

資料

7. VLBIによる天文・測地パラメータ

推定の可観測性評価

川瀬 成一郎*
(昭和54年9月22日受理)

1. はじめに

VLBI観測により、ある所望の量を求めるためには、時刻差の観測データを処理し、幾つかの未知パラメータを分離し推定しなければならない。このパラメータ推定が良好に行われるためには、ベースライン・観測期間・天体波源等の諸要因がうまく関連づけられていること、定量的に言えば、これらの諸要因を総じたシステムの可観測性が良いことが必要である。

鹿島支所では、これまで種々の静止衛星について軌道パラメータの推定問題を扱ってきたが、その過程において、システムの可観測性を評価する簡便かつ定量的な方法を開発した⁽¹⁾。これは既に種々のケースの軌道決定に実用され、観測方式の設計あるいはパラメータ推定結果のベリファイ等に非常に有効であった。そこで、今回この方法をVLBIパラメータ推定に適用することを試み、多少の結果を得ることができた。これを、VLBIのシステム設計上の一方法として紹介したい。

2. パラメータ推定における可観測性の概念

ある観測によって得られたデータの系列を

$$\tau^0 = (\tau_1^0 \tau_2^0 \dots \tau_i^0 \dots \tau_N^0)$$

とし、また、これに対応すべき計算モデルを

$$\tau^e = (\tau_1^e \tau_2^e \dots \tau_i^e \dots \tau_N^e) = \tau^e(e)$$

とする。添字 i には、観測時刻の違い、観測波源の違いが含まれる。 $e = (e_1 \dots e_M)$ は推定パラメータである。目的とするところは、

$$J = \|\tau^0 - \tau^e(e)\| \rightarrow \min. \quad \dots\dots(1)$$

となるパラメータ e を見出すことである。 $\tau^e(e)$ は、通常 e に関して非線型であるから、現在わかっている e の値の周りに $\tau^e(e)$ を線型化し、 $\tau^e(e)$ が τ^0 に十分近づくまで e の修正を反復することにより、 e を求めることができる。これは微分修正とよばれる極くありふれた方法であり、それ自体としては何ら問題を持つものではないが、実際にはこの演算は常に収束するとはかぎらず、

振動や発散などの数値的不安定を生ずることがある。その事情は次のように説明される。

パーシャルベクトル系を

$$p_i = \frac{\partial \tau^e}{\partial e_i} \Big|_e, \quad i=1 \dots M \quad \dots\dots(2)$$

とし、観測値残差を

$$r = \tau^0 - \tau^e$$

とすれば、(1)式の線型化は

$$J = \|r - \sum_{i=1}^M p_i e_i\| \rightarrow \min. \quad \dots\dots(3)$$

となる。 $p_1 \dots p_M$ の張る空間への r の射影を r^{\parallel} とすると、

$$\sum_{i=1}^M p_i e_i = r^{\parallel} \quad \dots\dots(4)$$

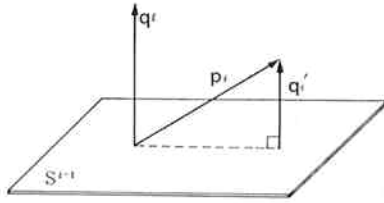
をみたく e_i が求める推定値である。もしも、 $p_1 \dots p_M$ が互いに独立であれば、 $e_1 \dots e_M$ は独立に求められ、上述の微分修正は数値的に安定である。しかし、もし $p_1 \dots p_M$ の中に独立でないベクトルの組合せがあれば、それらに対応したパラメータはもはや独立に推定することができず、微分修正は数値的不安定を示すようになる。すなわち、ある与えられたパラメータ推定問題の成否は、パーシャルベクトル間の独立性により定まる。

$p_1 \dots p_M$ の独立性は次のように評価される。まず、シュミットの直交化法に従い、 $p_1 \dots p_M$ より正規直交系 $q_1 \dots q_M$ を次のように求める。

$$\left. \begin{aligned} q_1' &= p_1, & q_1 &= q_1' / \|q_1'\| \\ q_i' &= p_i - \sum_{j=1}^{i-1} (p_i \cdot q_j) q_j, & q_j &= q_j' / \|q_j'\| \\ q_M' &= p_M - \sum_{j=1}^{M-1} (p_M \cdot q_j) q_j, & q_M &= q_M' / \|q_M'\| \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

この直交化が $i-1$ 番目まで行われ、次にいま p_i が処理される場所であるとしよう。 $p_1 \dots p_{i-1}$ の張る空間を S^{i-1} とすると、第1図のように、 q_i' は p_i の S^{i-1} に直交する成分を表す。 $\|q_i'\|$ が十分大であれば、 p_i は S^{i-1} と、すなわち、 $p_1 \dots p_{i-1}$ と独立であろう。逆に $\|q_i'\|$ が非常に小さければ、 p_i は $p_1 \dots p_{i-1}$ と互に

* 鹿島支所 衛星管制課



第1図 パーシアルの順次直交化

独立ではない。多少の数学的考察によれば、いま

$$f_i = \|q_i\| / \|p_i\| \quad \dots\dots(6)$$

なる量を考え、また、パーシアルベクトルの計算精度を10進でL桁とするならば、

$$\log_{10} f_i^2 = -L \quad \dots\dots(7)$$

が上述の境界となり、左辺が $-L$ よりも大又は小となるに従い、 p_i は $p_1 \dots p_{i-1}$ から独立である、又は従属であると見なされる⁽¹⁾。したがって、ある与えられた推定問題において、 $\log_{10} f_i^2 \leq -L$ となるパラメータ e_i は推定不可能であり、この逆の場合には推定可能である。あるいは、ある与えられた推定パラメータの組合せが互いに分離して求められるためには、 $\log_{10} f_i^2 > -L$ がすべての i について成り立つように、すなわちシステムの可観測性が得られるように、観測方法・データ量等を工夫することが必要となる。

以上から知られるとおり、ここに示した可観測性評価方法は、パラメータ推定のための観測システムを設計する上での指標となるものである。この評価法は、(5)の直交化演算を主とし、簡易かつ数値的に安定な方法であり、疑似観測データの生成と処理を繰り返す数値的シミュレーションに基づく方法に比べて、より良い理論的見通しを与えるものである。

3. VLBI パラメータ推定の可観測性

前節に示した可観測性評価法を、VLBI 観測に適用した結果を以下に示す。

3.1 観測モデル及びパーシアルベクトル

VLBI 観測のモデルは、観測値を時刻差で表した場合、次式により与えられる^{(2), (3)}。

$$\begin{aligned} \tau = & \tau_0 + \delta_f t + \frac{a_f}{2} t^2 \\ & + \frac{D}{C} [\sin \delta_B \sin \delta_s + \cos \delta_B \cos \delta_s \cos(\theta_G \\ & + L - \alpha_s)] \quad \dots\dots(8) \end{aligned}$$

- $\tau_0, \delta_f, a_f \dots$ 時計の誤差パラメータ
- $D \dots$ 基線長
- $L \dots$ 基線ベクトル赤道面成分の経度
- $\delta_B \dots$ 基線ベクトルの赤緯
- $\alpha_s, \delta_s \dots$ 波源の α, δ

$\theta_G \dots$ Greenwich Hour Angle

$c \dots$ 光の速度

問題とするのは、左辺に対応する観測値から、右辺の諸パラメータがどの程度分離され決定されるかということであるが、ここでは、波源の $\alpha \cdot \delta$ は既知であると仮定する。その理由は、 $\alpha_s \cdot \delta_s$ の推定は位置の知られた他の波源を基準とした相対測定となるはずであり、そこでは可観測性が問題となることはないと考えられるからである。更に、(8)式には、 $\theta_G, L, -\alpha_s$ の3パラメータが和の形で含まれているから、

$$\theta = \theta_G + L - \alpha_s \quad \dots\dots(9)$$

により、これらを代表させることとする。これらと、地球自転のパラメータ

$\omega_e = \dot{\theta}_G \dots$ 自転速度

$x, y \dots$ 極運動

とを合わせて、推定パラメータを

$$e = (e_1 \dots e_9) = (\tau_0, \delta_f, a_f, D, \theta, \delta_B, \omega_e, x, y) \quad \dots\dots(10)$$

とする。

$e_1 \dots e_7$ に関しては、パーシアルは(8)式より直ちに次のように得られる*。 ω_e は観測期間中一定と仮定する。

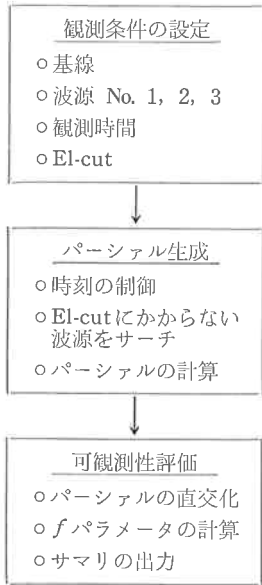
$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial \tau_0} = & 1, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \delta_f} = t, \quad \frac{\partial \tau}{\partial a_f} = \frac{t^2}{2}, \\ \frac{\partial \tau}{\partial D} = & \frac{1}{C} [\sin \delta_B \sin \delta_s \\ & + \cos \delta_B \cos \delta_s \cos \theta] \\ \frac{\partial \tau}{\partial \theta} = & -\frac{D}{C} \cos \delta_B \cos \delta_s \sin \theta \\ \frac{\partial \tau}{\partial \delta_B} = & \frac{D}{C} [\cos \delta_B \sin \delta_s \\ & - \sin \delta_B \cos \delta_s \cos \theta] \\ \frac{\partial \tau}{\partial \omega_e} = & -\frac{D}{C} [\cos \delta_B \cos \delta_s \sin \theta] t \quad \dots\dots(11) \end{aligned}$$

また、 e_8, e_9 のパーシアルを1次の項までとれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial x} = & \frac{D}{C} [\cos \delta_B \cos L \\ & - \sin \delta_B \cos \delta_s \cos(\theta_G - \alpha_s)] \\ \frac{\partial \tau}{\partial y} = & \frac{D}{C} [-\cos \delta_B \sin L \\ & + \sin \delta_B \cos \delta_s \sin(\theta_G - \alpha_s)] \end{aligned}$$

で与えられる⁽⁴⁾。基線・波源・観測スケジュールを仮定して(11)式を計算すると、仮定した条件に対応した(2)式が得られる。それに対し(5)の直交化を施し、(6), (7)の計算を行うことにより、可観測性評価が得られる。これらの

* パラメータ θ について、推定したいのはある時刻における(9)式の値であり、 $\partial \tau / \partial \theta$ は、その値を変化させたときのパーシアルを意味する。



第2図 VLBI 可観測性評価プログラムの概要

諸計算の実手順を次節に示す。

3.2 VLBI 可観測性評価プログラム

前節の諸計算の実行のための計算プログラムの概要を第2図に示す。パーシアル生成においては、一定の刻みで時刻を進め、2局での Elevation がとも下限値よりも大となる波源をさがして $\partial\tau/\partial e_i$ を計算し、(2)の p_i を得る。直交化においては、順次直交化のパラメータの順序を任意に指定可能とした。出力は、仮定した条件において実際に行われる観測のヒストリーと、 $\log_{10} f_i^2$ の対応表として得られるように設計されている。

3.3 VLBI 可観測性評価の結果例

前節の手順により、幾つかの場合について VLBI パラメータ推定の可観測性評価を行った結果を第2表に示す。第1表は、仮定した観測条件である。

はじめに、第2表の T-1 より T-10 は、すべて山川・稚内基線に関するもので、縦方向に星印が並んでいる区間において、対応する No. の波源について観測が行われることを示す。縦方向への観測時間の刻みは30分ごとである。表の下部に並べた負の数字が、各パラメータに対応した $\log_{10} f_i^2$ の値である*。これに対する可観測性限界値は次のように考えられる。パーシアルを与える(1)式には D, α, δ 等が含まれている。仮に $D=1000$ km, D の誤差を 0.1 m とすると有効桁数は7となり、また $\alpha \cdot \delta$ の誤差を 0.01'' と仮定すると有効桁数はやはりほぼ7となる。したがって、以下、 $\log_{10} f_i^2$ に対する可観測性限界は、数値計算の安定性のための余裕を1桁とるならば-6と考えるのが妥当である。

* 直交化の順序は、上から下へとられている。

第1表 観測条件

基線	A { 山 川 稚 内	130° E, 31° N 142° E, 45° N
	B { 鹿 島 平 磯	140.6° E, 35.9° N 140.6° E, 36.4° N
	C { 東 西	139° E, 36° N 141° E, 36° N
波源	No. 1	12H, 0°
	No. 2	16H, +45°
	No. 3	20H, +60°
El-cut		30°
観測頻度		1点/30分ごと
観測スタート時刻		$\theta_0=0$ H

T-1 から T-4 までは、波源が一つの場合に、観測期間とともに可観測性が向上する様子を表す。T-3 のように24時間の観測を行うならば極運動以外の諸パラメータが分離可能となる。T-5 及び T-6 は、観測波源を二つにした場合であり、この場合、極運動は良く分離されるが、 θ は分離不可能である。波源 No. 2 を T-7 のように変えてもその特性は変化しない。ただし、これには直交化の順序に依存した面があり、例えば T-8 の順序に従って直交化した場合には θ は分離が可能であるが、極運動が分離不可能となる。これから、 θ と極運動の間にはカップリングがあることが知られ、この性質は T-9, T-10 の3波源観測においても同様である。

次に、T-11 より T-13 は、鹿島・平磯基線による観測の場合であり、山川・稚内基線の場合と似通った特性を持つことがわかる。ただし、ここでは、 $D \approx 50$ km となり、山川・稚内基線に比べパーシアル計算有効桁数は $\log_{10}(1000/50) \approx 1.3$ だけ減小するから、 $\log_{10} f_i^2$ に対する限界値は -4.7 となることに注意すべきである。この場合の基線は南北方向であるが、これを T-14 のように東西方向基線に変更すると、T-13 と同じ2波源観測であっても極運動に対する可観測性が失われていることがわかる。

以上の諸結果により、システムの可観測性評価の方法が、VLBI の基本的設計あるいは観測スケジューリングに対して定量的な見通しを与えるものであることが理解されよう。

4. おわりに

パーシアルベクトルの直交化に基づく可観測性評価方法と、それを VLBI パラメータ推定に適用した幾つかの例を示し、この方法が VLBI システムの基本的設計及び観測スケジューリングのために有用であろうことを指摘した。

第 2 表

可観測性評価結果, T-1~T-14

T-1~T-10: 山川・稚内基線
 T-11~T-13: 鹿島・平磯基線
 T-14 : 東西基線

T-1				T-2			
	1	2	3		1	2	3
0	*			0	*		
1	*			1	*		
2	*			2	*		
3	*			3	*		
4	*			4	*		
TO			.000	5	*		
DF			-.477	6	*		
AF			-1.403	7	*		
D			-5.345	8	*		
X			-9.513	9	*		
Y			-23.140	TO			.000
WE			-9.544	DF			-.538
TH			-9.525	AF			-1.463
DB			-8.235	D			-4.058
				X			-6.253
				Y			-24.423
				WE			-5.123
				TH			-8.234
				DB			-5.687

T-4				T-5			
	1	2	3		1	2	3
0	*			0	*		
1	*			1	*		
2	*			2	*		
3	*			3	*		
4	*			4	*		
5	*			5	*	*	
6	*			6	*	*	
7	*			7	*	*	
8	*			8	*	*	
9	*			9	*	*	
10	*			TO			.000
11	*			DF			-.678
12	*			AF			-1.595
47	*			D			-.009
48	*			X			-1.974
49	*			Y			-5.027
50	*			WE			-3.992
51	*			TH			-26.493
52	*			DB			-5.030
53	*						
54	*						
55	*						
56	*						
57	*						
58	*						
59	*						
60	*						
95	*						
96	*						
TO			.000				
DF			-.576				
AF			-1.515				
D			-.623				
X			-1.668				
Y			-27.885				
WE			-1.287				
TH			-3.644				
DB			-1.604				

T-3				T-7(a)			
	1	2	3		1	2	3
0	*			0	*		
1	*			1	*		
2	*			2	*		
3	*			3	*		
4	*			4	*		
5	*			5	*		
6	*			6	*		
7	*			7	*		
8	*			8	*		
9	*			9	*		
10	*			10	*		
11	*			11	*		
12	*			12	*		
47	*			20	*		
48	*			21	*	*	
49	*			22	*	*	
50	*			23	*	*	
TO			.000	24	*	*	
DF			-.559	25	*	*	
AF			-1.491	26	*	*	
D			-.949	27	*	*	
X			-1.912	28	*	*	
Y			-28.548	29	*	*	
WE			-1.984	30	*	*	
TH			-4.428	31	*	*	
DB			-1.659	32	*	*	
				33	*	*	
				34	*	*	
				35	*	*	
				36	*	*	
				37	*	*	
				38	*	*	
				39	*	*	
				40	*	*	
				41	*	*	
				48	*	*	
				49	*	*	
				50	*	*	
				51	*	*	
				52	*	*	
				53	*	*	
				54	*	*	
				55	*	*	
				56	*	*	
				57	*	*	
				58	*	*	
				59	*	*	
				60	*	*	
				68	*	*	
				69	*	*	
				70	*	*	
				71	*	*	
				72	*	*	
				73	*	*	
TO			.000	TO			.000
DF			-.580	DF			-.589
AF			-1.470	AF			-1.535
D			-.010	D			-.024
X			-1.454	X			-.645
Y			-3.679	Y			-1.968
WE			-2.664	WE			-1.550
TH			-26.221	TH			-27.915
DB			-3.669	DB			-1.435

(a) 波源 No. 2 を (0°, +45°) に変更

T-8(a)

	1	2	3
0	*		
1	*		
2	*		
3	*		
4	*		
5	*	*	
6	*	*	
7	*	*	
8	*	*	
9	*	*	
10	*	*	
11	*	*	
12		*	
13		*	
14		*	

TO			.000
DF			-.678
AF			-1.506
D			-.011
TH			-1.638
DB			-3.294
WE			-3.408
X			-27.343
Y			-3.280

(a)直交化順序を変更

T-11

	1	2	3
0	*		
1	*		
2	*		
3	*		
4	*		
5	*		
6	*		
7	*		
8	*		
9	*		

TO			.000
DF			-.538
AF			-1.463
D			-6.132
X			-5.469
Y			-22.779
WE			-3.896
TH			-3.039
DB			-5.607

T-9

	1	2	3
0	*		
1	*		
2	*		
3	*		
4	*		
5	*	*	
6	*	*	
7	*	*	
8	*	*	
9	*	*	
10	*	*	
11	*	*	
12		*	*
13		*	*
14		*	*

TO			.000
DF			-.699
AF			-1.593
D			-.057
X			-1.556
Y			-2.807
WE			-2.729
TH			-28.171
DB			-1.788

T-12

	1	2	3
0	*		
1	*		
2	*		
3	*		
4	*		
5	*		
6	*		
7	*		
8	*		
9	*		
10	*		
11	*		
12	*		
13	*		
46			
47	*		
48	*		

TO			.000
DF			-.559
AF			-1.491
D			-2.290
X			-1.993
Y			-26.948
WE			-.161
TH			-.213
DB			-1.396

T-10

	1	2	3
0	*		
1	*		
2	*		
3	*		
4	*		
5	*	*	
6	*	*	
7	*	*	
8	*	*	
9	*	*	
10	*	*	
11	*	*	
12	*	*	
13	*	*	*
14	*	*	*
15	*	*	*
16	*	*	*
17	*	*	*
18	*	*	*
19	*	*	*
20	*	*	*
21	*	*	*
22	*	*	*
23	*	*	*
24	*	*	*
25	*	*	*
26	*	*	*
27	*	*	*
28	*	*	*
29	*	*	*
30	*	*	*
31	*	*	*
32	*	*	*
33	*	*	*
34	*	*	*

48	*		
49	*		
50	*		
51	*		
52	*		
53	*	*	
54	*	*	
55	*	*	
56	*	*	
57	*	*	
58	*	*	
59	*	*	
60	*	*	*
61	*	*	*
62	*	*	*
63	*	*	*
64	*	*	*
65	*	*	*
66	*	*	*
67	*	*	*
68	*	*	*
69	*	*	*
70	*	*	*
71	*	*	*
72	*	*	*
73	*	*	*
74	*	*	*
75	*	*	*
76	*	*	*
77	*	*	*
78	*	*	*
79	*	*	*
80	*	*	*
81	*	*	*
82	*	*	*

96	*		
97	*		
98	*		
99	*		
100	*		
101	*	*	
102	*	*	
103	*	*	
104	*	*	
105	*	*	
106	*	*	
107	*	*	
108	*	*	*
109	*	*	*
110	*	*	*
111	*	*	*
112	*	*	*
113	*	*	*
114	*	*	*
115	*	*	*
116	*	*	*
117	*	*	*
118	*	*	*
119	*	*	*
120	*	*	*
121	*	*	*
122	*	*	*
123	*	*	*
124	*	*	*

TO			.000
DF			-.595
AF			-1.583
D			-.040
X			-.339
Y			-1.919
WE			-1.060
TH			-27.766
DB			-1.689

T-13

	1	2	3
0	*		
1	*	-	
2	*		
3	*	*	
4	*	*	
5	*	*	
6	*	*	
7	*	*	
8	*	*	
9	*	*	
10	*	*	
11	*	*	
12	*	*	
13		*	*
14		*	*
TO		.000	
DF		-.659	
AF		-1.547	
D		-.079	
X		-1.736	
Y		-2.661	
WE		-3.697	
TH		-25.207	
DB		-4.192	

T-14

	1	2	3
0	*		
1	*		
2	*		
3	*	*	
4	*	*	
5	*	*	
6	*	*	
7	*	*	
8	*	*	
9	*	*	
10	*	*	
11	*	*	
12	*	*	
13		*	*
14		*	*
TO		.000	
DF		-.659	
AF		-1.547	
D		-.247	
X		-29.755	
Y		-.627	
WE		-.556	
TH		-.457	
DB		-.523	

なお、本資料作成に際し、いろいろと御教示をいただきました鹿島支所第三宇宙通信研究室の方々に深謝いたします。

参考文献

- (1) Kawase, S., Tanaka, T.; "A Simple Method for Evaluating the System Observability in Satellite Orbit Determination", IEEE Trans. AES-15, No. 1, 1979.
- (2) 佐分利義和; "VLBI による時刻同期", 電波研季報, 24, No. 130, 1978.
- (3) 北郷俊郎; "測地測量及び設変動測定への応用", 同上.
- (4) 松波直幸, 弓滋; "位置天文学への応用", 同上.

