}t}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}t|^3} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}t}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}t|}\times\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2}$$

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ は定ベクトル

を用いると

実際

数学大公式集（丸善，大槻訳） ← 岩波より断然良い 捨てよ。

2.264.5-6 より

$$\int \frac{d+et}{\sqrt{a+2bt+ct^2}^{\,3}}dt = \frac{(db-ae)+(cd-be)t}{(ac-b^2)\sqrt{a+2bt+ct^2}}$$

から

$c\leftarrow\mathbf{b}^2$, $a\leftarrow\mathbf{a}^2$, $b\leftarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $d\leftarrow\mathbf{a}$, $e\leftarrow\mathbf{b}$ のおきかえから

$ac-b^2 \to \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2$

$db-ae \to (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a} - \mathbf{a}^2\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

$cd-be \to \mathbf{b}^2\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b} = \mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$

$i \quad j \quad c$

$\downarrow$

$-k$

$\downarrow$

$+j$

$$\Delta\mathbf{v} = -\int_{0}^{t-t_0} dt'\,\frac{GM_J(\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_J+\mathbf{v}_0t')}{|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_J+\mathbf{v}_0t'|^3}$$

$t' = t - t_0$

∴ ~~$v^{(0)} = c\,n \quad |n| = 1$~~

ここで

$$n_0 = \frac{v_0}{c}$$

$$r_{0J} = x_0 - x_J \quad , \quad r_J = x^{(0)} - x_J = r_{0J} + c\,n_0 (t - t_0)$$

$$s_{0J} = r_{0J} \times n_0 = \frac{r_{0J} \times v_0}{c}$$

などとおくと

$$\Delta v = -GM_J \left[\frac{x_0 - x_J + v_0 t'}{|x_0 - x_J + v_0 t'|} \right]_0^{t-t_0} \times \frac{(x_0 - x_J) \times v_0}{|(x_0 - x_J) \times v_0|^2}$$

$$= -GM_J \left(\frac{r_J}{r_J} - \frac{r_{0J}}{r_{0J}} \right) \times \frac{c\,s_{0J}}{c^2 s_{0J}^2}$$

$$= -\frac{GM_J}{c} \left(\frac{r_J}{r_J} - \frac{r_{0J}}{r_{0J}} \right) \times \frac{s_{0J}}{s_{0J}^2}$$

もう1回積分しよう

大公式集より 2.261, 2.264.2 より

$$\int \frac{d + et}{\sqrt{a + 2bt + ct^2}}\,dt = \frac{e\sqrt{a + 2bt + ct^2}}{c} + \left(d - \frac{b}{c} e\right) \frac{1}{\sqrt{c}} \ln\left(2\sqrt{c}\sqrt{a + 2bt + ct^2} + 2ct + 2b\right)$$

$$= \frac{1}{c} \left[e\sqrt{a + 2bt + ct^2} + (cd - be) \frac{1}{\sqrt{c}} \ln\left\{ \sqrt{c}\sqrt{a + 2bt + ct^2} + ct + b \right\} \right]$$

から $c \leftarrow b^2,\ a \leftarrow a^2,\ b \leftarrow a \cdot b,\ d \leftarrow a,\ e \leftarrow b$

公式

$$\int \frac{a + bt}{|a + bt|}\,dt = \frac{b}{|b|^2} |a + bt| + \frac{b \times (a \times b)}{|b|^3} \ln\left[|b||a + bt| + b \cdot (a + bt) \right]$$

を用いると

$$\Delta x = -\frac{GM_J}{c} \left[\frac{v_0}{|v_0|^2} |x_0 - x_J + v_0 t'| + \frac{v_0 \times ((x_0 - x_J) \times v_0)}{|v_0|^3} \ln\left\{ |v_0||x_0 - x_J + v_0 t'| + v_0 \cdot (x_0 - x_J + v_0 t') \right\} - \frac{x_0 - x_J}{|x_0 - x_J|} t' \right]_0^{t-t_0} \times \frac{s_J}{s_J^2}$$

$n_0 = |\mathbf{n}_0|$

つまり

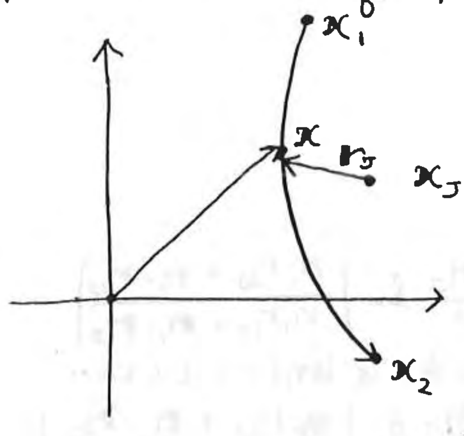
$$\Delta \mathbf{x} = \frac{-GM_J}{c}\left[\frac{\mathbf{n}_0}{c}(r_J - r_{0J}) + \frac{\mathbf{n}_0 \times \mathbf{S}_{0J}}{c} \ln \left| \frac{n_0 r_J + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_J}{n_0 r_{0J} + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_{0J}} \right| - \frac{\mathbf{r}_{0J}}{r_{0J}}(t - t_0) \right] \times \frac{\mathbf{S}_{0J}}{S_J^2}$$

この $\Delta \mathbf{x}$, $\Delta \mathbf{v}$ を用いて

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}_0 + c\mathbf{n}_0 (t - t_0) + (1+\gamma)\left[\Delta \mathbf{x} - 2(\mathbf{n}_0 \cdot \Delta \mathbf{x})\mathbf{n}_0\right] \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)} = c\mathbf{n}_0 + (1+\gamma)\left[\Delta \mathbf{v} - 2(\mathbf{n}_0 \cdot \Delta \mathbf{v})\mathbf{n}_0\right] \end{cases}$$

これが 1次の解　（2次の解は Richter & Matzner 198? にある）

▷ 光差方程式　eq. of light time　(Shapiro's delay)



今 $t = t_1$ に $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ を発した光が $t = t_2$ に $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$ に到着したとすると

$\mathbf{v}_1 = c\mathbf{n}_1$

$$\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1(t_2 - t_1) + (1+\gamma)\left[\Delta \mathbf{x}_{21} - 2(\mathbf{n}_1 \cdot \Delta \mathbf{x}_{21})\mathbf{n}_1\right]$$

$$\Delta \mathbf{x}_{21} = \frac{-GM_J}{c^2}\left[\mathbf{n}_1 (r_{2J} - r_{1J}) + \mathbf{n}_1 \times \mathbf{S}_{1J} \ln \left| \frac{n_1 r_{2J} + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_{2J}}{n_1 r_{1J} + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_{1J}} \right| - c\frac{\mathbf{r}_{1J}}{r_{1J}}(t_2 - t_1) \right] \times \frac{\mathbf{S}_0}{S_J^2}$$

2乗を ~~絶対値~~ をとると

$$r_{21}^2 = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2 = \cancel{c^2(t_2 - t_1)^2 - 2(1+\gamma)}$$

$$= c^2 n_1^2 (t_2 - t_1)^2 + 2(1+\gamma)\cdot 2(\Delta \mathbf{x}_{21} \cdot c\mathbf{n}_1)(t_2 - t_1)$$
$$- 2(1+\gamma)(\mathbf{n}_1 \cdot \Delta \mathbf{x}_{21})(\mathbf{n}_1 \cdot c\mathbf{n}_1)(t_2 - t_1) + O(|\Delta \mathbf{x}_{21}|^2)$$

$n_1^2 \sim 1$ より

$$\cong c^2 n_1^2 (t_2 - t_1)^2 - 2(1+\gamma)(\Delta \mathbf{x}_{21} \cdot c\mathbf{n}_1)(t_2 - t_1)$$

$$\therefore\ r_{21} = c n_1 (t_2 - t_1) - (1+\gamma)\, \mathbf{n}_1 \cdot \Delta \mathbf{x}_{21}$$

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}$$

$$(\mathbf{n}_{\circ}\times\mathbf{s})\times\mathbf{s} = (\mathbf{s}\cdot\mathbf{n})\mathbf{s} - s^2\mathbf{n}$$

さて

$$\mathbf{s}_{1J} = \mathbf{r}_{1J}\times\mathbf{n}_1$$

$$\mathbf{n}_1\cdot(\mathbf{n}_1\times\mathbf{s}_{1J}) = 0 \quad \overset{\shortparallel}{0}$$

$$\mathbf{n}_1\cdot\{(\mathbf{n}_1\times\mathbf{s}_{1J})\times\mathbf{s}_{1J}\} = (\mathbf{s}_{1J}\cdot\mathbf{n}_1)^2 - s_{1J}^2 n_1^2 \sim -s_{1J}^2 \qquad (n_1^2\sim 1)$$

$$\mathbf{n}_1\cdot(\mathbf{r}_{1J}\times\mathbf{s}_{1J}) = -s_{1J}^2$$

より

$$\mathbf{n}_1\cdot\Delta\boldsymbol{x}_{21} = \frac{GM_J}{c^2}\left[+\ln\left|\quad\right| - c\frac{t_2-t_1}{r_{1J}}\right]$$

$$\therefore\ r_{21} = c n_1(t_2-t_1) - (1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\ln\left|\quad\right| + (1+\gamma)\frac{GM_J}{c}\frac{t_2-t_1}{r_{1J}}$$

$$= c\left\{n_1 + (1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\cdot\frac{1}{r_{1J}}\right\}(t_2-t_1) - (1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\ln\left|\quad\right|$$

さて 拘束より

$$n_1 = 1 - (1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\cdot\frac{1}{r_{1J}} \quad \text{より}$$

$$\{\qquad\} = 1$$

$$\therefore\ c(t_2-t_1) = r_{21} + (1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\ln\left|\frac{n_1 r_{2J} + \mathbf{n}_1\cdot\mathbf{r}_{2J}}{n_1 r_{1J} + \mathbf{n}_1\cdot\mathbf{r}_{1J}}\right|$$

今までの議論 Δx は GM_J について linear | $\ln$ 中では $|\mathbf{n}_1|\simeq 1$ としてよい

$$= r_{21} + (1+\gamma)\sum_J\frac{GM_J}{c^2}\ln\left|\frac{r_{2J} + \mathbf{n}_1\cdot\mathbf{r}_{2J}}{r_{1J} + \mathbf{n}_1\cdot\mathbf{r}_{1J}}\right|$$

$$\boxed{c(t_2-t_1) = r_{21} + (1+\gamma)\sum_J\frac{GM_J}{c^2}\ln\left|\frac{r_{2J} + \mathbf{n}_1\cdot\mathbf{r}_{2J}}{r_{1J} + \mathbf{n}_1\cdot\mathbf{r}_{1J}}\right|}$$

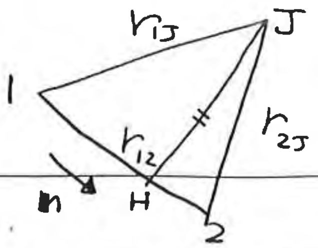
光の遅れ ← 遅れ

gravitational delay of light time

$$r_{21} = |\boldsymbol{x}_2(t_2) - \boldsymbol{x}_1(t_1)|$$

$$r_{2J} = |\boldsymbol{x}_2(t_2) - \boldsymbol{x}_J(t_1)|,\quad \mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{c} \sim \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}}$$

$$r_{1J} = |\boldsymbol{x}_1(t_1) - \boldsymbol{x}_J(t_1)|$$



さて

$$JH^2 = r_{2J}^2 - (\mathbf{r}_{2J}\cdot\mathbf{n})^2 = r_{1J}^2 - (\mathbf{r}_{1J}\cdot\mathbf{n})^2$$

$$\therefore\quad \frac{r_{2J}+\mathbf{r}_{2J}\cdot\mathbf{n}}{r_{1J}+\mathbf{r}_{1J}\cdot\mathbf{n}} = \frac{r_{1J}-\mathbf{r}_{1J}\cdot\mathbf{n}}{r_{2J}-\mathbf{r}_{2J}\cdot\mathbf{n}}$$

加比の理 分子分母加えても 比は同じだから
両辺加

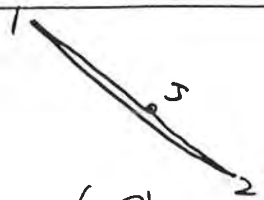
$$= \frac{r_{1J}+r_{2J}+\mathbf{r}_{2J}\cdot\mathbf{n}-\mathbf{r}_{1J}\cdot\mathbf{n}}{r_{1J}+r_{2J}+\mathbf{r}_{1J}\cdot\mathbf{n}-\mathbf{r}_{2J}\cdot\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{r}_{2J}\cdot\mathbf{n}-\mathbf{r}_{1J}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{r}_{21}\cdot\mathbf{n} = r_{21}$$

$$\therefore\quad = \frac{r_{1J}+r_{2J}+r_{12}}{r_{1J}+r_{2J}-r_{12}}$$

$$\therefore\quad \boxed{c(t_2-t_1) = r_{21} + (1+\gamma)\sum_J \frac{GM_J}{c^2}\ln\left|\frac{r_{1J}+r_{2J}+r_{12}}{r_{1J}+r_{2J}-r_{12}}\right|}$$ 12/4

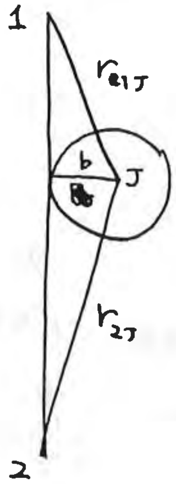
$r_{1J}+r_{2J}\sim r_{12}$



のときに 付加項 delay

光差方程式 Shapiro delay (Shapiro 1964)

▷ 天体の縁 ~~grazing ray のとき~~ r_{12}までの距離 (impact parameter をbとする)



$$r_{21} = \sqrt{r_{1J}^2-b^2}+\sqrt{r_{2J}^2-b^2}$$

lnの中味

$$\frac{r_{1J}+r_{2J}+\sqrt{}+\sqrt{}}{r_{1J}+r_{2J}-\sqrt{}-\sqrt{}}$$

$r_{2J}, r_{1J} \gg b$ とする

~~分子 分母~~ $\sqrt{r_{1J}^2-b^2} = r_{1J}\sqrt{1-\left(\frac{b}{r_{1J}}\right)^2} \sim r_{1J} - \frac{b^2}{2r_{1J}} + \cdots$

$$\therefore\ \text{lnの中味} \simeq \frac{2(r_{1J}+r_{2J})}{\frac{b^2}{2r_{1J}}+\frac{b^2}{2r_{2J}}} \sim \frac{4r_{1J}r_{2J}}{b^2}$$

これより $c\Delta_J t \cong (1+\gamma)\dfrac{GM_J}{c^2}\ln\left(\dfrac{4r_{1J}r_{2J}}{b^2}\right)$

$$\cong (1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\left(\underset{\substack{\wr\\ 1.39}}{\ln 4} + \ln\frac{r_{1J}}{b} + \ln\frac{r_{2J}}{b}\right)$$

・太陽 の場合

$b_{min} = R_\odot \sim 6.96\times10^8 m$

2= 地球 のとき	$r_{2J} \sim 1AU$	$\sim 1.50\times10^{11} m$	$\ln\frac{r_{2J}}{R_\odot} \sim 5.37$
1= 金星 〃	$r_{1J} \sim 0.72AU$	$\sim 1.08\times10^{11} m$	~ 5.05
火星 〃	$\sim 1.52AU$	$\sim 2.28\times10^{11} m$	~ 5.79

$\dfrac{GM_S}{c^2} \sim 1476 m$

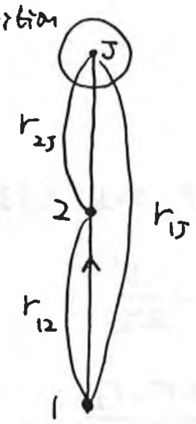
$$c\Delta_S t \cong 2\cdot1476\times\left(1.39 + \underbrace{5.37 + \begin{matrix}5.05 & ♀\\ 5.79 & ♂\end{matrix}}_{\substack{11.81\\ 12.55}}\right)$$

$\sim$ 34.86 km
37.05 km

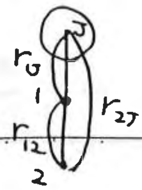
1ns = 30 cm
1μs = 300 m
1ms = 300 km

往復で 0.23-0.25 ms ほど遅れる （内合で）

▷ 火星 衝では？
opposition



金星 内合
inferior conjunction



$$c\Delta_J t = (1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\ln\left|\frac{r_{1J}+r_{2J}+r_{12}}{r_{1J}+r_{2J}-r_{12}}\right|$$

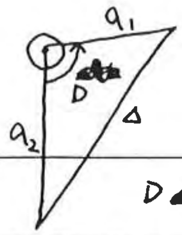
外合で $r_{1J} = r_{2J} + r_{12}$ ∴ 分子 $2r_{2J}$
分母 $2r_{1J}$

∴ $c\Delta_J t = (1+\gamma)\dfrac{GM_J}{c^2}\ln\dfrac{r_{1J}}{r_{2J}}$ 衝

$\ln\dfrac{r_{2J}}{r_{1J}}$ 内合

火 1.52 ; ln 0.42
金 $\dfrac{1}{0.72} = 1.39$; 0.33

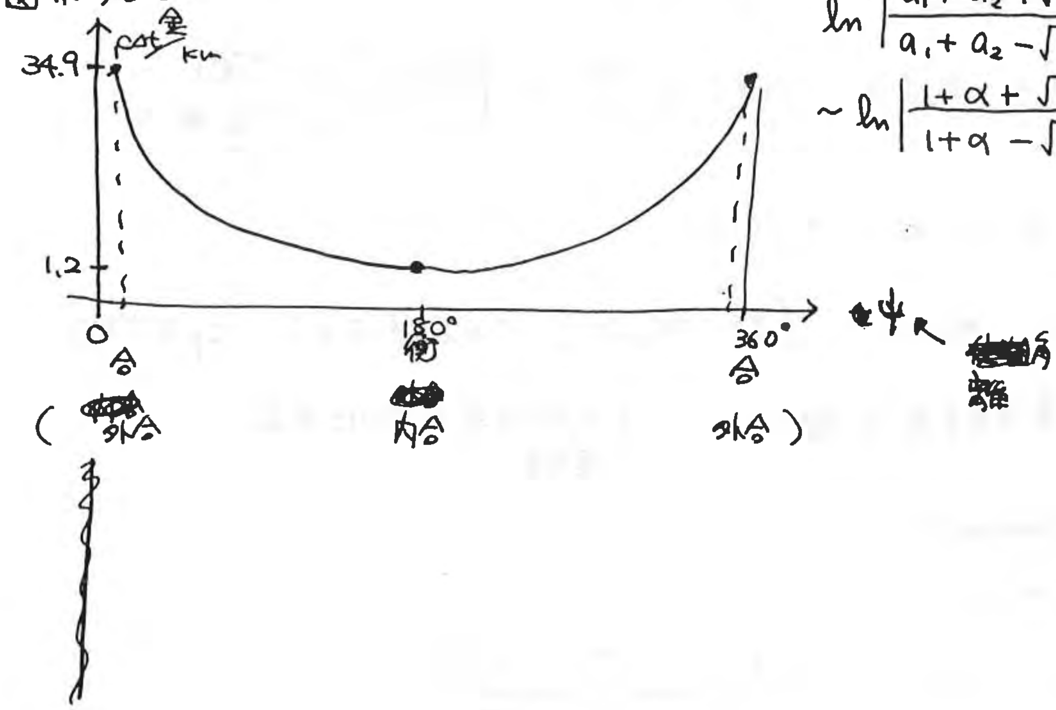
結局 $c\Delta_S t$ （火星・衝） 1.24 km
（金星 内合） 0.97 km
（どこでも その方向 遅れる !!）



$$\Delta = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos D}$$

$$D \propto (n_1 - n_2)t$$

図示すると



$$\ln\left|\frac{a_1 + a_2 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos D}}{a_1 + a_2 - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos D}}\right|$$

$$\sim \ln\left|\frac{1+\alpha + \sqrt{1+\alpha^2 - 2\alpha\cos D}}{1+\alpha - \sqrt{1+\alpha^2 - 2\alpha\cos D}}\right|$$

▷ 光差方程式の解法

$$c(t_2 - t_1) = r_{21} + (1+\gamma)\sum_J \frac{GM_J}{c^2} \ln\left|\frac{r_{1J} + r_{2J} + r_{21}}{r_{1J} + r_{2J} - r_{21}}\right|$$

$$r_{21} = |\boldsymbol{x}_2(t_2) - \boldsymbol{x}_1(t_1)|$$

t_2, $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t)$, (及び $\boldsymbol{x}_J(t)$) が与えられたとき t_1 を求める

↓

光差方程式を解く　（光方向を求めるのに必要）
視位置

Newton - Raphson 法

$$t_1^{(0)} = t_2$$

$$t_1^{(1)} = t_1^{(0)} - \frac{c(t_2 - t_1^{(0)}) - r_{12}^{(0)}}{c + \boldsymbol{v}_1^{(0)} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_{12}^{(0)}}$$

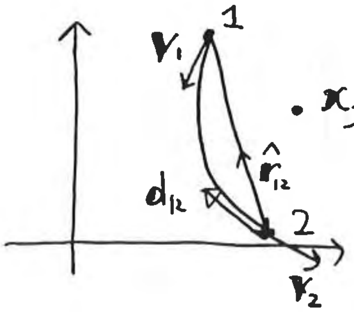
$$= t_2 + \frac{|\boldsymbol{x}_2(t_2) - \boldsymbol{x}_1(t_2)|}{c + \boldsymbol{v}_1(t_2) \cdot \frac{\boldsymbol{x}_1(t_2) - \boldsymbol{x}_2(t_2)}{|\boldsymbol{x}_2(t_2) - \boldsymbol{x}_1(t_2)|}}$$

$$= t_2 + \frac{r_{12}^{(0)\,2}}{c\, r_{12}^{(0)} + \boldsymbol{v}_1(t_2) \cdot \{\boldsymbol{x}_1(t_2) - \boldsymbol{x}_2(t_2)\}}$$

$$t_1^{(2)} = t_1^{(1)} - \frac{c(t_2 - t_1^{(1)}) - r_{12}^{(1)} - (1+\gamma)\sum \frac{GM}{c^2} \ln|\ \ |}{c + \boldsymbol{v}_1(t_1^{(1)}) \cdot \boldsymbol{r}_{12}^{(1)}}$$

↑
ポスト・~~ニュートン~~ ガリレイ の order で正しい

▷ 光~~[illegible]~~方向



x_2での光の到達方向 $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d}_{12} = -\frac{\mathbf{V}_2}{|V_2|}$$

$$\mathbf{V}_1 = c\,\mathbf{n}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + (1+\gamma)\left[\Delta\mathbf{V} - 2(\mathbf{n}_1\cdot\Delta\mathbf{V})\,\mathbf{n}_1\right]$$

$$\Delta\mathbf{V} = \sum \frac{GM_J}{c}\,\frac{\mathbf{S}_{1J}}{|S_{1J}^2|}\times\left(\frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}} - \frac{\mathbf{r}_{1J}}{r_{1J}}\right)$$

これより

$$\cancel{-\mathbf{d}_{12} = \frac{\mathbf{V}_2}{|V_2|}}$$

$$|V_2|^2 = \mathbf{V}_1^2 + 2\mathbf{V}_1\cdot(1+\gamma)[\quad] + (1+\gamma)^2[\quad]^2$$

↳ ネグる

$$= V_1^2 + 2(1+\gamma)\left\{\mathbf{V}_1\cdot\Delta\mathbf{V} - 2(\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{n}_1)(\mathbf{n}_1\cdot\Delta\mathbf{V})\right\}$$

$$\mathbf{V}_1\cdot\Delta\mathbf{V}\,(1 - 2n_1^2)$$

↳ $\frac{\mathbf{V}_1^2}{c^2} \sim 1 + O\left(\frac{v}{c}\right)$

$$\simeq V_1^2 - 2(1+\gamma)\,\mathbf{V}_1\cdot\Delta\mathbf{V}$$

$$V_2 \simeq V_1 - (1+\gamma)\,\mathbf{n}_1\cdot\Delta\mathbf{V}$$

$$-\mathbf{d}_{12} = \frac{\mathbf{V}_2}{V_2} = \frac{\mathbf{V}_1 + (1+\gamma)\left[\Delta\mathbf{V} - 2(\mathbf{n}_1\cdot\Delta\mathbf{V})\mathbf{n}_1\right]}{V_1 - (1+\gamma)\,\mathbf{n}_1\cdot\Delta\mathbf{V}}$$

$$\simeq \frac{\mathbf{V}_1}{V_1} + (1+\gamma)\left\{\frac{\Delta\mathbf{V}}{V_1} - 2\left(\mathbf{n}_1\cdot\frac{\Delta\mathbf{V}}{V_1}\right)\mathbf{n}_1\right\} + (1+\gamma)\,\frac{\mathbf{n}_1\cdot\Delta\mathbf{V}}{V_1^2}\cdot\mathbf{V}_1$$

$$\simeq \frac{\mathbf{V}_1}{V_1} + (1+\gamma)\left[\frac{\Delta\mathbf{V}}{c} - \left(\mathbf{n}_1\cdot\frac{\Delta\mathbf{V}}{c}\right)\mathbf{n}_1\right] \qquad V_1 \sim c \quad \frac{\mathbf{V}_1}{V_1} \sim \mathbf{n}_1 +$$

$$\simeq \frac{\mathbf{V}_1}{V_1} + (1+\gamma)\,\mathbf{n}_1\times\left(\frac{\Delta\mathbf{V}}{c}\times\mathbf{n}_1\right)$$

$(a\times b)\times c = (a\cdot c)b - (b\cdot c)a$
$= c\times(b\times a)$

一方 $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{21} = x_2 - x_1 = \mathbf{V}_1(t_2 - t_1) + (1+\gamma)\left[\Delta x - 2(\mathbf{n}_1\cdot\Delta x)\,\mathbf{n}_1\right]$

同様にして

$$-\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{\mathbf{V}_1}{V_1} + (1+\gamma)\,\mathbf{n}_1\times\left(\frac{\Delta x}{r_{12}}\times\mathbf{n}_1\right)$$

際　交文

No. 6-10

Date

$$(a\times b)\times c = (a\cdot c)b-(b\cdot c)a$$

両辺を見比べて

$$\boldsymbol{d}_{12}=\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}}+(1+\gamma)\,\boldsymbol{n}_1\times\left\{\left(\frac{\Delta\boldsymbol{x}}{r_{12}}-\frac{\Delta\boldsymbol{V}}{c}\right)\times\boldsymbol{n}_1\right\}$$

一方

$$\Delta\boldsymbol{V}=\sum_J\frac{GM_J}{c}\frac{\boldsymbol{s}_{1J}}{|\boldsymbol{s}_{1J}|^2}\times\left(\frac{\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J}}-\frac{\boldsymbol{r}_{1J}}{r_{1J}}\right)$$

$$\Delta\boldsymbol{x}=\sum_J\frac{GM_J}{c^2}\frac{\boldsymbol{s}_{1J}}{|\boldsymbol{s}_{1J}|^2}\times\left[(r_{2J}-r_{1J})\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{s}_{1J}\ln\left|\text{———}\right|-\frac{\boldsymbol{r}_{1J}}{r_{1J}}c(t_2-t_1)\right]$$

より

$$\left(\frac{\Delta\boldsymbol{x}}{r_{12}}-\frac{\Delta\boldsymbol{V}}{c}\right)\times\boldsymbol{n}_1=\sum_J\frac{GM_J}{c^2}\left\{\frac{\boldsymbol{s}_{1J}}{|\boldsymbol{s}_{1J}|^2}\times\left[\frac{r_{2J}-r_{1J}}{r_{12}}\boldsymbol{n}_1+\frac{\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{s}_{1J}}{r_{12}}\ln\left|\text{——}\right|-\frac{\boldsymbol{r}_{1J}}{r_{1J}}\frac{c(t_2-t_1)}{r_{12}}-\frac{\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J}}+\frac{\boldsymbol{r}_{1J}}{r_{1J}}\right]\right\}\times\boldsymbol{n}_1$$

キャンセル

$$c(t_2-t_1)=r_{12}+O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2 r_{12}\right)$$ より

$$\boldsymbol{s}_{1J}=\boldsymbol{r}_{1J}\times\boldsymbol{n}_1$$

$$(\boldsymbol{s}_{1J}\times\boldsymbol{n}_1)\times\boldsymbol{n}_1=-\boldsymbol{s}_{1J}$$

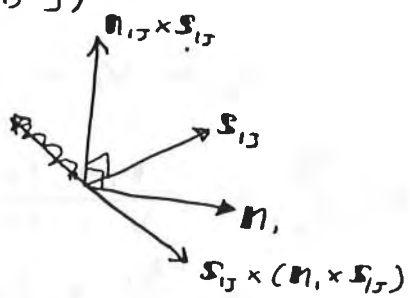
$$\parallel$$

$$(\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{r}_{1J}$$

$$\{\boldsymbol{s}_{1J}\times(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{s}_{1J})\}\times\boldsymbol{n}_1=0$$

$$\parallel$$

$$s_{1J}^2\,\boldsymbol{n}_1-\underset{\overset{\parallel}{0}}{(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{s}_{1J})}\boldsymbol{s}_{1J}$$



$$\begin{aligned}(\boldsymbol{s}_{1J}\times\boldsymbol{r}_{2J})\times\boldsymbol{n}_1&=((\boldsymbol{r}_{1J}\times\boldsymbol{n}_1)\times\boldsymbol{r}_{2J})\times\boldsymbol{n}_1\\&=((\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{r}_{2J})\boldsymbol{n}_1-(\boldsymbol{r}_{2J}\cdot\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{r}_{1J})\times\boldsymbol{n}_1\\&=-(\boldsymbol{r}_{2J}\cdot\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{s}_{1J}\end{aligned}$$

などより

$$=\sum_J\frac{GM_J}{c^2}\left[\frac{r_{2J}-r_{1J}}{r_{12}}-\frac{\boldsymbol{r}_{2J}\cdot\boldsymbol{n}_1}{r_{2J}}\right]\cdot\left(-\frac{\boldsymbol{s}_{1J}}{|\boldsymbol{s}_{1J}|^2}\right)$$

$r_{12} = V(x_2 - x_1) - (1+\gamma)\frac{GM}{c^2}\ln|\quad|$

$\mathbf{r}_{12} = x_1 - x_2 = V(x_2 - x_1) + (1+\gamma)[\Delta x - 2(\quad)\mathbf{n}_1]$

No. 6-11

Date . .

$+\ \left(\frac{v}{c}\right)^2,\ \frac{\Delta x}{r}$ のオーダー

$$\mathbf{n}_1 \sim -\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \text{ より}$$

$$\mathbf{r}_{13} - \mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_{12}$$

$$\mathbf{s}_{13} = \mathbf{r}_{13} \times \mathbf{n}_1 \simeq -\mathbf{r}_{13} \times \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \sim \frac{\mathbf{r}_{13} \times \mathbf{r}_{23}}{r_{12}}$$

$$\therefore\ s_{13}^2 \simeq \frac{1}{r_{12}^2}|\mathbf{r}_{13} \times \mathbf{r}_{23}|^2 = \frac{r_{13}^2 \cdot r_{23}^2 - (\mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_{23})^2}{r_{12}^2}$$

これより

$$-\frac{\mathbf{s}_{13}}{s_{13}^2}\left[\frac{r_{23} - r_{13}}{r_{12}} + \frac{\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{23}}{r_{12} r_{23}}\right]$$

$$\sim \frac{-\mathbf{r}_{13} \times \mathbf{r}_{23}}{r_{12}^2}\left(\frac{r_{23} - r_{13}}{r_{12}} + \frac{\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{23}}{r_{12} r_{23}}\right)$$

ところで $r_{12}^2 = r_{23}^2 + r_{13}^2 - 2\mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_{23}$

$$\sim \frac{-\mathbf{r}_{13} \times \mathbf{r}_{23}}{r_{12}^3}\left(\cancel{r_{23}} - r_{13} + \frac{\mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_{23}}{r_{23}} - \cancel{r_{23}}\right)$$

$$\sim \frac{r_{13}^2 r_{23}}{r_{12}^3}\frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}} \times \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}}\left(1 - \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}} \cdot \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}}\right)$$

$$\sim \frac{r_{13}}{r_{12}^3}\frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}} \times \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}}\left(r_{13} r_{23} - \mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_{23}\right)$$

$$\sim \frac{\mathbf{r}_{13}}{r_{13}} \times \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}}\ \frac{(r_{13} r_{23})^2 - (\mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_{23})^2}{r_{13} r_{23} + \mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_{23}}\ \frac{r_{13}}{r_{12}^3}$$

$$\mathbf{r}_{13} - \mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_{12}$$

$$\sim \frac{r_{12}^2}{r_{13}^2 r_{23}^2 - (\mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_{23})^2}\left[\frac{r_{23} - r_{13}}{r_{12}} + \frac{\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{23}}{r_{12}\, r_{23}}\right]\left(-\frac{\mathbf{r}_{13} \times \mathbf{r}_{23}}{r_{12}}\right)$$

$$\sim \frac{1}{r_{13}^2 r_{23}^2 - (\mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_{23})^2}\left[\cancel{r_{23}} - r_{13} + \frac{\mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_{23}}{r_{23}} - \cancel{r_{23}}\right]\left(-\mathbf{r}_{13} \times \mathbf{r}_{23}\right)$$

$$\sim \frac{1}{r_{23}}\frac{r_{13} r_{23} - \mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_{23}}{r_{13}^2 r_{23}^2 - (\mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_{23})^2}\left(\mathbf{r}_{13} \times \mathbf{r}_{23}\right)$$

$$= \frac{1}{r_{23}}\ \frac{\mathbf{r}_{13} \times \mathbf{r}_{23}}{r_{13} r_{23} + \mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{r}_{23}}$$

$(a\times b)\times c = (b\cdot c)a + (a\cdot c)b$

結局

$$\mathbf{d}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} + \left[(1+\gamma)\sum_J \frac{GM_J}{c^2}\frac{1}{r_{2J}}\,\frac{\frac{\mathbf{r}_{1J}}{r_{1J}}\times\frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}}}{1+\frac{\mathbf{r}_{1J}}{r_{1J}}\cdot\frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}}}\right]\times\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$$

Eq. of light deflection

12/11 ↑

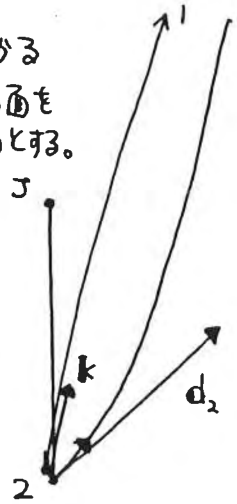
これは有限距離（e.g. 太陽系天体）の場合

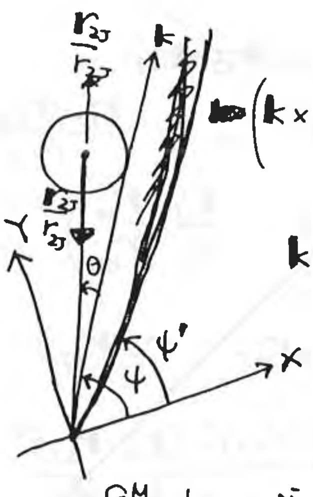
もし十分遠方なら $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{\mathbf{r}_{1J}}{r_{1J}}$ とおいて

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{k} + \left[(1+\gamma)\sum_J \frac{GM_J}{c^2}\frac{1}{r_{2J}}\,\frac{\mathbf{k}\times\frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}}}{1+\mathbf{k}\cdot\frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}}}\right]\times\mathbf{k}$$

▷図でわかる

△1-2-J の面を x-y 平面とする。





$$\left(\mathbf{k}\times\frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}}\right)\times\mathbf{k} = +\left(\frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}}\cdot\mathbf{k}\right)\mathbf{k} - \frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}}$$

$$\mathbf{k}\cdot\frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}} = -\cos\theta$$

$$\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2}$$

$$\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} - (1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\frac{1}{r_{2J}}\cdot\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\begin{pmatrix} -k_y \\ k_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\psi' \\ \sin\psi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} - \frac{(1+\gamma)}{2}\frac{r_{gJ}}{r_{2J}}\cot\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} -\sin\psi \\ \cos\psi \end{pmatrix}$$

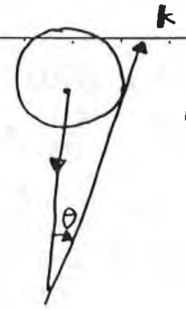
$$\therefore\ \psi' = \psi - \frac{1+\gamma}{2}\frac{r_{gJ}}{r_{2J}}\cot\frac{\theta}{2}$$

$$= \psi - \frac{1+\gamma}{2}\frac{r_{gJ}}{r_{2J}}\cot\frac{\psi-\varphi}{2}$$

$\psi+\theta = \varphi$

$\frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

$r_g = \dfrac{2GM}{c^2}$



実体 θ
見かけ θ+Δθ

太陽のとき 無限遠の☆に対して

$$\boxed{\Delta\psi = +\frac{1+\gamma}{2}\,\frac{r_{gJ}}{r_{2J}}\,\cot\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta_{min} = \frac{R_\odot}{r_{2J}} \simeq \frac{6.96\times10^8}{1.50\times10^{11}} \simeq 4.64\times10^{-3}$$

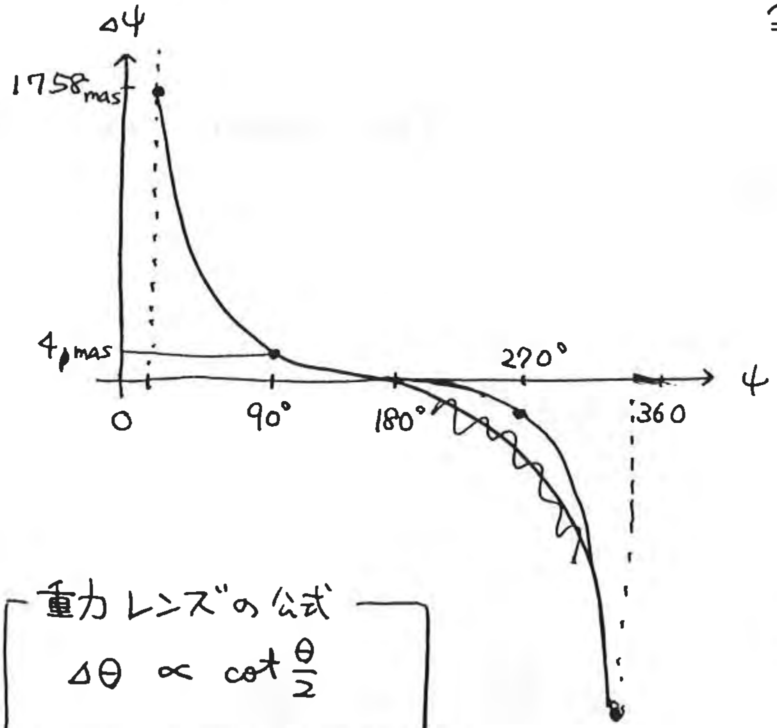
$$\left(\therefore\ \theta_{min} = 15'57''\right)$$

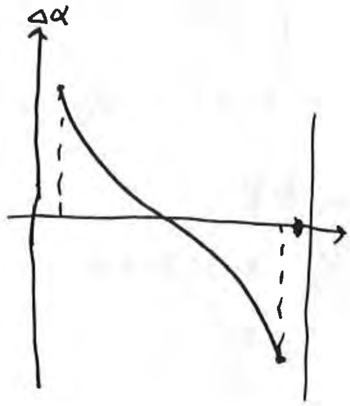
$$\tan\frac{\theta_{min}}{2} \sim \frac{1}{2}\sin\theta_{min} \sim 2.32\times10^{-3} \Rightarrow \cot\frac{\theta_{min}}{2} \sim 4.31\times10^2$$

$$\frac{r_{gJ}}{r_{2J}} \sim \frac{\overset{2.96}{\cancel{1.48}}\times10^3}{1.50\times10^{11}} \sim \overset{1.96}{\cancel{9.89}}\times10^{-8} \sim \overset{4.08}{\cancel{2.04}}\ \text{mas} \quad \left(\begin{array}{l}1\,\text{mas}\\ = 0.''001\\ \simeq 4.848\times10^{-9}\end{array}\right)$$

$$\therefore \Delta\psi_{max} = \frac{1+\gamma}{2}\,\frac{r_{gJ}}{r_{2J}}\,\cot\frac{\theta_{min}}{2} \simeq \overset{4.08\ \text{mas}}{\cancel{9.9\times10^{-9}}} \times 4.31\times10^2$$

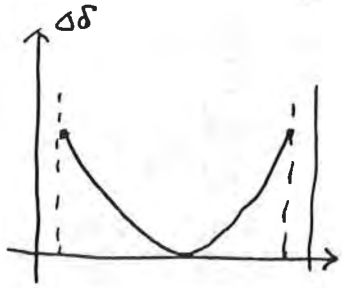
$$\simeq 1.''76$$





重力レンズの公式

$$\Delta\theta \propto \cot\frac{\theta}{2}$$



§7 ポスト・ニュートン近似

$$
\begin{cases}
g_{00} = -1 + \dfrac{2\phi}{c^2} + \dfrac{2\psi}{c^4} \\
g_{0j} = \quad 0 + \dfrac{g}{c^3} \\
g_{ij} = \delta_{ij} + \dfrac{2\gamma\phi}{c^2}\delta_{ij}
\end{cases}
$$

$\begin{pmatrix}\psi \\ g\end{pmatrix}$ の具体的な関数形については後で考える。

運動方程式を導こう。

▷ まず $g^{\mu\nu}$ を求める。

(さて
$$
\frac{dv^k}{dt} = \underset{O(\frac{1}{c^4})}{-c^2\Gamma^k_{00}} + \underset{(\frac{1}{c^3})}{c v^k \Gamma^0_{00}} - \underset{(\frac{1}{c^3})}{2 c v^j \Gamma^k_{0j}} + \underset{(\frac{1}{c^2})}{2 v^k v^j \Gamma^0_{0j}} - \underset{(\frac{1}{c^2})}{v^i v^j \Gamma^k_{ij}} + \underset{(\frac{1}{c}}{\frac{v^k v^i v^j}{c}\Gamma_{ij}}
$$
まで必要

$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu{}_\lambda$ より

明らかに

$$
\begin{cases}
g^{00} = -1 - \dfrac{2\phi}{c^2} + \cdots \\
g^{0j} = \quad - \dfrac{g_j}{c^3} \\
g^{ij} = \delta_{ij} - \dfrac{2\gamma\phi}{c^2}\delta_{ij}
\end{cases}
$$

(実は、この近似までで十分)

▷ $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ の計算

まず $\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}$ を計算する

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial g_{00}}{\partial x^0} = \dfrac{2\dot{\phi}}{c^3} + \cdots \\
\dfrac{\partial g_{0j}}{\partial x^0} = \dfrac{\dot{g}_j}{c^4} + \cdots \\
\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} = \dfrac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{ij} + \cdots \\
\dfrac{\partial g_{00}}{\partial x^k} = \dfrac{2a_k}{c^2} + \dfrac{2b_k}{c^4} + \cdots \\
\dfrac{\partial g_{0j}}{\partial x^k} = \dfrac{1}{c^3}\dfrac{\partial g_j}{\partial x^k} + \cdots \\
\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \dfrac{2\gamma a_k}{c^2}\delta_{ij} + \cdots
\end{cases}
$$

$(x^0 = ct)$

$a_k \equiv \dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}$, $b_k \equiv \dfrac{\partial\psi}{\partial x^k}$

これより

$$\frac{1}{c^3} : \Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{0\mu}\left(2\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + g^{0j}\left(2\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(-1)\frac{2\dot{\phi}}{c^3} + \left(-\frac{g_j}{c^3}\right)\left(2\frac{\dot{g}_j}{c^4} - \frac{2a_k}{c^2} - \frac{2b_k}{c^4}\right)\right]$$

$$= -\frac{\dot{\phi}}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right)$$

$$\frac{1}{c^2} : \Gamma^0_{0j} = \frac{1}{2} g^{0\mu}\left(\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} + g^{0l}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0l}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^l}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(-1)\left(\frac{2a_j}{c^2}\right) + \left(-\frac{g_l}{c^3}\right)\left(\frac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{lj} + \frac{1}{c^3}\left(\frac{\partial g_l}{\partial x^j} - \frac{\partial g_j}{\partial x^l}\right)\right)\right]$$

$$= -\frac{a_j}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

$$\frac{1}{c} : \Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2} g^{0\mu}\left(\frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\mu j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[g^{00}\left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0}\right) + g^{0l}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(-1)\left(\frac{1}{c^3}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x^j} + \frac{\partial g_j}{\partial x^i}\right) - \frac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{ij}\right) + \left(-\frac{g_l}{c^3}\right)\left(\frac{2\gamma a_j}{c^2}\delta_{il} + \frac{2\gamma a_i}{c^2}\delta_{lj} - \frac{2\gamma a_l}{c^2}\delta_{ij}\right)\right]$$

$$= O\left(\frac{1}{c^3}\right)$$

$$\frac{1}{c^4} : \Gamma^k_{00} = \frac{1}{2} g^{k\mu}\left(2\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[g^{k0}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + g^{kj}\left(2\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{g_k}{c^3}\right)\left(\frac{2\dot{\phi}}{c^3}\right) + \delta_{kj}\left(1 - \frac{2\gamma\phi}{c^2}\right)\left(2\frac{\dot{g}_j}{c^4} - \frac{2a_j}{c^2} - \frac{2b_j}{c^4}\right)\right]$$

$$= -\frac{a_k}{c^2} - \frac{1}{c^4}\left[b_k - 2\gamma\phi\, a_k - \dot{g}_k\right] + O\left(\frac{1}{c^6}\right)$$

$$\frac{1}{c^3} : \Gamma^k_{0j} = \frac{1}{2} g^{k\mu}\left(\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[g^{k0}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} + g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0l}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^l}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{g_k}{c^3}\right)\frac{2a_j}{c^2} + \delta^{kl}\left(\frac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{lj} + \frac{1}{c^3}\left(\frac{\partial g_l}{\partial x^j} - \frac{\partial g_j}{\partial x^l}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{c^3}\left[\gamma\dot{\phi}\,\delta_{kj} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_k}{\partial x^j} - \frac{\partial g_j}{\partial x^k}\right)\right] + O\left(\frac{1}{c^5}\right)$$

$$\frac{1}{c^2} : \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{k\mu}\left(\frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\mu j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[g^{k0}\left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0}\right) + g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{g_k}{c^3}\left(\frac{1}{c^3}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x^j} + \frac{\partial g_j}{\partial x^i}\right) - \frac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{ij}\right) + \delta^{kl}\frac{2\gamma}{c^2}\left(a_j\delta^{il} + a_i\delta^{lj} - a_l\delta^{ij}\right)\right]$$

$$= \frac{\gamma}{c^2}\left(a_j\delta^{ik} + a_i\delta^{jk} - a_k\delta^{ij}\right)$$

これより

$$\frac{dv^k}{dt} = -c^2\Gamma^k_{00} + c v^k\Gamma^0_{00} - 2c v^i\Gamma^k_{0i} + 2v^k v^i\Gamma^0_{0i} - v^i v^j\Gamma^k_{ij} + \frac{1}{c}v^k v^i v^j\Gamma^0_{ij}$$

$$= -c^2\left(-\frac{a_k}{c^2} - \frac{1}{c^4}\left\{b_k - 2\gamma\phi a_k - \dot{g}_k\right\}\right)$$

$$+ c v^k\left(-\frac{\dot{\phi}}{c^3}\right) - 2c v^i\left\{\frac{1}{c^3}\gamma\dot{\phi}\,\delta_{ki} + \frac{1}{2c^3}\left(\frac{\partial g_k}{\partial x^i} - \frac{\partial g_i}{\partial x^k}\right)\right\}$$

$$+ 2v^k v^i\left(-\frac{a_i}{c^2}\right) - v^i v^j\frac{\gamma}{c^2}\left(a_j\delta_{ik} + a_i\delta_{jk} - a_k\delta_{ij}\right)$$

$$+ \frac{1}{c}v^k v^i v^j$$

$$= a_k + \frac{1}{c^2}\Big[b_k - 2\gamma\phi a_k - \dot{g}_k - v^k\dot{\phi} - 2\gamma\dot{\phi}v^k$$
$$- v^i\left(\frac{\partial g_k}{\partial x^i} - \frac{\partial g_i}{\partial x^k}\right) - 2v^k v^i a_i - 2\gamma v^k v^j a_j + \gamma v^i v^i a_k\Big]$$

$$= a_k + \frac{1}{c^2}\Big[b_k + \gamma(v^2 - 2\phi)a_k - \dot{g}_k - (1+2\gamma)\dot{\phi}v^k - 2(1+\gamma)(v^i a_i)v^k$$
$$- v^i\left(\frac{\partial g_k}{\partial x^i} - \frac{\partial g_i}{\partial x^k}\right)\Big]$$

結論

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} + \frac{1}{c^2}\Big[\mathbf{b} + \gamma(\mathbf{v}^2 - 2\phi)\,\mathbf{a} - \dot{\mathbf{g}} - \{(1+2\gamma)\dot{\phi} + 2(1+\gamma)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\}\mathbf{v} + \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{g})\Big]}$$

ただし
$$\mathbf{a} = \nabla\phi$$
$$\mathbf{b} = \nabla\psi$$
$$(\mathbf{g})_j = c^3 g_{0j}$$

▷ ψ? $\mathbf{g}$?

fully PPN (標準PPNゲージ)

$$\psi = -\beta\phi^2 - \xi\Phi_W + \frac{1}{2}(2\gamma+2+\alpha_3+\zeta_1-2\xi)\phi_1 + (3\gamma-2\beta+1+\zeta_2+\xi)\phi_2 + (1+\zeta_3)\phi_3 + (3\gamma+3\zeta_4-2\xi)\phi_4 - \frac{1}{2}(\zeta_1-2\xi)\mathcal{A}$$

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2+\zeta_1-2\xi)\mathbf{V} - \frac{1}{2}(1+\alpha_2-\zeta_1+2\xi)\mathbf{W}$$

$$\phi_W \equiv \int \rho'\rho''\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\cdot\left(\frac{\mathbf{x}'-\mathbf{x}''}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}''|} - \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}''}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}''|}\right)d^3x'\,d^3x''$$

$$\phi_1 \equiv \int d^3x'\,\frac{\rho'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,\mathbf{v}'^2$$

$$\phi_2 \equiv \int d^3x'\,\frac{\rho'}{|\quad|}\,\phi' \qquad\qquad \phi' = \phi(\mathbf{x}')$$

$$\phi_3 \equiv \int d^3x'\,\frac{\rho'}{|\quad|}\,\Pi' \qquad\qquad \Pi:\ \text{internal energy}$$

$$\phi_4 \equiv \int d^3x'\,\frac{1}{|\quad|}\,p' \qquad\qquad p:\ \text{pressure}$$

$$\mathcal{A} \equiv \int d^3x'\,\frac{\rho'\{\mathbf{v}'\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\}^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} \qquad \left(\mathcal{B} = \int d^3x'\,\frac{\rho'\ \mathbf{a}'\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\right)$$

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt}$$

$$\mathbf{V} \equiv \int d^3x'\,\frac{\rho'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,\mathbf{v}'$$

$$\mathbf{W} \equiv \int d^3x'\,\frac{\rho'\ \mathbf{v}'\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

	major term	notion	meanings	GTR	B-D
γ :			space curvature	$+1$	$\frac{1+\omega}{2+\omega}$
β :	ϕ^2		non-linearity	$+1$	$+1$
ξ :	ϕ_w	Whitehead		0	0
α_1 :	$\mathbf{V}$			0	0
α_2 :	$\mathbf{W}$			0	0
α_3 :	ϕ_1			0	0
ζ_1 :	$\mathcal{A}$			0	0
ζ_2 :	ϕ_2			0	0
ζ_3 :	ϕ_3			0	0
ζ_4 :	ϕ_4			0	0

▷準アインシュタイン　(γ, β のみ残す)

このとき

$$\begin{cases} \psi = -\beta\phi^2 + (\gamma+1)\phi_1 + (3\gamma-2\beta+1)\phi_2 + \phi_3 + 3\gamma\phi_4 \\ g = -\frac{1}{2}(4\gamma+3)\mathbf{V} - \frac{1}{2}\mathbf{W} \end{cases}$$

$\mathcal{B} \equiv$

EIH ゲージ変換

$$\begin{cases} x_0 \to \tilde{x}_0 = x_0 + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial \chi}{\partial x^0} \\ x_i \to \tilde{x}_i = x_i \end{cases}$$

$$\chi(x) = \int d^3x' \rho' |x - x'|$$

superpotential

すると

$$\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0} = 1 + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 \chi}{(\partial x^0)^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2c^4}(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \phi_1)$$

$$\left(\therefore \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^0} \sim 1 + \frac{1}{2c^4}(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \phi_1)\right)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x^0} = \frac{1}{c}\int d^3x' \rho' \underbrace{\frac{d}{dt'}|x - x'|}$$

$$= -\frac{1}{c}\int d^3x' \rho' \frac{(x - x')\cdot \mathbf{v}'}{|x - x'|}$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{(\partial x^0)^2} = -\frac{1}{c^2}\int d^3x' \rho' \frac{d}{dt'}\left(\frac{(x - x')\cdot \mathbf{v}'}{|x - x'|}\right)$$

$$= -\frac{1}{c^2}\int d^3x' \rho' \left[\frac{\{(x - x')\cdot \mathbf{v}'\}^2}{|x - x'|^3} + \frac{(x - x')\cdot \mathbf{a}'}{|x - x'|} - \frac{\mathbf{v}'^2}{|x - x'|}\right]$$

$$= -\frac{1}{c^2}(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \phi_1)$$

$$\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^i} = \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^0 \partial x^i}$$

$$= \frac{1}{2c^3}\left[+\int d^3x' \rho' \frac{\mathbf{v}'}{|x - x'|} - \int d^3x' \rho' \frac{(x - x')\cdot \mathbf{v}'}{|x - x'|^3}(x - x')\right]$$

$$= +\frac{1}{2c^3}\mathbf{V} - \frac{1}{2c^3}\mathbf{W} \quad \left(\therefore \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^i} = -\frac{1}{2c}\mathbf{V} + \frac{1}{2c}\mathbf{W}\right)$$

このとき

$$g_{\tilde\alpha\tilde\beta} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\tilde\alpha}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\tilde\beta}}$$

$$E^\mu{}_{\tilde\alpha} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2c^4}(\mathcal{A}+\mathcal{B}-\phi_1) & -\frac{1}{2c^3}\boldsymbol{V}+\frac{1}{2c^3}\boldsymbol{W} \\ 0 & \underset{\sim}{1} \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} g_{\tilde i\tilde j} = g_{ij} \\ g_{\tilde 0\tilde j} = g_{0j} - \frac{1}{2c^3}\boldsymbol{V} + \frac{1}{2c^3}\boldsymbol{W} \\ g_{\tilde 0\tilde 0} = g_{00} - \frac{1}{c^4}(\mathcal{A}+\mathcal{B}-\phi_1) \end{cases}$$

結局

$$\begin{cases} \tilde\psi = \psi - \frac{1}{2}(\mathcal{A}+\mathcal{B}-\phi_1) \\ \tilde{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{2}\boldsymbol{V} + \frac{1}{2}\boldsymbol{W} \end{cases}$$

$\therefore$

$$\begin{cases} \tilde\psi = -\beta\phi^2 + (\gamma+\frac{3}{2})\phi_1 + (3\gamma-2\beta+1)\phi_2 + \phi_3 + 3\gamma\phi_4 - \frac{1}{2}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \\ \tilde{\boldsymbol{g}} = -(2\gamma+2)\boldsymbol{V} \end{cases}$$

▷ 静的 孤立系

static ⇒ $\boldsymbol{v}'=0$, $\boldsymbol{a}'=0$ ⇨ $\phi_1 = \mathcal{A} = \mathcal{B} = 0$, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W} = 0$

孤立系 & $\boldsymbol{v}'=0$ ⇨ $\dot\phi' = \dot\Pi' = \dot\rho' = 0$ より ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 は ϕ にくり込まれる。

このとき

$$\begin{cases} \tilde\psi = -\beta\phi^2 \\ \tilde{\boldsymbol{g}} = 0 \end{cases}$$

$\beta=1$ なら Schwarzschild の外部解（の PPN 近似）

$$\boldsymbol{b} = -2\beta\phi\nabla\phi = -2\beta\phi\,\boldsymbol{a}$$

また $\dot\phi = 0$

$$\therefore \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{a} + \frac{1}{c^2}\left[-2\beta\phi\,\boldsymbol{a} + \gamma(\boldsymbol{v}^2-2\phi)\boldsymbol{a} - 2(1+\gamma)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{v}\right]$$

$$= \boldsymbol{a} + \frac{1}{c^2}\left[\{\gamma\boldsymbol{v}^2-(2\gamma+2\beta)\phi\}\boldsymbol{a} - 2(1+\gamma)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{v}\right]$$

質点近似　　$\mu = GM$　　$x \to r\ (= x - x_J)$ 原点にとる

$$a = -\frac{\mu r}{r^3}\ ,\quad \phi = \frac{\mu}{r}$$

$$\frac{dv}{dt} = a - \frac{\mu r}{r^3}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left\{\gamma v^2 - (2\gamma + 2\beta)\frac{\mu}{r}\right\}\right] + \frac{2(1+\gamma)\mu}{c^2 r^3}(v\cdot r)v$$

↑ secular　　↑ periodic $\propto e$

(円運動のとき

$$\binom{\cos t}{\sin t}\left[1 + \text{const}\right] + 0$$

↑ 見かけの mass 減少

0次近似で)

Ries

実際，Kepler 運動だとすると

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

$$\therefore\ v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$$

$$\{\ \ \} = \gamma\left(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}\right) - (2\gamma + 2\beta)\frac{\mu}{r}$$

$$= -2\beta\frac{\mu}{r} - \gamma\frac{\mu}{a}$$

円運動なら　$\sim -(2\beta + \gamma)\dfrac{\mu}{a} \sim -3\dfrac{\mu}{a}$

⊙ の 地球近傍で 3×10^{-8}
⊕ の 地表 〃 3×10^{-10}

▷ 近点の移動

0次　$\dfrac{dv^{(0)}}{dt} = -\dfrac{\mu r^{(0)}}{r^{(0)3}}$　⇨ Kepler 運動

1次　$\dfrac{dv^{(1)}}{dt} = \cdots$　✕　見通し良くない

定数変化法

今

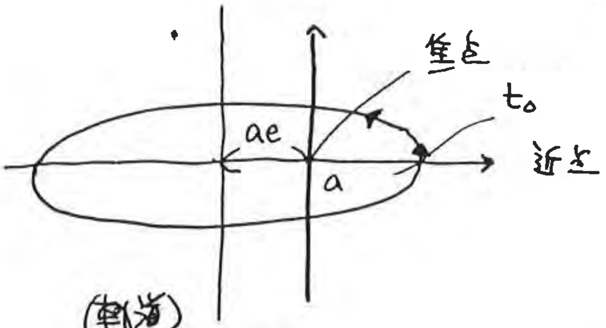
0次　$\dfrac{dE^{(0)}}{dt} = 0$　　1次　$\dfrac{dE^{(1)}}{dt} = f(E^{(0)}; t)$

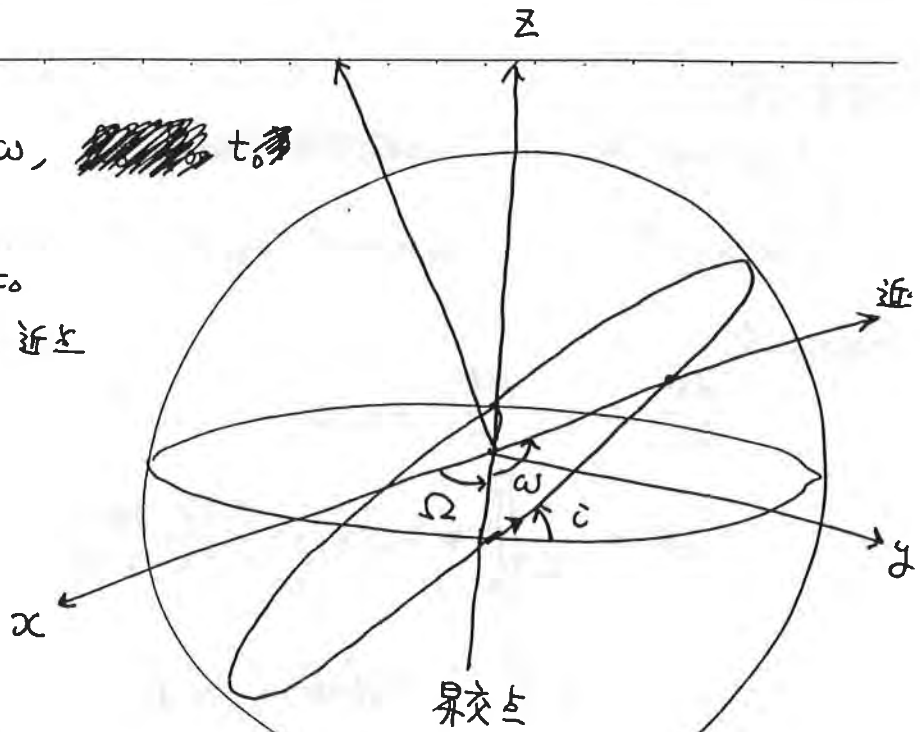
$r^{(0)} = r(E^{(0)}; t)$

$v^{(0)} = v(E^{(0)}; t)$

▷ Kepler 要素

$a,\ e,\ i,\ \Omega,\ \omega,\ t_0$





a: (軌道)長半径
semi-major axis

e: 離心率
eccentricity

i: (軌道)傾斜角 inclination

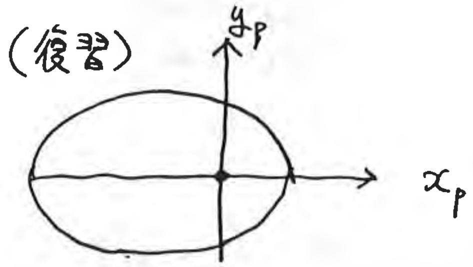
Ω: 昇交点経度 longitude of ascending node

ω: 近点引数 argument of pericenter (-helion 近日点, -gee 近地点) ⋮ 遠点 apocenter

オイラー角

t_0: 近点通過時刻 time of pericenter passage

(復習)



$t, E \rightarrow \mathbf{r}, \mathbf{v}$ explicitには書けない

1) $n = \sqrt{\mu / a^3}$: 平均運動 mean motion

2) $l = n(t - t_0)$: 平均近点角 mean anomaly

3) $u - e \sin u = l$

↳ uを解く

u: 離心近点角 eccentric anomaly

4) $x_p = a(\cos u - e)$

$y_p = a\sqrt{1-e^2}\sin u$

5) $r = a(1 - e\cos u)$

6) $\dot{u} = n/r$

7) $\dot{x}_p = -a\sin u \cdot \dot{u}$

$\dot{y}_p = a\sqrt{1-e^2}\cos u \cdot \dot{u}$

8) $\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = R_z(-\Omega) R_x(-i) R_z(-\omega) \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ 0 \\ \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ 0 \end{pmatrix}$

▷要素の変化

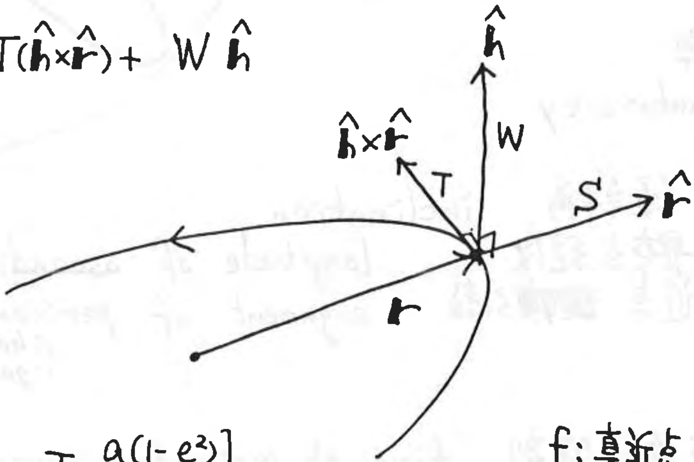
$$\begin{cases} \text{Lagrange 流} \\ \text{Gauss 流} \qquad \Delta \boldsymbol{a} = \Delta \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) \quad \text{given} \end{cases}$$

Gauss 流

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{\mu \boldsymbol{r}}{r^3} + \Delta \boldsymbol{a}$$

$$\Delta \boldsymbol{a} = \frac{1}{c^2}\left[\left\{\gamma \boldsymbol{v}^2 - 2(\gamma+\beta)\frac{\mu}{r}\right\}\left(-\frac{\mu \boldsymbol{r}}{r^3}\right) + 2(1+\gamma)\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mu \boldsymbol{r}}{r^3}\right)\boldsymbol{v}\right]$$

$$= S\hat{\boldsymbol{r}} + T(\hat{\boldsymbol{h}}\times\hat{\boldsymbol{r}}) + W\hat{\boldsymbol{h}}$$



S：動径方向
T：　？ 方向 ≒ 接線方向 ($\boldsymbol{v}$)
W：軌道面方向

このとき

$$\begin{cases}
\dfrac{da}{dt} = \dfrac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[S e \sin f + T\dfrac{a(1-e^2)}{r}\right] \\
\dfrac{de}{dt} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left[S\sin f + T(\cos f + \cos u)\right] \\
\dfrac{di}{dt} = \dfrac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} W\dfrac{r}{a}\cos(\omega+f) \\
\dfrac{d\omega}{dt} = -\cos i\dfrac{d\Omega}{dt} + \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-S\cos f + T\left(1+\dfrac{r}{a(1-e^2)}\right)\sin f\right] \\
\dfrac{d\Omega}{dt} = \dfrac{1}{na\sqrt{1-e^2}}\cdot\dfrac{1}{\sin i} W\dfrac{r}{a}\sin(\omega+f) \\
\dfrac{d l_0}{dt} = + \sqrt{1-e^2}\left(\dfrac{d\omega}{dt} + \cos i\dfrac{d\Omega}{dt}\right) + S\dfrac{2r}{na^2}
\end{cases}$$

f：真近点角

$$\begin{cases} x_p = r\cos f \\ y_p = r\sin f \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = \Delta a \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ T = \Delta a \cdot (\hat{\mathbf{h}} \times \hat{\mathbf{r}}) \\ W = \Delta a \cdot \hat{\mathbf{h}} \end{cases}$$ ただし $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$

まず

$W = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} = 0$ 軌道面の向きは不変!

$$S = \frac{1}{c^2}\left[\left\{\gamma \mathbf{v}^2 - 2(\gamma+\beta)\frac{\mu}{r}\right\}\left(-\frac{\mu}{r^2}\right) + 2(1+\gamma)\frac{\mu}{r^4}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v})^2\right]$$

$$T = 2(1+\gamma)\frac{1}{c^2}\frac{\mu}{r^3}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) \cdot \frac{|\mathbf{r}\times\mathbf{v}|}{r}$$

$$\left(\mathbf{v}\cdot(\hat{\mathbf{h}}\times\hat{\mathbf{r}}) = \hat{\mathbf{h}}\cdot(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{v}) = \frac{1}{r}\hat{\mathbf{h}}\cdot\mathbf{h} = \frac{h}{r}\right)$$

さて

エネルギー積分 $\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \Rightarrow \mathbf{v}^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$ $\mu = n^2a^3$

角運動量積分 $|\mathbf{r}\times\mathbf{v}| = h = r^2\dot{f} = 一定 = \sqrt{\mu a(1-e^2)} = na^2\sqrt{1-e^2}$

$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$ より $\dot{r} = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos f)^2} e \sin f \dot{f} = \frac{r^2 e}{a(1-e^2)}\sin f \dot{f}$

$\therefore \mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = r\dot{r} = \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}} r\sin f$ $= \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}}\sin f$

$$\therefore S = \frac{1}{c^2}\left[\left\{\gamma\left(\frac{2\mu}{r}-\frac{\mu}{a}\right) - 2(\gamma+\beta)\frac{\mu}{r}\right\}\left(-\frac{\mu}{r^2}\right) + \frac{2(1+\gamma)\mu}{\cancel{r^2}} \frac{n^2a^2\cancel{r^2}e^2\sin^2 f}{1-e^2}\right]$$

$$= \frac{\mu}{c^2}\left[2\beta\frac{\mu}{r^3} + \gamma\frac{\mu}{ar^2} + 2(1+\gamma)\frac{\mu}{ar^2}\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2 f\right]$$

$$= \frac{\mu}{c^2}\cdot\frac{\mu}{a^3}\cdot\left[2\beta\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \gamma\left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2(1+\gamma)\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2 f\right]$$

$$\left(\frac{a}{r} = \frac{1+e\cos f}{1-e^2} \text{ より}\right)$$

$$= \frac{\mu}{c^2}\cdot\frac{\mu}{a^3(1-e^2)^3}(1+e\cos f)^2\left[2\beta(1+e\cos f) + \gamma(1-e^2) + 2(1+\gamma)e^2\sin^2 f\right]$$

$$= \frac{\mu}{c^2}\cdot\frac{\mu}{a^3(1-e^2)^3}(1+e\cos f)^2\left[(2\beta+\gamma) + (\gamma+2)e^2 + 2\beta e\cos f - 2(1+\gamma)e^2\cos^2\right.$$

また

$$T = \frac{\mu}{c^2}\cdot\frac{2(1+\gamma)}{r^3}\frac{na\cancel{r}e}{\cancel{\sqrt{1-e^2}}}\sin f\left(\frac{na^2\cancel{\sqrt{1-e^2}}}{\cancel{r}}\right) = \frac{\mu}{c^2}\cdot\frac{\mu}{a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{1}{1-e^2}\left[\qquad\right]$$

$$= \frac{\mu}{c^2}\cdot\frac{\mu}{r^3}\,2(1+\gamma)e\sin f \qquad = \frac{\mu}{c^2}\cdot\frac{\mu}{a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^2\cdot\frac{1+e\cos f}{1-e^2}\cdot 2(1+\gamma)e\sin f$$

$$= \frac{\mu}{c^2}\cdot\frac{\mu}{a^3(1-e^2)^3}(1+e\cos f)^3\cdot 2(1+\gamma)e\sin f$$

これより

$$\cancel{\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{\mu}{c^2}\cdot\frac{\mu}{a^3(1-e^2)^3}\right\}(1+e\cos f)^2\left[\quad\right]e\sin f + (1+e\cos f)^3}$$

さて

$$r^2\dot{f} = na^2\sqrt{1-e^2} \qquad \text{（角運動量）}$$

より

$$dt = \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2 df$$

を用いると

$$\frac{da}{df} = \frac{da}{dt}\frac{dt}{df} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\mu}{c^2}\,\frac{\mu}{a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left\{\frac{e\sin f}{1-e^2}\left[(2\beta+\gamma)+\cdots\right] + \frac{1+e\cos f}{1-e^2}\cdot 2(1+\gamma)e\sin f\,\underbrace{\frac{a}{r}}_{1+e\cos f}(1+\cdots\right.$$

$$\times\frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2$$

$$= \frac{2}{n^2(1-e^2)}\cdot\frac{\mu}{c^2}\cdot\frac{\mu}{a^3}\,\frac{1}{1-e^2}\left\{\left[(2\beta+\gamma)+\cdots\right]e\sin f + 2(1+\gamma)e\sin f\,(1+e\cos f)^2\right\}$$

$$= \frac{2\mu e}{c^2(1-e^2)^2}\left\{\left((2\beta+\gamma)+(\gamma+2)e^2+2\beta e\cos f - \cancel{2(1+\gamma)e^2\cos^2 f}\right)\sin f + 2(1+\gamma)(1+2e\cos f+\cancel{e^2\cos^2 f})\sin f\right\}$$

$$= \frac{2\mu e}{c^2(1-e^2)^2}\left[(2+2\beta+3\gamma)\sin f + (\gamma+2)e^2\sin f + (4+2\beta+4\gamma)e\underbrace{\cos f\sin f}_{\frac{1}{2}\sin 2f}\right]$$

$$\therefore\ \Delta a = a - a_0 = \frac{2\mu e}{c^2(1-e^2)^2}\left[-\left\{(2+2\beta+3\gamma)+(\gamma+2)e^2\right\}\cos f - \frac{1}{2}(2+\beta+2\gamma)e\cos 2f\right]$$

$$\frac{r}{a} = \frac{1-e^2}{1+e\cos f}$$

次に

$$\frac{de}{df} = \frac{de}{dt}\frac{dt}{df} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\,\frac{\mu}{c^2}\,\frac{\mu}{a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left[\frac{\sin f}{1-e^2}\left\{(2\beta+\gamma)+\cdots\right\} + \frac{1+e\cos f}{1-e^2}\cdot 2(1+\gamma)e\sin f\right.$$

$$\left.\times\left\{\cos f + e + \frac{r}{a}\cos f\right\}\right]\times\frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^2 a}\,\frac{\mu}{c^2}\,\frac{\mu}{a^3}\,\frac{\sin f}{1-e^2}\left[(2\beta+\gamma)+(\gamma+2)e^2+2\beta e\cos f - 2(1+\gamma)e^2\cos^2 f\right.$$

$$\left. + 2(1+\gamma)e\left\{(1+e\cos f)(\cos f+e) + (1-e^2)\cos f\right\}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\cos f + e\cos^2 f + e + \cancel{e^2\cos f} + (1-\cancel{e^2})\cos f$$

$$\cancel{1+e-e^3}\ e + 2\cos f + e\cos^2 f$$

$$= \frac{1}{a(1-e^2)} \frac{\mu}{c^2} \sin f \Big[(2\beta+\gamma) + (\gamma+2)e^2 + 2\beta e\cos f - \cancel{2(1+\gamma)e^2\cos^2 f}$$

$$+ 2(1+\gamma)\, e^2 + 4(1+\gamma)\, e \cos f + \cancel{2(1+\gamma)e^2\cos^2 f} \Big]$$

$$= \frac{1}{a(1-e^2)} \frac{\mu}{c^2} \Big[\{2\beta+\gamma + (4+3\gamma)e^2\} \sin f + \beta(2+\beta+2\gamma)\, e \sin 2f \Big]$$

$$\therefore\ \overset{\delta e =}{e' - e_0} = \frac{\mu}{c^2 a(1-e^2)} \Big[-\{2\beta+\gamma + (4+3\gamma)e^2\}\cos f - \frac{1}{2}(2+\beta+2\gamma)\, e \cos 2f \Big]$$

さらに

$$\frac{d\omega}{df} = \frac{d\omega}{dt}\frac{dt}{df} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \Big\{ \frac{\mu}{c^2} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \Big[\frac{-\cos f}{1-e^2} \{(2\beta+\gamma)+\cdots\}$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{1+e\cos f}\right) \sin f \,\frac{1+e\cos f}{1-e^2} \cdot 2(1+\gamma)\, e \sin f \Big] \times \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^2 a e} \frac{\mu}{c^2} \frac{\mu}{a^3} \frac{1}{1-e^2} \Big[-\cos f \{(2\beta+\gamma)+\cdots\} + 2(1+\gamma)\, e \sin^2 f\, (2+e\cos f) \Big]$$

$$= \frac{\mu}{c^2 a e(1-e^2)} \Big[\big((2\beta+\gamma) + (\gamma+2)e^2 + 2\beta e\cos f - 2(1+\gamma)e^2\cos^2 f\big)(-\cos f)$$

$$+ 2(1+\gamma)\big(2e \underbrace{\sin^2 f}_{1-\cos^2 f} + e^2 \underbrace{\sin^2 f \cos f}_{\cos f - \cos^3 f} \big) \Big]$$

$$[\quad] = \big[-2\beta-\gamma - (\gamma+2)e^2 + 2(1+\gamma)e^2\big]\cos f$$

$$+ \big[-2\beta e - 4(1+\gamma)e\big] \underbrace{\cos^2 f}_{\frac{1+\cos 2f}{2}} + \cancel{\big[2(1+\gamma)e^2 - 2(1+\gamma)e^2\big]} \underbrace{\cos^3 f}_{\frac{\cos 3f + 3\cos f}{4}}$$

$$+ 4(1+\gamma)e$$

$$= (2+2\gamma-\beta)e + [-2\beta-\gamma + \gamma e^2]\cos f - e\,(2+2\gamma+\beta)\cos 2f$$

$$\cos^3 f = \cos f\,\frac{1+\cos 2f}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\cos f + \frac{1}{2}\underbrace{\cos f\cos 2f}_{\frac{1}{2}(\cos 3f + \cos f)} = \frac{1}{4}\cos 3f + \frac{3}{4}\cos f$$

よって

$$\Delta\omega = \omega' - \omega_0 = \frac{\mu}{c^2 a(1-e^2)\,e}\Big[(2+2\gamma-\beta)\,e f + (-2\beta-\gamma+\gamma e^2)\sin f - \frac{1}{2}e\,(2+2\gamma+\beta)\sin 2f\Big]$$

1周期平均

$\langle f\rangle = 2\pi \quad \langle \sin f\rangle = 0 \cdots$ より

$$\langle \Delta\omega(f)\rangle = \frac{\mu}{c^2 a(1-e^2)}(2+2\gamma-\beta)\cdot 2\pi.$$

$\gamma=\beta=1$ で

$$\frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)}$$ /周期 ずつ 近点が 前進(+)する

最後に

$$\cancel{\frac{dl_0}{df} = \frac{dl_0}{dt}\frac{dt}{df} = \sqrt{1-e^2}\frac{d\omega}{df} + \frac{2r}{na^2}\frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{1}{1-e^2}\{(2\beta+\gamma)+\dots\}\times\frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)}$$

$$\cancel{\frac{d}{df}\left(l_0-\sqrt{1-e^2}\,\omega\right) = \frac{1}{n^2(1-e^2)\sqrt{1-e^2}}\frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3}\cdot\frac{2}{a}}$$

$$\frac{dl_0}{dt} = \sqrt{1-e^2}\frac{d\omega}{dt} + S\frac{2r}{na^2}$$

$$S\frac{r}{a} = \frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3}\left[2\beta\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \gamma\frac{a}{r} + 2(1+\gamma)\frac{a}{r}\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2 f\right]$$

$$\frac{dt}{df} = \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad \frac{dt}{du} = \frac{r}{na}, \quad \sin f = \frac{a}{r}\sqrt{1-e^2}\sin u$$

$$\frac{r}{a} = 1-e\cos u, \quad \frac{a}{r} = \frac{1+e\cos f}{1-e^2}$$

$$\int\left(\frac{a}{r}\right)^2 dt = \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\int df = \frac{f}{n\sqrt{1-e^2}},$$

$$\int\left(\frac{a}{r}\right)dt = \frac{1}{n}\int du = \frac{u}{n}, \quad \int\frac{a}{r}\sin^2 f\,dt = (1-e^2)\int\left(\frac{a}{r}\right)^3\sin^2 u\,dt$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)\left[\gamma + 2\cdot(1+\gamma)\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2 f\right]$$

$$= \left(\frac{a}{r}\right)\left[\gamma + 2(1+\gamma)\frac{e^2}{1-e^2}\cdot(1-\cos^2 f)\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^2}\frac{a}{r}\left[\{\gamma(1-e^2)+2(1+\gamma)e^2\} - 2(1+\gamma)e^2\cos^2 f\right]$$

$$\gamma + (2+\gamma)e^2$$

$$= \frac{1}{1-e^2}\frac{a}{r}\left[-(2+\gamma)(1-e^2) + 2(1+\gamma)(1-e^2\cos^2 f)\right]$$

$$= \frac{a}{r}\left[-(2+\gamma) + 2(1+\gamma)\frac{1-e^2\cos^2 f}{1-e^2}\right]$$

$$\therefore\ S\frac{r}{a} = \frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3}\left[2\beta\left(\frac{a}{r}\right)^2 - (2+\gamma)\frac{a}{r} + 2(1+\gamma)\frac{a}{r}\frac{1-e^2\cos^2 f}{1-e^2}\right]$$

ここで $\int\left(\frac{a}{r}\right)^2 dt = \frac{f}{n\sqrt{1-e^2}}$, $\int\left(\frac{a}{r}\right)dt = \frac{u}{n}$

$$\int \frac{a}{r}(1-e^2\cos^2 f)\,dt = \int\left(\frac{a}{r}\right)^2(1-e\cos f)\,dt$$

$$= \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\int(1-e\cos f)\,df$$

$$= \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}(f - e\sin f)$$

より

$$\frac{2}{na}\int S\frac{r}{a}dt = \frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3}\cdot\frac{2}{na}\left[\frac{2\beta f}{n\sqrt{1-e^2}} - (2+\gamma)\frac{u}{n} + 2(1+\gamma)\frac{f-e\sin f}{n(1-e^2)\sqrt{1-e^2}}\right]$$

$$\therefore\ \Delta l_0 = l_0' - l_0 = \sqrt{1-e^2}\,\Delta\omega$$

$$+ \frac{2\mu}{c^2 a\sqrt{1-e^2}^3}\left[2\{1+\gamma+\beta-\beta e^2\}f - (2+\gamma)\sqrt{1-e^2}^3 u - 2(1+\gamma)e\sin f\right]$$

$$\therefore\ \langle\Delta l_0\rangle = \frac{2\mu}{c^2 a\sqrt{1-e^2}^3}\cdot 2\pi\cdot\left[2(1+\gamma+\beta-\beta e^2) - (2+\gamma)\sqrt{1-e^2}^3\right]$$

$$\frac{GM}{c^2 A_0} = \frac{1.476\times10^3}{1.496\times10^{11}} = 0.987\times10^{-8}$$

No. 7-15

Date

▷ 惑星の近日点(永年)移動

$$\langle\Delta\dot{\omega}\rangle = \frac{GM(2+2\gamma-\beta)}{c^2 a(1-e^2)}\,n \sim \frac{3GM_\odot}{c^2}\frac{n}{a(1-e^2)}$$

惑星	a	e	n "/cy	$\langle\Delta\dot{\omega}\rangle$ "/cy	$e\langle\Delta\dot{\omega}\rangle$ "/cy
☿	0.387	0.206	5.381×10^8	43.00	+8.86
♀	0.723	7	2.107	8.63	+0.06
⊕	1.000	17	1.296	3.84	+0.07
♂	1.524	93	06.89	1.35	+0.13
♃	5.203	49	0.109	0.06	+0.003
♄	9.555	56	0.044	0.01	
♅	19.22	46	0.015		
♆	30.11	9	0.0789		
♇	39.54	249	0.052		

Newcomb (1885)

	$e\Delta\dot{\omega}$ obs	Newton	diff
☿	118.24±0.40	109.76±0.16	+8.48±0.43
♀	0.29±0.20	0.34±0.15	−0.05±0.25
⊕	19.48±0.12	19.38±0.05	+0.10±0.13
♂	149.55±0.35	148.80±0.04	+0.75±0.35

ex.

$$\frac{3GM_\oplus}{c^2}\frac{n}{a(1-e^2)} \sim \frac{3\times4.44\times10^{-3}\times13.176\times3600\times36525}{3.844\times10^8\times(1-0.055^2)}$$

$$= 0.06\ \text{"/cy}$$

$$e\langle\Delta\dot{\omega}\rangle = 0.003\ \text{"/cy}$$

Duncomb (1956)

	$e\Delta\dot{\omega}$ obs	Newton	diff
☿	1151.593±0.084	1142.730±0.040	8.863±0.093
♀	34.529±0.032	34.472±0.006	0.057±0.033
⊕	103.604±0.020	103.520±0.004	0.084±0.020

integration of the PPN equations of motion that are presently used to produce the planetary ephemeris. The vectors $\vec{\xi}(t)$ and $\Xi(T)$ are found from the planetocentric coordinates of the station or the spacecraft and from rotation models of the planets. It should be remembered, however, that the spin rate of a planet is approximately constant only as a function of its own proper time, not of coordinate time. For the Earth, this means that the rotation models will be simpler functions of terrestrial time than of coordinate time. [It is, in fact, local atomic time (TAI) that is the independent variable in the detailed rotation models presently maintained by the Bureau Internationale de l'Heure.] For spacecraft ranging to the surface of Mars, the present constant-spin-rate model includes a correction from coordinate time to Mars proper time.

In modeling the time of flight, the position of the receiver is first looked up at the time of reception t using the ephemeris and rotation model of the Earth. An iterative procedure then uses the ephemeris and the rotation model for the planet to determine simultaneously where the spacecraft was at the moment of the transmission ($\vec{R}(T)$) and to predict the one-way light time $t - T$ using Eq. (32). A similar procedure then finds the position of the Earth transmitter at the moment of transmission. The total coordinate time of flight may be found by adding the two results together. In both steps, all terms in Eq. (32) must be used in order to maintain the required 10 ns accuracy.

b) Pulsar Timing

In the fall of 1982, Don Backer and colleagues announced the discovery of a pulsar, PSR 1937 + 21, with a period of 1.6 ms, twenty times shorter than the fastest pulsar previously observed (Backer *et al.* 1982; see also Backer and Hellings 1986). The precision of the pulse arrival times was also without precedent. After 22 months of data, the rms residual between observed arrival times and predicted arrival times is $\approx 1\ \mu$s. We will want to eliminate errors in the model as a possible source of these residuals, so we will need a model that gives the terrestrial arrival times to <100 ns absolute accuracy.

The geometry is as shown in Fig. 2. The pulsar is assumed to be at position $\vec{R}_0$ at some fiducial time T_0 and it is assumed to have a constant velocity $\vec{V}$, so that its position at the time of emission of the nth pulse is

$$\vec{R}_n = \vec{R}_0 + \vec{V}(t_n - t_0). \tag{42}$$

For pulsars in binary systems, the dynamics of the pulsar will be much more complicated. In this paper, however, the emphasis is on the effects of the Earth's movement alone, so we will not consider these complications here.

The position of the receiving station on the Earth is $\vec{r}_n$ at

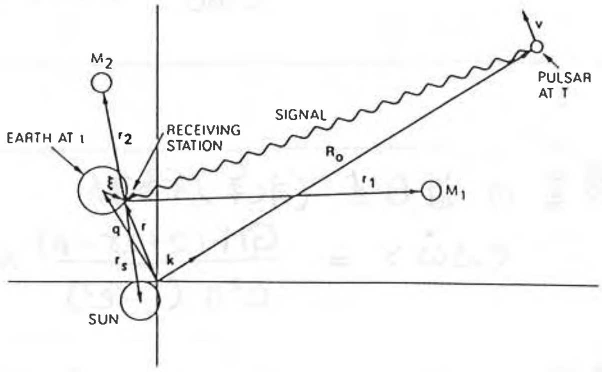


FIG. 2. Geometry of the pulsar-timing derivation. The pulsar source is assumed to be at $\vec{R}_0$ at time T_0 and to have constant velocity v. The receiving station on Earth is defined to have coordinates $\vec{r} = \vec{q} + \vec{\xi}$.

time t_n when the nth pulse is received. We also define $\vec{q}_n$ as the position of the center of the Earth at time t_n and $\vec{\xi}_n$ as the position of the antenna relative to the center of the Earth at the same time, as in Eq. (40). As before, $\vec{q}_n$ is found as a function of coordinate time by numerical integration of the PPN equations of motion and the vector $\vec{\xi}_n$ is found from known station coordinates and the Earth rotation model.

For 100 ns accuracy, it is sufficient to consider only the first two terms in the expression for the coordinate time of flight of the nth pulse from emission to reception [Eq. (32)]

$$c(t_n - T_n) = |\vec{R}_n - \vec{r}_n| - (1+\gamma)\sum_p \frac{GM_p}{c^2}\ln\left[\frac{\vec{k}\cdot\vec{r}_{pn} + r_{pn}}{\vec{k}\cdot\vec{R}_{pn} + R_{pn}}\right], \tag{43}$$

where $\vec{r}_{pn}$ is the position of the antenna relative to the pth solar system body at time t_n and $\vec{R}_{pn}$ is the pulsar's position relative to body p at time T_n. The vector $\vec{k}$ is defined, as in Sec. IV, as a unit vector in the direction of the pulsar. In principle, the sum in Eq. (43) should extend over all bodies along the photon path from the pulsar to the Earth, including interstellar objects. However, except in the case of a pulsar whose line of sight lies particularly close to some intervening star, the delay produced by interstellar gravitational fields will be essentially constant over tens of years of data and need not be modeled. The effects produced by the planets, on the other hand, will need to be included (as they must in planetary ranging), since a signal passing by Jupiter, for instance, may be delayed by as much as 200 ns by Jupiter's gravitational field.

Using Eq. (42) to expand the source potential and assuming that the pulsar is very far away so that $V(T_n - T_0) < R_0$ and $\vec{k} \approx \vec{R}_0/R_0$, Eq. (43) becomes

$$\begin{aligned} ct_n = {} & cT_n + R_0 + [(\vec{k}\cdot\vec{V})\Delta t_n - (\vec{k}\cdot\vec{r}_n)] + \frac{1}{2R_0}[r_n^2 - (\vec{k}\cdot\vec{r}_n)^2] - \frac{1}{R_0}[\vec{V}\cdot\vec{r}_n - (\vec{k}\cdot\vec{V})(\vec{k}\cdot\vec{r}_n)]\Delta t_n \\ & + \frac{1}{2R_0}[V^2 - (\vec{k}\cdot\vec{V})^2]\Delta t_n^2 - (1+\gamma)\sum_p \frac{GM_p}{c^2}\ln\left|\frac{\vec{k}\cdot\vec{r}_{pn} + r_{pn}}{2R_0}\right|, \end{aligned} \tag{44}$$

where we have defined $\Delta t_n \equiv t_n - t_0 \approx T_n - T_0$. The combination

$$T_0 + \frac{1}{c}R_0 + (1+\gamma)\sum_p \frac{GM_p}{c^3}\ln(2R_0) \tag{45}$$

is the zero-order time of arrival of the pulses at the solar system. If we define this time to be the solar system time origin t_0, then Eq. (44) becomes

$$c(t_n - t_0) = c(T_n - T_0) + [(\vec{k}\cdot\vec{V})\Delta t_n - (\vec{k}\cdot\vec{r}_n)] + \frac{1}{2R_0}[r_n^2 - (\vec{k}\cdot\vec{r}_n)^2] - \frac{1}{R_0}[\vec{V}\cdot\vec{r}_n - (\vec{k}\cdot\vec{V})(\vec{k}\cdot\vec{r}_n)]\Delta t_n + \frac{1}{2R_0}[V^2 - (\vec{k}\cdot\vec{V})^2]\Delta t_n^2 - (1+\gamma)\sum_p \frac{GM_p}{c^2}\ln|\vec{k}\cdot\vec{r}_{pn} + r_{pn}|. \tag{46}$$

The first term involves the model of the inherent dynamics of the pulsar itself. The second term is the first-order Doppler delay. The third term gives the effects of the Earth's motion (parallax). The fourth term, proportional to Δt_n, is due to the pulsar's proper motion. The term proportional to Δt_n^2 arises from the increase of distance to the pulsar with time if the pulsar has a transverse motion. The last term gives the additional delay caused by the space-time curvature. Equation (46), or equivalent formulas, have previously been used by the groups involved in pulsar-data analysis, though they have not previously been published in the literature.

Equation (46), of course, only relates coordinates to coordinates. In order to model the observed terrestrial arrival times $\bar{t}_n$, the transformation $t_n \rightarrow \bar{t}_n$ must be calculated using a numerically integrated transformation equation.

c) VLBI

Very long baseline interferometry (VLBI) involves the near simultaneous reception of signals from some astrophysical source at two widely separated receiving antennas on the Earth. In order to satisfy current measurement accuracies, the differences in the times of arrival of those signals must be modeled to tenths of a nanosecond.

The geometry of the problem is as shown in Fig. 3. Let us denote by t_i the coordinate time of the reception of a signal at antenna number i. This predicted time of arrival will then involve an expression like Eq. (44). However, in differencing two versions of Eq. (44), one for antenna 1 at t_1 and one for antenna 2 at t_2, several things happen to simplify the expression. The zero-order terms drop out, the terms in Δt_n ($\approx$years) become terms in $\Delta t \equiv t_2 - t_1$ ($\approx$milliseconds) and are thus small enough to be neglected, and the parallax term reduces to the parallax over an intercontinental baseline (rather than an interplanetary baseline) and may be neglected. The expression for the coordinate-time difference between the arrival times of signals at two separated Earth-borne antennas is thus

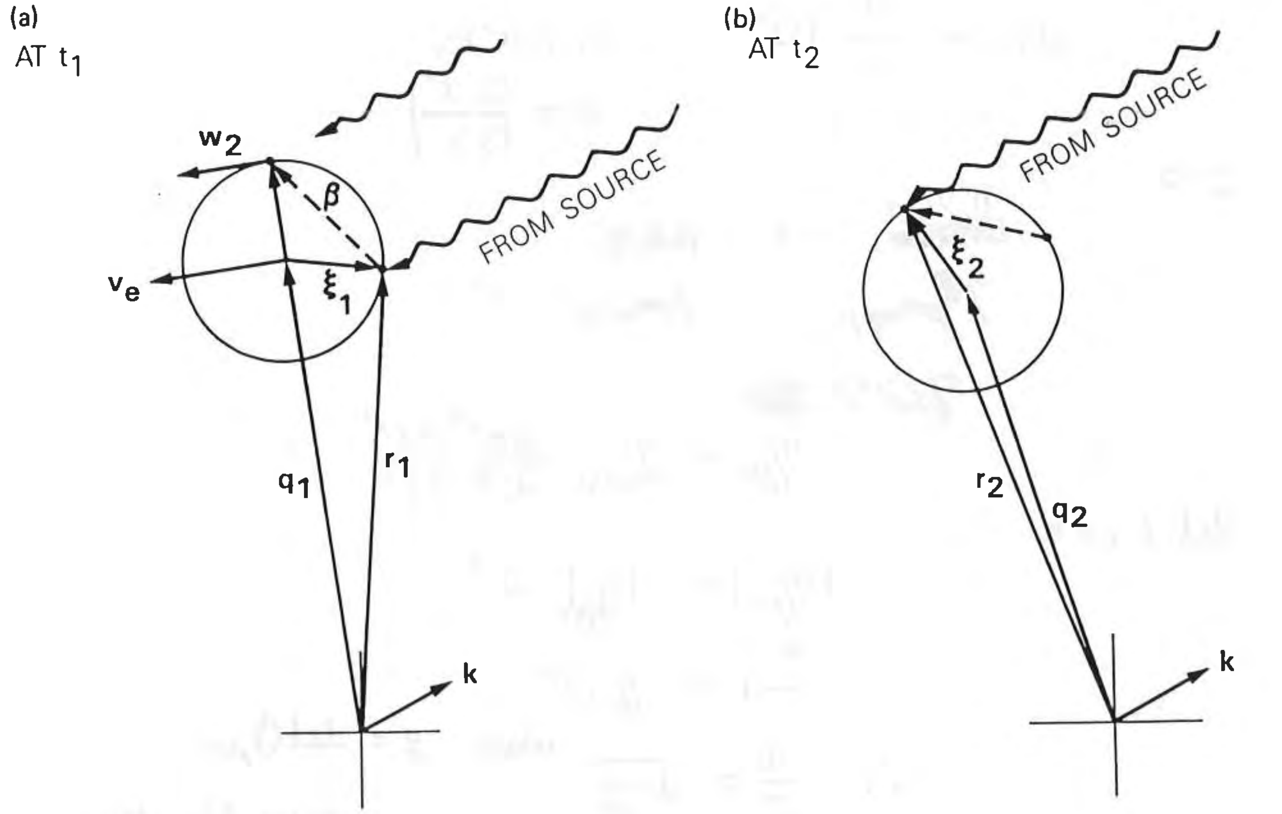


FIG. 3. Geometry of the receiving stations in VLBI. Figure 3(a) shows the orientation at the time of reception of the signal at the first station. Figure 3(b) shows the orientation $\approx$ 10 ms later at the time of reception at the second antenna. The CM of the Earth has moved and the Earth has rotated.

No. 7-17
Date

~~剛体~~ 有限体 Extended Bodies

n コの質点系 (ex. 恒星) の運動方程式は?

だが 質点 masspoint とは?

質量の定義 $M = \int \rho \, d^3x$ 　　Newton's density → $\rho = \rho_0 + \frac{1}{c^2}(\quad)$?

▷ テンソル密度

$$d\Omega \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

← デカルト座標系で

4-dim Volume element

変数変換 $x' = x'(x)$ 　　$d\Omega \to d\Omega'$

$$d\Omega = \frac{1}{J} d\Omega'$$

J: ヤコビアン

$$J = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|$$

J ?

ガリレイ → 一般曲線

$\eta_{\mu\nu}$ 　　$g_{\alpha'\beta'}$

$$\eta_{\mu\nu} = g_{\alpha'\beta'} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\nu}$$

det をとると

$$|\eta_{\mu\nu}| = |g_{\alpha'\beta'}| \, J^2$$

$$-1 = g J^2$$

$$\therefore \frac{1}{J} = \sqrt{-g} \quad \text{where } g = \det(g_{\mu\nu})$$

よって

$\frac{1}{J} d\Omega' \to \sqrt{-g}\, d^4x$ は不変量 (テンソル $A^{\cdots}_{\cdots}$ に対して $A^{\cdots}_{\cdots}\sqrt{-g}$ をテンソル密度という!)

ポスト・~~ニュートン~~ ガリレイ近似では $\sqrt{-g} = \begin{pmatrix} -1+2\phi/c^2 & & \\ & 1+2\gamma\phi/c^2 & \\ & & 1+2\gamma\phi/c^2 \end{pmatrix} \sim 1 + (3\gamma - 1)\frac{\phi}{c^2}$

▷ 質量密度 ρ

ρ とは？

$$\rho \cong \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rest mass} \\ \text{(or baryon number ?)}}}{\rho_0}\left(1+\frac{\overset{\swarrow \text{specific internal energy}}{\Pi}}{c^2}\right)$$

(pressure 0 とする
pressure アリとすると
少し話が面倒)

$$\Delta\phi = -4\pi G\rho_0$$

結局

$$\rho^{+} \cong \rho\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2}{2}+3\gamma\phi\right)\right]$$

$$\cong \rho_0\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2}{2}+\Pi+3\gamma\phi\right)\right]$$

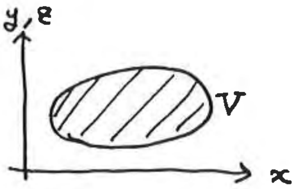
▷ スカラー密度

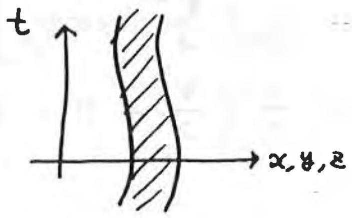
質量密度 ρ_0　　　$\rho_0\sqrt{-g}$

質量の 4次元化(?)　　→ 質量は unique でない。

ニュートン

$$M = \int \rho_0 \, dV \qquad \overset{\text{Newton}}{dV = d^3x} \qquad \int \rho \, dV\, ?$$





☆ 一つの考え方

$\int M\,dt$ を考える。

ニュートン　$\int_{t_0}^{t} M\,dt = M\cdot(t-t_0)$

$$\int M\,dt = \int \rho_0 \underset{\uparrow\ 4次元}{d\Omega} = \int \rho_0 \sqrt{-g}\, d^4x$$

従って

$$M = \underset{\uparrow}{\frac{d}{dt}} \int \rho_0 \sqrt{-g}\, d^4x$$

t は何をとるべきか？

☆ 一つの考え方

t は M と共に動く固有時 τ

従って　$M = \dfrac{d}{d\tau}\int \rho\sqrt{-g}\,d^4x = \int \rho\sqrt{-g}\,\dfrac{dt}{d\tau}\,d^3x \equiv \int \rho^* d^3x$

$$\rho^* = \rho\sqrt{-g}\underset{u^0}{\frac{dt}{d\tau}} = \rho\left(1 + (3\gamma-1)\frac{\phi}{c^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2}{2} + \phi\right) + \cdots\right)$$

$$\simeq \rho\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{v^2}{2} + 3\gamma\phi\right)\right]$$

さて EIH ゲージで

$$g_{00} = -1 + 2\frac{\phi}{c^2} + 2\frac{\psi}{c^4}$$

$$\psi = -\beta\phi^2 + (\gamma + \tfrac{3}{2})\phi_1 + (3\gamma - 2\beta + 1)\Phi_2 + \Phi_3 + 3\gamma\Phi_4 - \tfrac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$$

$$\left[M = \int \rho_0 \left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \Pi + 3\gamma\phi\right)\right] d^3x \text{ より} \right]$$

$$\phi_1 = \sum_J \frac{GM_J}{r_J}\mathbf{v}_J^2 \qquad r_J = |\mathbf{r}_J|, \ \mathbf{r}_J = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_J$$

$$\phi_2 = \sum_J \frac{GM_J}{r_J}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}} \qquad r_{JK} = |\mathbf{r}_{JK}|, \ \mathbf{r}_{JK} = \boldsymbol{x}_J - \boldsymbol{x}_K$$

$$\phi = \int \frac{G\rho_0}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x$$

$$= \int \frac{G\rho_0[\ ]}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \Pi + 3\gamma\phi\right)\right] d^3x$$

$$= \sum_J \frac{GM_J}{r_J} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\phi_1}{2} + \phi_3 + 3\gamma\phi_2\right)$$

pressure $0 \Rightarrow \phi_4 \to 0$

結局

$$\phi + \frac{\psi}{c^2} \to \sum_J \frac{GM_J}{r_J} + \frac{1}{c^2}\left[-\beta\left(\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\right)^2 + (\gamma+1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\mathbf{v}_J^2 \right.$$

$$\left. - (2\beta - 1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}} - \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{B})\right]$$

$$\mathcal{A} = \sum_J \frac{GM_J(\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J)^2}{r_J^3}, \qquad \mathcal{B} = \sum_J \frac{GM_J\, \mathbf{a}_J \cdot \mathbf{r}_J}{r_J} = -\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\mathbf{r}_J \cdot \sum_{K\neq J}\frac{GM_K \mathbf{r}_{JK}}{r_{JK}^3}$$

ここで ϕ を $\sum_J \frac{GM_J}{r_J}$ と考えると

$$\psi \Rightarrow -\beta\left(\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\right)^2 + (\gamma+1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\mathbf{v}_J^2 - (2\beta - 1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}}$$

$$- \frac{1}{2}\sum_J \frac{GM_J(\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J)^2}{r_J^3} + \frac{1}{2}\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\mathbf{r}_J \cdot \left(\sum_{K\neq J}\frac{GM_K \mathbf{r}_{JK}}{r_{JK}^3}\right)$$

$$\mathbf{g} = -2(\gamma+1)\mathbf{V} = -2(\gamma+1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\mathbf{v}_J$$

$$\nabla \cdot \frac{1}{r_J} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{|x-x_J|}\right) = -\frac{x-x_J}{|x-x_J|^3} = -\frac{r_J}{r_J^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r_J}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{|x-x_J(t)|}\right) = -\frac{(x-x_J)\cdot(-v_J)}{|x-x_J|^3} = \frac{r_J \cdot v_J}{r_J^3}$$

No. 7-20

Date

▷ EIH 方程式

$$\frac{dv}{dt} = a + \frac{1}{c^2}\Big[b + \gamma(v^2-2\phi)a - \dot{g} - \{(1+2\gamma)\dot{\phi} + 2(1+\gamma)(v\cdot a)\}v + v\times(\nabla\times g)\Big]$$

$$b = \nabla\psi = -2\beta\left(\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\right) \overset{\left(-\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} r_J\right)}{a}$$

$$- (\gamma+1)\sum_J \frac{GM_J r_J}{r_J^3} v_J^2 + (2\beta-1)\sum_J \frac{GM_J r_J}{r_J^3}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_J\left(\frac{2GM_J v_J (r_J\cdot v_J)}{r_J^3} - \frac{3GM_J(r_J\cdot v_J)^2}{r_J^5} r_J\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_J\left[\frac{GM_J}{r_J}\left(\sum_{K\neq J}\frac{GM_K r_{JK}}{r_{JK}^3}\right) - \left\{\frac{GM_J r_J}{r_J^3}\cdot\left(\sum \frac{GM_K r_{JK}}{r_{JK}^3}\right)\right\} r_J\right]$$

$$\gamma(v^2-2\phi)a = -\gamma\sum_J \frac{GM_J r_J}{r_J^3} v^2 + 2\gamma\sum_J \frac{GM_J r_J}{r_J^3}\left(\sum_I \frac{GM_I}{r_I}\right)$$

$$-\dot{g} = 2(\gamma+1)\left[\sum_J \frac{GM_J}{r_J} a_J + \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}(r_J\cdot v_J)v_J\right]$$

$$= -2(\gamma+1)\left[\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}^3} r_{JK} - \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}(r_J\cdot v_J)v_J\right]$$

$$-(1+2\gamma)\dot{\phi}v = -(1+2\gamma)\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}(r_J\cdot v_J)v$$

$$-2(1+\gamma)(v\cdot a)v = 2(1+\gamma)\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}(r_J\cdot v)v$$

$$v\times(\nabla\times g) = -2(\gamma+1)\, v\times\left(\nabla\times\sum_J \frac{GM_J}{r_J}v_J\right)$$

$$= -2(\gamma+1)\sum_J v\times\left[\left(-\frac{GM_J}{r_J^3}r_J\right)\times v_J\right]$$

$$= 2(\gamma+1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}\{v\times(r_J\times v_J)\}$$

$$= 2(\gamma+1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}\{(v\cdot v_J)r_J - (v\cdot r_J)v_J\}$$

k ↑ $-j$

i $\quad i\times j$

$a\times(b\times c)$
$= (a\cdot c)b - (a\cdot b)c$

$$\frac{1}{c^2}\Big[\quad\Big] = 2\beta\left(\sum_I \frac{GM_I}{r_I}\right)\left(\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}\mathbf{r}_J\right) - (\gamma+1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}\mathbf{v}_J^2\,\mathbf{r}_J$$

$$+(2\beta-1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}\left(\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}}\right)\mathbf{r}_J$$

$$-\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}(\mathbf{r}_J\cdot\mathbf{v}_J)\,\mathbf{v}_J + \frac{3}{2}\sum_J \frac{GM_J}{r_J^5}(\mathbf{r}_J\cdot\mathbf{v}_J)^2\,\mathbf{r}_J$$

$$+\frac{1}{2}\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}^3}\mathbf{r}_{JK} - \frac{1}{2}\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}^3}(\mathbf{r}_J\cdot\mathbf{r}_{JK})\,\mathbf{r}_J$$

$$-\gamma\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}\mathbf{v}^2\,\mathbf{r}_J + 2\gamma\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}\left(\sum_I \frac{GM_I}{r_I}\right)\mathbf{r}_J$$

$$-2(\gamma+1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}^3}\mathbf{r}_{JK} + 2(\gamma+1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}(\mathbf{r}_J\cdot\mathbf{v}_J)\,\mathbf{v}_J$$

$$-(2\gamma+1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}(\mathbf{r}_J\cdot\mathbf{v}_J)\,\mathbf{v} + 2(1+\gamma)\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}(\mathbf{r}_J\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}$$

$$+2(\gamma+1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_J)\,\mathbf{r}_J - 2(\gamma+1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}(\mathbf{r}_J\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}_J$$

$$= \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}\mathbf{r}_J\Bigg[2(\beta+\gamma)\left(\sum_I \frac{GM_I}{r_I}\right) - \left\{(\gamma+1)\mathbf{v}_J^2 - \gamma\mathbf{v}^2\right\} + 2(\gamma+1)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_J)$$

$$+\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}}\left\{(2\beta-1) - \frac{1}{2}\frac{\mathbf{r}_J\cdot\mathbf{r}_{JK}}{r_{JK}^2}\right\} + \frac{3}{2}\frac{(\mathbf{r}_J\cdot\mathbf{v}_J)^2}{r_J^2}\Bigg]$$

$$+\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}\Big[-(2\gamma+1)(\mathbf{r}_J\cdot\mathbf{v}_J)\,\mathbf{v} + 2(1+\gamma)(\mathbf{r}_J\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v} - 2(1+\gamma)(\mathbf{r}_J\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{v}_J$$

$$+(2\gamma+1)(\mathbf{r}_J\cdot\mathbf{v}_J)\,\mathbf{v}_J\Big]$$

$$-\left(2\gamma+\frac{3}{2}\right)\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}^3}\mathbf{r}_{JK}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\therefore\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} =& -\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}\mathbf{r}_J \\
&+\frac{1}{c^2}\Bigg[\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\Bigg\{\frac{\mathbf{r}_J}{r_J^2}\Bigg[2(\beta+\gamma)\sum_I \frac{GM_I}{r_I}-(\gamma+1)\mathbf{v}_J^2+2(\gamma+1)\mathbf{v}_J\cdot\mathbf{v}-\gamma\mathbf{v}^2 \\
&\qquad +\frac{3}{2}\left(\frac{\mathbf{r}_J\cdot\mathbf{v}_J}{r_J}\right)^2+\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}}\left\{(2\beta-1)-\frac{1}{2}\frac{\mathbf{r}_J\cdot\mathbf{r}_{JK}}{r_{JK}^2}\right\}\Bigg] \\
&\qquad +\left(\frac{\mathbf{r}_J}{r_J^2}\cdot\left\{(2\gamma+1)\mathbf{v}_J-2(1+\gamma)\mathbf{v}\right\}\right)(\mathbf{v}_J-\mathbf{v}) \\
&\qquad -(2\gamma+2)\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}^3}\mathbf{r}_{JK}\Bigg\}\Bigg]
\end{aligned}}$$

これが N_Jの質点系の作る重力場中の test particle の運動方程式
(のポスト・ニュートン近似)　　　　　　　　　　　　　　その重力場が無視

Einstein - Infeld - Hoffmann (流)の運動方程式　という。

用途…太陽系内天体（天然，人工）の精密軌道計算

▷

それでは　非test particle の場合は？

ニュートン力学

test particle
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\sum_J\frac{GM_J}{r_J^3}\mathbf{r}_J$$

⇨ 質点同士
$$\frac{d\mathbf{v}_L}{dt}=-\sum_{J\neq L}\frac{GM_J}{r_{LJ}^3}\mathbf{r}_{LJ}$$

自己重力場が自分の軌跡に与える影響は無視

$\boxed{\text{測地線仮}}$説　geodesic (motion) hypothesis

このとき

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}_L}{dt} = & -\sum_{J\neq L}\frac{GM_J}{r_{LJ}^3}\mathbf{r}_{LJ} \\
& + \frac{1}{c^2}\Bigg[\sum_{J\neq L}\frac{GM_J}{r_{LJ}}\Bigg\{\frac{\mathbf{r}_{LJ}}{r_{LJ}^2}\Bigg[2(\beta+\gamma)\sum_{I\neq L}\frac{GM_I}{r_{LI}} - (\gamma+1)\mathbf{v}_J^2 + 2(\gamma+1)\mathbf{v}_J\cdot\mathbf{v}_L - \gamma\mathbf{v}_L^2 \\
& \qquad + \frac{3}{2}\left(\frac{\mathbf{r}_{LJ}\cdot\mathbf{v}_J}{r_{LJ}}\right)^2 + \sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}}\left\{(2\beta-1) - \frac{1}{2}\frac{\mathbf{r}_{LJ}\cdot\mathbf{r}_{JK}}{r_{JK}^2}\right\}\Bigg] \\
& \qquad + \left(\frac{\mathbf{r}_{LJ}}{r_{LJ}^2}\cdot\left\{(2\gamma+1)\mathbf{v}_J - 2(1+\gamma)\mathbf{v}_L\right\}\right)(\mathbf{v}_J - \mathbf{v}_L) \\
& \qquad - (2\gamma+2)\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}^3}\mathbf{r}_{JK}\Bigg\}\Bigg]
\end{aligned}
$$

これが本来の EIH 方程式 (1938)

これは現代的な太陽系天体運動理論の基礎方程式となっている

JPL	DE200	AA
水路部	FE	天体位置表
BdL	VSOP	CdT

No.

Date

レポート（第1回）課題　　　　福島

提出期限：11月30日

問　座標系Sでみて、速度$\mathbf{v}$で等速直線運動している座標系S'がある。両者の空間座標軸は平行、従って両者の間に回転はないものとする。このとき以下の仮定から両者の座標差Δx^{μ}, $\Delta x^{\alpha'}$間の変換（いわゆるBoost）行列を導け。（変換行列は講義で示した）

（仮定）　1：S'系の原点はS系で速度$\mathbf{v}$で運動している。

2：$(\Delta s)^2$は座標変換に対し不変である。

3：変換行列は座標に依らず、ただ$\mathbf{v}$のみの関数である。

（ヒント）

1）まず$\mathbf{v}$の方向にx軸をとり、t-xの2変数で議論を行い、しかるのちに任意方向に$\mathbf{v}$が向くように、空間回転操作を施すと簡単。

2）やる気がある人は、初めから4変数で議論してみよ。（かなり面倒くさいよ。）

（ヒントのヒント）

Møller §17

No.
Date . .

レポート（第2回）課題　福島

提出期限：1992年1月9日

問　以下の論文のうち一つを選び、そのエッセンスをA4レポート用紙1枚程度にまとめよ。

1) Shapiro, I.I. (1964) Phys. Rev. Lett. 13, 789-791
"Fourth test of general relativity"

2) Barker, B.M. and O'Connell, R.F. (1975) Ap.J. 199, L25-26
"Relativistic effects in the binary pulsar PSR 1913+16"

3) Ries, J.C. et al. (1988) Phys. Rev. Lett. 61, 903-906
"Effect of General Relativity on a Near-Earth Satellite in the Geocentric and Barycentric Reference Frames"

4) Fukushima, T. (1991) A & Ap. 244, L11-12
"Geodesic nutation"

5) Texas Mauritanian Eclipse Team (1976) A.J. 81, 452-4
"Gravitational Deflection of light: solar eclipse of 30 June 1973. I. Description of procedures and final results."

6) Williams, J.G. et al. (1976) Phys. Rev. Lett. 36, 551-554
"New test of the equivalence principle from lunar laser ranging"

7) Robertson, D.S. et al. (1991) Nature 349, 768-770
"New measurement of solar gravitational deflection of radio signal using VLBI"

No. 1
Date

レポート（最終回）課題　　福島

提出期限：1992年 2月5日（M2 D3）
2月18日（その他）

各人のレポート提出状況に応じて、以下の3つの問の中から一つを選び回答せよ。ただし、問1は通常の（すなわち，第1回，第2回）レポート1回分と評価し、問2は2回分，問3は3回分と各々評価する。
（えーっと、わかりやすく言えば、例えば第1回,第2回のレポートを提出しなかった者でも問3に回答すれば、レポート3回分と評価してあげるよ、ということ。）

問1　以下のテーマのうち一つを選び、計算結果をグラフにして提出せよ。プログラムを使用した場合は、言語，計算機環境等を明記し、プログラムを添付せよ。

1)　GPS/NAVSTAR 衛星に搭載されている原子時計の刻む固有時 τ と地心座標時 t との関係

GPS/NAVSTAR衛星としては PRN 符号13番（$\sqrt{a} = 5153.702\sqrt{km}$, $e = 0.00343$，1991年12月13日現在）を用い、$GM_\oplus$ の値としては ~~WGS~~ GRS 80の値　$3.9860044 \times 10^{14}\ m^3/s^2$ を使え。

グラフは、linear trend を含んだものと、差し引いたものと2つ書け。

2)　火星上のバイキング着陸船と地球上のNASA/JPL深宇宙ネットワークのアンテナ ~~（ゴールドストーンのものとせよ）~~ 間の電波伝播における相対論的遅れ Δt

火星は、地球と同一平面上を周るものとし、火星・地球の軌道離心率は無視せよ。また火星・地球の大きさも無視せよ。火星・地球の軌道長半径は理科年表を見よ。

相対論効果は太陽のものだけ考えよ。

3) 金星の周回軌道上のマゼラン探査体からの電波を地球上のVLBIで測定したときの電波の到達方向における相対論的ズレ角 $\Delta\theta$

マゼランは金星と同一視し、太陽による一般相対論的効果のみ考えよ。金星は、地球と同一平面上を周るものとし、金星・地球の軌道離心率は無視せよ。また、金星・地球の大きさも無視せよ。金星・地球の軌道長半径は理科年表を見よ。

4) 月の軌道の近地点移動における一般相対論効果 $\Delta\omega$

月は地球の周りをケプラー運動しているものとし、太陽の摂動は考えないものとする。月の軌道要素は理科年表にある平均値を用いよ。

グラフは linear trend を含んだものと、差し引いたものと2つ書け。

問2 以下のテーマのうち一つを選び解け。

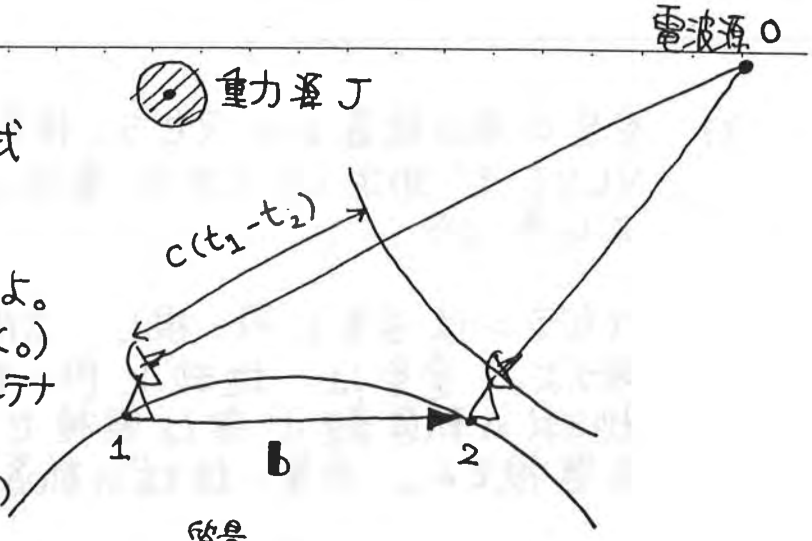
1) 光差方程式

$$c(t_2 - t_1) = r_{21} + (1+\gamma)\sum_J \frac{GM_J}{c^2} \ln\left|\frac{r_{1J}+r_{2J}+r_{21}}{r_{1J}+r_{2J}-r_{21}}\right|$$

where
$$r_{21} = |x_2(t_2) - x_1(t_1)|$$
$$r_{1J} = |x_1(t_1) - x_J(t_1)|$$
$$r_{2J} = |x_2(t_1) - x_J(t_1)|$$

を解く、すなわち、関数 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_J(t)$ が与えられているとき t_1 を知って t_2 を求めるサブルーチン or プログラムを Fortran, C, BASIC その他の言語で書け。

コンパイル・デバッグも行い、計算結果が正しいこと（例えば手計算との一致等）を示す資料も添付せよ。

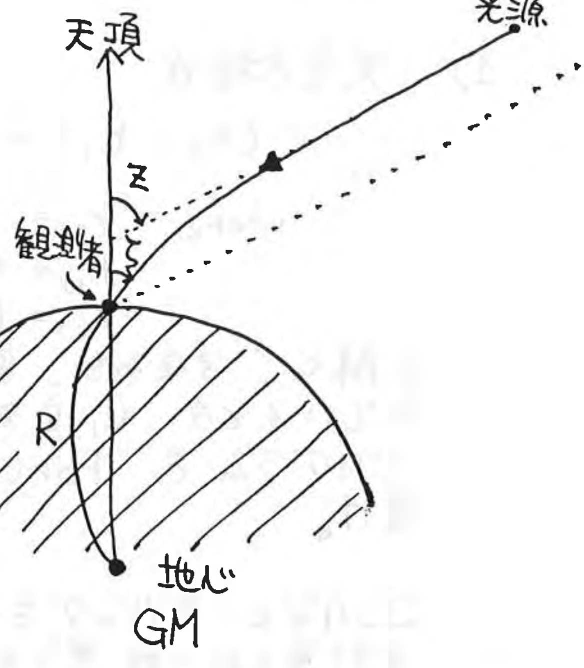


2) VLBIの観測方程式を導け。

ただし、以下の仮定を用いよ。
電波源O を $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ に発した電波が、アンテナ1には $(t_1, \boldsymbol{x}_1)$ に、アンテナ2には $(t_2, \boldsymbol{x}_2)$ に到達したとする。
伝播の途中には $\boldsymbol{x}_J$ の場所に（質量）M_J の重力源があって電波伝播を遅らせているものとする。

このとき観測方程式とは到達時間差 $t_1 - t_2$ と アンテナ基線ベクトル $\mathbf{b} \equiv \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ 及び電波源Oをアンテナ1から見た方向ベクトル $\mathbf{k} \equiv (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_1)/|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_1|$ を結びつける式である。

ヒント： O→1, O→2 の光の各々に対して光差方程式を（(1)を参照）書き下し、両辺の差をとって t_0 を消去し….



3) 地球の重力場によっても星の光は屈折して見える。天頂角zの方向にある（無限遠の）光源の重力場による見かけの天頂角ζをz, GM, Rを用いて表わせ。

ヒント： 光方向の式

$$\mathbf{d}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} + (1+\gamma)\left[\sum_J \frac{GM_J}{c^2}\frac{1}{r_{2J}}\frac{\frac{\mathbf{r}_{1J}}{r_{1J}}\times\frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}}}{1+\frac{\mathbf{r}_{1J}}{r_{1J}}\cdot\frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}}}\right]\times\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$$

で 1→光源, 2→観測者, J→地心 と思うと…

問3　最近の宇宙論によれば、宇宙にはひも状の重力源 cosmic string が存在する可能性があるという（もっともミーハー的な解説は雑誌「ニュートン」の12月号(1991年)にのっているよ。）

そこで、「宇宙ひも (cosmic string)」があったときの光の運動を論じよう。

1)　直線状の一様で十分細い「宇宙ひも」があったとする。簡単のため、「ひも」は静止しているとする。このとき、「宇宙ひも」の周りのニュートン的重力ポテンシャルは、rを「ひも」までの距離とすると

$$\phi(x) = -\frac{\mu}{a}\log\frac{r}{a}$$

と書けることを示せ。ただし μは GMの次元を持ち、aは ある種の距離定数である。

2)　上記のポテンシャルに対し光の運動方程式（のポスト・ガリレイ近似）を書き下し、これを解け。（ひもをz軸にとると簡単!!）

ヒント：$\displaystyle\int^t \frac{a+bt'}{|a+bt'|^2}dt'$ 及び $\displaystyle\iint^{t\,t'} \frac{a+bt''}{|a+bt''|^2}dt''dt'$ が必要となる。
適当な数学公式集を捜す(か、これ位だったら解けるかな？)こと。

3)　講義で $\phi = \frac{\mu}{r}$ に対して行ったのと同様の手順で

光差方程式　$c(t_2-t_1) = r_{12} + \cdots$　を導け。

4)　(もし、余裕があれば）光方向の式　$d_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} + \cdots$ も導け。

(注) 3)と4)は かなり大変な計算になるよ。