



## II. 周波数と時間の計測

### 1. 周波数安定度の尺度

吉村和幸\*

#### 1. ま え が き

時間・周波数標準及び宇宙科学をはじめとする各分野において様々の角度から検討されていた周波数安定度の尺度 (measure) も, Barnes ら IEEE の周波数安定度に関する小委員会のメンバによって統一的な尺度が提示され<sup>(1)</sup>一応終止符を打つこととなった。これは, 直接にはそれまでの周波数安定度に関する集大成であった 1964 年の短期周波数安定度に関する NASA-IEEE シンポジウム<sup>(2)</sup>と 1966 年 2 月の Proc. IEEE の周波数安定度特集<sup>(3)</sup>に基づいてなされたものであるが, 時間領域の周波数安定度尺度としてはこれらの理論的中心となった Cutler らに代表される形式ではなく<sup>(4)</sup>, Allan 及び Barnes らによる形式<sup>(5) (6)</sup> のものが採用されるに至ったのは興味深いことである<sup>(7)</sup>。

周波数安定度 (Frequency Stability) は正確さ (Accuracy) や再現性 (Reproducibility) などとともに周波数標準器の性能を評価する重要な用語の一つであるが, 言葉上の定義としては, 例えば, 「連続運転されている発振器がある期間にわたって同一の周波数値を実現し得る割合を表す」というような表現がある<sup>(8)</sup>。しかし, 実際には使用される尺度によってその具体的な内容が異なってくるため, 現在は安定度尺度 [ $S_y(f)$  や  $\sigma_y^2(\tau)$ ] そのものを使って一般に表現している。

周波数安定度尺度には大別して周波数領域のものと時間領域のものがあり, 更にそれぞれの領域で目的用途に応じて種々の尺度がある。しかし, いずれにしろ二次モーメント (パワースペクトル密度や分散) を尺度とする点ではほぼ共通している。また, 時間領域の尺度としては測定個数  $N$  を十分大きくして, その平均値の周りの分散を考えるとというのが一般的であったわけであるが, Cutler らによる分散はこのような尺度の代表的なものであった。これは定常時系列において, エルゴード性の仮定のもとに時間軸上での一連のデータから平均値とその分散を求めようとする場合, 自然の考え方といえる。しかし, これは雑音のパワースペクトル密度が  $f^\alpha$

( $\alpha < 0$ ) で表されるような場合,  $N \rightarrow \infty$  で分散が発散するという困難さが伴う。この点について Cutler らは有限時間観測という実際的な場合についての分散とパワースペクトル密度との変換式を導き, フリッカ ( $f^{-1}$ ) FM 雑音については有限時間観測によるフィルタ効果が働いて分散が発散が避けられ得ることを示した。 $f^{-1}$  FM 雑音をフィルタする考え方としてはほかに Barnes による位相の二次差分のモデル<sup>(9)</sup>があり, 発振器の  $f^{-1}$  FM 雑音の影響を評価する良好な尺度である。

Allan や Barnes による分散の形式は上記の Cutler らによる有限時間観測の考慮に対応しているものであるが, 離散的な有限個数 ( $N$ ) のデータを扱うということ, 及び測定と測定の間空き時間 (dead time) があるということを明確に考慮しているため, 時間領域の実際の測定によく当てはまるようになっている。このことを重要にしているのは, 扱う時系列が単純な定常時系列ではなく, また, 一連のデータ間に一般に相関があるということと深い関係がある。この分散の特長の一つは  $f^\alpha$  ( $\alpha < 0$ ) FM 雑音に対するフィルタ効果をその中に鮮やかに含んでいることであるが, 特に  $N=2$  の場合はその効果が最もよく現れる (Cutler らによる分散は逆に  $N \rightarrow \infty$  に対応)。  $N=2$ , かつ測定間の空き時間が零のときの分散は特に Allan 分散と呼ばれ  $\sigma_y^2(\tau)$  で表されるが [(10) 式], これを用いると一般的な分散 [(9) 式] もまた表現し得るという点で基本的な形式になっている。そして, これはもう一つの周波数安定度尺度 (周波数領域) であるパワースペクトル密度と変換が可能であるということも考慮して, 前述の IEEE 小委員会は Allan 分散を時間領域における周波数安定度の尺度として定義した。しかし, 理論的な取扱いの面からいえば, パワースペクトル密度の方が分散より基本的な量である。実際, 前者から後者への変換は一般的に可能であるが, その逆の変換は特別の場合しかできない。そのようなことから, パワースペクトル密度の方が周波数安定度の定義としては上位に置かれている。

IEEE の上記小委員会による周波数安定度の定義以後 10 数年経過しているが, この間定義された尺度に関し

\*周波数標準部 周波数標準値研究室

で基本的な点で疑問を呈するものはほとんどないといっ  
てよく、時間・周波数標準分野に深く根をおろすに至っ  
ている。そして、安定度尺度の理論に関する研究として  
は、一つには無限時間平均で定義された Allan 分散に  
対して有限個数サンプリングの場合を含め、実際の測定  
値から求められる推定値の形式や不確定性に関するもの  
がある<sup>(9)(10)(11)(12)</sup>。また、Allan 分散では白色 ( $f^0$ )PM  
雑音とフリッカ ( $f^{-1}$ )PM 雑音の識別がつかないという  
不便があるが、この点について High-pass 分散や  
Band-pass 分散 (周波数領域からの変換)<sup>(13)</sup> 及び  
Modified Allan 分散<sup>(14)</sup>の提案がある。更に、Allan 分  
散ではパワースペクトル密度を  $f^\alpha$  とした場合、 $\alpha > -3$   
でしか収れんしないという限界があるが、Modified  
sample (又は three-adjacent-sample) 分散<sup>(15)</sup> や  
Prediction error 分散<sup>(16)</sup>によれば、例えば  $\alpha = -4$  ま  
で収れんすることができる。これは特に時間誤差の時系  
列を扱う場合重要になる。そのほか、時間領域の尺度か  
ら周波数領域の尺度への変換を一般的に可能にする試み  
として、Hadward 分散<sup>(17)</sup>の使用や時系列に対する  
ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Ave-  
rage) モデル<sup>(18)(19)</sup>の使用がある。後者は、時系列モデ  
ルを周波数領域で  $f^\alpha$  の形で表すのが一般的になってい  
るのに対し、時間領域で時系列そのものを直接モデル化  
しようとするものである。同様なものに Percival によ  
る [白色雑音+ステップ周波数変化]の時系列モデルが  
あるが<sup>(20)</sup>、これらは特に原子時系のアルゴリズムの改善  
にとって有力な手掛かりを与えるように思われる。

次に、周波数安定度の尺度を定義する上で使用される  
重要な統計的概念である「定常性」について述べておく  
<sup>(1)(13)(18)</sup>。定常性の概念は多くの統計的議論の根本に  
あるものであるが、これはある時刻  $t$  にアンサンブル  
(例えば一定の信号群)を観測したとき、そのアンサン  
ブル内の値の分布 (又は統計的性質)は正確に任意のほ  
かの時刻  $t'$  のそれと同じであるということである。し  
かし、このことが現実の測定と完全に一致すると考える  
ことはもちろんできない。例えば、ある周波数 (FM)  
雑音が定常性であるとしたとき、その積分で与えられる  
位相雑音は定常性とはならない。また、同様なことであ  
るが、パワースペクトルが  $f^\alpha (\alpha < 0)$  の時系列は  $f=0$   
を含む全周波数空間を考えるかぎり定常性とはならな  
い。統計の有用性は理想化されたモデルを作りあげて、  
実際のシステムで必要な観測量を合理的に表現すること  
にある。したがって、モデルに要求されることは、第 1  
に追跡が可能であり、容易にそのモデルの構成要素の推  
定値が得られることであり、また、実際の装置からの観  
測量と一致すべきである。その際注意すべきことは、装

置が定常的なアンサンブルから選ばれたかどうかは問題  
ではなく、単に装置からの観測量が例えば仮定された定  
常的なアンサンブルの要素と一致するかどうかを知らばよ  
いのである。このように、「定常性」はモデルの特性で  
あってデータの特性ではない。上に述べた位相雑音の場  
合についていえば、これを定常性として便利だから  
であり、同時に、実際の位相測定量の統計的性質をよく  
記述することができる。また、 $f^\alpha (\alpha < 0)$  型の時系列  
についていえば、現実の測定は必ず有限サンプル時  
間、有限帯域幅及び有限観測時間のもとに行われるわけ  
であり、その範囲で考えるかぎり定常性のモデルによ  
って十分この時系列の統計的性質を記述することができ  
るわけである。もし、非定常モデルを時系列に当てはめた  
方が有用かつ便宜性があるなら、むしろそうした方がよ  
いのである。

発振器をはじめとする各種装置は、周囲温度、供給電  
圧、磁界、気圧、湿度、振幅、出力の負荷変動などに  
よってその出力周波数 (又は位相) が影響を受ける。し  
たがって、周波数安定度の測定値にも影響するから、測定  
結果にはこのような環境条件を明確に示すことが望まし  
いわけであるが、本章で述べる周波数安定度の定義その  
ものにはこれらの要因は含まれていないことに注意する  
必要がある。それは、これら環境要因の莫大なリストや  
それら個々に対する手立てについて統一的に表現するこ  
とは不可能だからである<sup>(1)</sup>。したがって、それぞれの分  
野で必要な条件等を付加して安定度尺度を使用する習慣  
を確立することが重要である。周波数安定度尺度は信号  
発生器間の相互比較を可能にするだけでなく、いろいろ  
の状況のもとに用いられる信号発生器の性能を推測でき  
るものでなければならない。それには、しばしば実際の  
分布関数が必要となってくるものであり、二次モーメン  
トの尺度だけでは不十分な場合が生じてくる。ことに分  
散は、プロセス (確率過程又は時系列) がガウス分布を  
するとき、平均値とともにプロセスの統計的性質を十分  
表し得るが、そうでないときは近似的表現にしかすぎ  
ない。実際の分布については、必要に応じてそれぞれの  
場合について具体的に調べて議論するしかない。

また、さきに述べた ARIMA モデル等は、時系列を  
直接的にとらえようとしている点で新しい可能性を含ん  
でいる。

本章では、2. に周波数安定度の定義を示し、3. では定  
義された尺度間の変換を、また、4. では離散的雑音への  
適用と問題点を議論している。5. では Allan 分散の推  
定値と測定値評価への適用について述べている。2., 3.  
は解説が中心であり、4., 5. は筆者の研究が中心であ  
る。上述したように、周波数安定度尺度の研究は多く発

表されているが、できるだけ著者自身の研究を中心に述  
べるという本特集号の性格と限られた頁数から、これら  
の紹介は必要最小限なものにとどめたつもりである。し  
たがって、興味を持たれた読者は参考文献を直接読ま  
れることをお勧めしたい。また、本章は周波数精密測定回  
路専門委員会が発行した技術報告「周波数安定度とその  
測定」<sup>(21)</sup>において筆者が執筆した論文<sup>(7)</sup>を基にし、そ  
の後発表された文献を考慮して若干の修正を加えたもの  
である。

2. 周波数安定度尺度の定義<sup>(1)(7)</sup>

信号発生器の出力電圧の瞬時値は次のように表され得  
る。

$$V(t) = [V_0 + \epsilon(t)] \sin [2\pi\nu_0 t + \phi(t)] \dots\dots(1)$$

ここで、 $V_0$ ,  $\nu_0$  はそれぞれ電圧振幅及び周波数の公称  
値であり、 $\epsilon(t)$  及び  $\phi(t)$  はそれぞれ  $V_0$  及び  $2\pi\nu_0 t$   
からのずれである。位相の瞬時値を

$$\Phi(t) = 2\pi\nu_0 t + \phi(t) \dots\dots(2)$$

とおくと、周波数の瞬時値は次のように表される。

$$\nu(t) = d\Phi/dt = \nu_0 + \dot{\phi}(t)/2\pi \dots\dots(3)$$

$\dot{\phi}/2\pi$  は  $\nu_0$  からのずれである。

任意の時刻  $t$  に対して次の条件が成立するとする。

$$|\epsilon(t)/V_0| \ll 1 \dots\dots(4)$$

$$|\dot{\phi}(t)/2\pi\nu_0| \ll 1 \dots\dots(5)$$

これは  $\phi(t)$  又は  $\dot{\phi}(t)$  を実際の測定と結びつけて考  
える場合欠かせない条件である。

周波数安定度という用語は厳密には周波数不安定度と  
いわれるべきであるが、(5)式が成立する場合は公称値で  
規格化されたいかなる周波数安定度の尺度も 1 より十分  
小さいと考えられるので、安定度という用語を用いても  
実際には混乱を生じないと考えられる。

2.1 周波数安定度尺度の第 1 の定義 (周波数領域)

周波数変動分を公称周波数  $\nu_0$  で規格化すると、

$$y(t) \equiv \dot{\phi}(t)/2\pi\nu_0 \dots\dots(6)$$

周波数安定度の第 1 の尺度は  $y(t)$  のパワースペク  
トル密度  $S_y(f)$  で定義する。ただし、 $f$  はフーリエ周波  
数であり、 $S_y(f)$  は片側スペクトル密度で単位は  $Hz^{-1}$   
である。

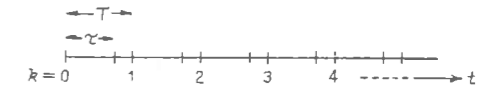
$S_y(f)$  と  $\dot{\phi}(t)$  のスペクトル密度  $S_{\dot{\phi}}(f)$  及び  $\phi(t)$   
のスペクトル密度  $S_{\phi}(f)$  (すべて片側で定義) との関係  
は、

$$S_y(f) = S_{\dot{\phi}}(f)/(2\pi\nu_0)^2 = S_{\phi}(f) \cdot (f/\nu_0)^2 \dots\dots(7)$$

で与えられる。

2.2 周波数安定度の第 2 の定義 (時間領域)

規格化された周波数変動分  $y(t)$  の  $\tau$  秒平均は、



第 1 図 サンプリング形式

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(t) dt = \frac{\phi(t_k+\tau) - \phi(t_k)}{2\pi\nu_0\tau} \dots\dots(8)$$

で与えられる。ただし、 $t_{k+1} = t_k + T$ ,  $k=0, 1, 2, \dots\dots$ で  
あり、 $T$  は  $\tau$  秒測定の繰返し周期である (第 1 図)。し  
たがって、 $T > \tau$  のときは測定間の空き時間を  
意味している。 $t_0$  は任意に選ばれる。

周波数安定度の第 2 の尺度は標本分散と類似の次の関  
係式によって定義される。

$$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle \equiv \left\langle \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \left( \bar{y}_n - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{y}_k \right)^2 \right\rangle \dots\dots(9)$$

ここで、 $\langle \rangle$  は無限時間平均を表す。(9)式は無単位の  
量である。

(9)式の  $1/(N-1)$  は不偏推定量にするためのもので  
あるが、実際は白色周波数 ( $f^0$  FM) 雑音のときには満  
足するが、白色位相 ( $f^0$  PM) 雑音のときには満足しな  
い<sup>(13)</sup>。Cutler に代表される尺度<sup>(4)</sup> は  $\langle \sigma_y^2(N \rightarrow \infty, T = \tau) \rangle$   
に相当するが、一般にこの方がプロセスの統計的性質を  
常に正確に示し、意味あるものにするとは正しくない。  
なぜなら、フリッカ周波数 ( $f^{-1}$  FM) 雑音などはフー  
リエ周波数成分  $f$  が低いほど雑音パワーが大きくなる  
ため、 $\langle \sigma_y^2(N \rightarrow \infty, T, \tau) \rangle \rightarrow \infty$  になってしまう  
からである。したがって、このような場合にデータの比  
較を意味あるものにするには有限の  $N, T$  でなければ  
ならない (実際にこれしか実現できない) し、測定結果  
にこれを明記することが必要である。

(9)式で  $N=2$  ( $N$  が整数のときの最小値)、 $T=\tau$  と  
おいた場合を  $\langle \sigma_y^2(2, T=\tau) \rangle \equiv \sigma_y^2(\tau)$  と表し、Allan  
分散と呼ぶ。これは(9)式から次のように簡潔な形で与  
えられる。

$$\sigma_y^2(\tau) = \langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 / 2 \rangle \dots\dots(10)$$

Allan 分散  $\sigma_y^2(\tau)$  を時間領域における周波数安定度  
の尺度として定義する\*。

Allan 分散は  $N \rightarrow \infty$  の場合と逆の考え方に立つもの  
といえるが、次のような特徴をもっている。

\* CCIR Rec. 538 では Allan 分散の平方根である  $\sigma_y(\tau)$   
を二標本標準偏差 (two-sample standard deviation) と呼  
称している。また、最近の外国の、文献などでは  $\sigma_y^2(\tau)$   
を二標本分散 (two-sample variance) と呼んでいるのが  
普通であるが、本論文では Allan 分散の用語に統一  
している。

①短期周波数安定度に影響を及ぼす  $f^0$  及び  $f^{-1}$  PM 雑音については  $\langle \sigma_y^2(\infty, \tau, \tau) \rangle$  の 1.5 倍程度の過大評価になるにすぎない。  $f^0$  FM 雑音については両者は一致する (第 1 表)。

② (9) 式の一般式は Allan 分散によって表現できる (3.)。したがって、雑音のスペクトル特性がわかれば  $\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle$  は Allan 分散の測定から推定できるので、Allan 分散を発振器に固有な量として取り扱うことができる。

③ Allan 分散は 2 個の測定値間の差によって与えられるので、 $\langle \sigma_y^2(\infty, T, \tau) \rangle$  が発散する  $f^{-1}$  及び  $f^{-2}$  FM 雑音の場合でも取れんすることができ、これらの雑音に対する安定度尺度として使用することができる。

3. 周波数安定度尺度間の変換

一般に、ランダム時系列を  $g(t)$  と表すと、 $g(t)$  の自己相関関数  $R_g(\tau)$  は次のように定義される。

$$R_g(\tau) = \langle g(t) \cdot g(t+\tau) \rangle \quad \dots\dots(11)$$

ただし、 $g(t)$  は定常的と仮定する。したがって、 $R_g(\tau)$  は時系列の 2 点間の時間  $\tau$  のみに依存する。

$g(t)$  のパワースペクトル密度  $S_g(f)$  は Wiener-Khintchine の公式により  $R_g(\tau)$  のフーリエ変換で与えられる。

$$S_g(f) = 4 \int_0^\infty R_g(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \quad \dots\dots(12)$$

$$R_g(\tau) = \int_0^\infty S_g(f) \cos(2\pi f\tau) df \quad \dots\dots(13)$$

$S_g(f)$  は  $0 \leq f \leq +\infty$  の範囲で定義される片側スペクトル密度である。  $-\infty \leq f \leq +\infty$  で定義される両側スペクトル密度は理論計算には便利であるが、実験との結びつきは片側スペクトル密度の方がよい。

時間領域での微分  $d/dt$  は、周波数領域では  $j\omega$  ( $j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega = 2\pi f$ ) を掛けることに相当するので、パワースペクトル密度としては  $\omega^2$  を掛けることになる。すなわち、 $g(t) = dG(t)/dt$  なる関係にある二つの量のパワースペクトル密度は次式で結ばれる。

$$S_g(f) = \omega^2 S_G(f) \quad \dots\dots(14)$$

パワースペクトル密度の単位は、 $g(t)$  が例えば  $\varphi(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)/2\pi$ ,  $\epsilon(t)$  [(1)~(3)式参照] とすると、それぞれ  $\text{rad}^2/\text{Hz}$ ,  $\text{Hz}^2/\text{Hz}$ ,  $\text{Volts}^2/\text{Hz}$  となる。このように、パワースペクトル密度はあるフーリエ周波数  $f$  における単位周波数幅当たりの強さを意味するが、実際のパワーを表しているわけではない。これは、例えば電圧変動分の場合に単位の大さきの抵抗に  $\epsilon(t)$  の電圧を消費させたとき、 $S_\epsilon(f)$  (Watts/Hz) が実際にパワーを意味するようになるという程度の類似しかない。しかし、(11)~(13)式で  $\tau=0$  とおくと、

$$R_g(0) = \langle g(t)^2 \rangle = \int_0^\infty S_g(f) df \quad \dots\dots(15)$$

となるので、二乗平均値  $\langle g(t)^2 \rangle$  は時系列全体が含んでいるパワーのように想定することができる。したがって  $S_g(f)$  は全パワーを各フーリエ周波数成分に分解したときのそれぞれにおける密度を表すということから、パワースペクトル密度という呼び方も可能なわけである。

時間領域における各量は(12), (13)式のフーリエ変換を通じて周波数領域の量と結びつけることができる。例えば、(8)式の  $\tau$  秒平均値  $\bar{y}$  の二乗平均を考える。

$$\begin{aligned} \langle \bar{y}^2 \rangle &= [\varphi(t+\tau) - \varphi(t)]^2 / (2\pi\nu_0\tau)^2 \\ &= [\langle \varphi(t+\tau)^2 \rangle + \langle \varphi(t)^2 \rangle \\ &\quad - 2\langle \varphi(t+\tau)\varphi(t) \rangle] / (2\pi\nu_0\tau)^2 \end{aligned}$$

(11)式の関係を用いると、

$$\langle \bar{y}^2 \rangle = 2[R_g(0) - R_g(\tau)] / (2\pi\nu_0\tau)^2 \quad \dots\dots(16)$$

(16)式は、(13), (15)を用いてパワースペクトル密度と関係づけることができる。

$$\langle \bar{y}^2 \rangle = \frac{4}{(2\pi\nu_0\tau)^2} \int_0^\infty S_g(f) \sin^2(\pi f\tau) df \quad \dots\dots(17)$$

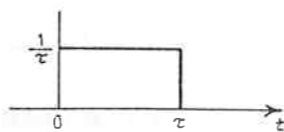
また、(7)式の  $S_y(f)$  を用いると、

$$\langle \bar{y}^2 \rangle = \int_0^\infty S_y(f) \frac{\sin^2(\pi f\tau)}{(\pi f\tau)^2} df \quad \dots\dots(18)$$

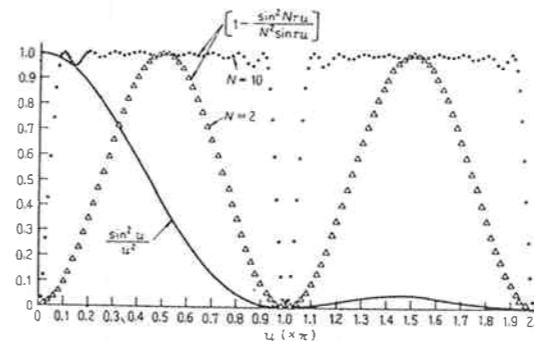
$\langle \bar{y}^2 \rangle$  は、(9)式では  $\langle \sigma_y^2(\infty, \tau, \tau) \rangle$  に、Cutlerらの記号では  $\sigma^2[\langle \dot{\varphi} \rangle_{t, \tau}] / \omega_0^2$  に<sup>(14)</sup> 相当するが Ruttman はこれを  $I^2(\tau)$  と表し、True 分散と呼んでいる<sup>(15)</sup>。

時間領域における  $\tau$  秒測定はランダム時系列  $y(t)$  を高さ  $1/\tau$ 、幅  $\tau$  の方形の時間ウィンドウを通すことに相当するが (第 2 図)、これを周波数領域のパワーで考えると、 $S_y(f)$  を  $\sin^2(\pi f\tau) / (\pi f\tau)^2$  の特性をもつ周波数ウィンドウを通すことに相当するわけである [(18)式]。したがって、 $S_y(f)$  を測定するとき  $H(j\omega)$  の特性のフィルタを付加したとすると、(18)式の右辺の積分内に  $|H(j\omega)|^2$  を新たに追加して計算することになる。第 3 図に、 $\sin^2(\pi f\tau) / (\pi f\tau)^2$  のウィンドウを示すが、その効果は  $f\tau \leq 1$  にほとんど集中しており、 $f\tau \geq 1$  では最大値が  $1/(\pi f\tau)^2$  で減衰してゆく。

(9)式の場合、 $y(t)$  を  $\tau$  秒平均の時間ウィンドウを通すだけでなく、有限個数  $N$  のサンプルと測定間に空き時間があることによるウィンドウが加わってくる。(9)式



第 2 図  $\tau$  平均の時間ウィンドウ



第 3 図 周波数ウィンドウ ( $u \equiv \pi f\tau$ )

は(16)式を求めたときと同様に自己相関関数を用いて表せる<sup>(16)</sup>。すなわち、

$$\begin{aligned} \langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle &= \frac{1}{\tau^2} \left\{ U_x(\tau) + \frac{1}{N(N-1)} \right. \\ &\quad \left. \sum_{n=0}^{N-1} (N-n) [2U_x(nT) - U_x(nT+\tau) - U_x(nT-\tau)] \right\} \quad \dots\dots(19) \end{aligned}$$

ただし、 $x$  は時間の変動分を表し、 $U_x(\tau)$  は

$$U_x(\tau) \equiv 2[R_g(0) - R_g(\tau)] / (2\pi\nu_0)^2 \quad \dots\dots(20)$$

(19)式で  $T=\tau$  とおくと簡単になって、

$$\begin{aligned} \langle \sigma_y^2(N, \tau, \tau) \rangle &= \frac{1}{(N-1)\tau^2} \\ &\quad \left[ N U_x(\tau) - \frac{1}{N} U_x(N\tau) \right] \quad \dots\dots(21) \end{aligned}$$

(18), (19)式にみられるように、全パワーに相当する分散はパワーが各周波数成分に分解されているパワースペクトル密度やそのフーリエ変換である自己相関関数を用いて表すことができるが、その逆の一般的な変換式を得ることは困難である。

3.1 周波数領域から時間領域への変換

周波数領域の安定度尺度から時間領域の尺度への変換式は Cutler によって与えられた<sup>(17)</sup>。これは、既に述べたような自己相関関数による表現からフーリエ変換を使ってパワースペクトル密度による表現に変える数学的手法を含んでいるが、文献(1)に詳しく証明されているので、ここでは結果のみを記す。

(9)式は  $S_y(f)$  を用いて次のように表せる。

$$\begin{aligned} \langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle &= \frac{N}{N-1} \int_0^\infty df S_y(f) \\ &\quad \frac{\sin^2(\pi f\tau)}{(\pi f\tau)^2} \left\{ 1 - \frac{\sin^2(\pi r f N\tau)}{N^2 \sin^2(\pi r f\tau)} \right\} \quad \dots\dots(22) \end{aligned}$$

ただし、 $r \equiv T/\tau$ 。(22)式で  $N=2$ ,  $r=1$  とおくと Allan 分散になり、次式のようになる。

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \int_0^\infty df S_y(f) \frac{\sin^4(\pi f\tau)}{(\pi f\tau)^2} \quad \dots\dots(23)$$

(22)式で、第 1 のウィンドウは  $\tau$  秒平均によるものであり、第 2 のウィンドウは有限個数  $N$  のサンプリングと測定間に空き時間があることによるものである。第 3 図に  $r=1$ , 及び  $N=2$  と 10 について示してあるが、 $N$  が大きいほど立ち上がり急になる方形状の特性になり、 $N$  が小さいときは正弦波状の特性になる。図には示していないが、 $r>1$  のときは繰り返し周期が早くなるだけで、全体の形状は全く同じである。このウィンドウの特徴は  $\pi r f\tau \rightarrow 0$  で  $N$  が有限のとき零になる、すなわち低域遮断のフィルタ特性をもっていることである。このために、 $S_y(f)$  の  $f^{-1}$  又は  $f^{-2}$  のときでも(22)式は発散しないですむわけである。

高安定発振器において、 $S_y(f)$  はフーリエ周波数のべき乗としてモデル化することが可能である。すなわち、

$$S_y(f) = h_\alpha f^\alpha \quad \dots\dots(24)$$

$h_\alpha$  はスペクトル密度の強さである。あるいは、 $\alpha = -2, -1, 0, 1, 2$  などの各独立した雑音の合成としてモデル化することが一般的に行われている。

$$S_y(f) = h_{-2} f^{-2} + h_{-1} f^{-1} + h_0 f^0 + h_1 f + h_2 f^2 \quad \dots\dots(25)$$

ここで、第 1 項は第 3 項白色 FM 雑音のランダムウォークであり、第 2 項はフリッカ FM 雑音、第 4 項及び第 5 項はそれぞれフリッカ PM 雑音及び白色 PM 雑音であるが、FM 雑音に変換して表したものである [(14)式]。(22), (23)式の  $S_y(f)$  としてこれら雑音モデルを代入して計算した結果を第 1 表に示す<sup>(11)(13)</sup>。

(22)式を  $u \equiv \pi f\tau$  とおいて書き換えると、

$$\begin{aligned} \langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle &= \frac{N}{(N-1)\pi\tau} \int_0^\infty du S_y\left(\frac{u}{\pi\tau}\right) \\ &\quad \frac{\sin^2 u}{u^2} \left\{ 1 - \frac{\sin^2 Nru}{N^2 \sin^2 ru} \right\} \quad \dots\dots(26) \end{aligned}$$

(26)式で、 $u \rightarrow 0$  のときは  $S_y(u/\pi\tau)$  を除いた項の大きさは  $u^2$  のように、また、 $u \rightarrow \infty$  のときは主に  $u^{-2}$  のように変化する\*。したがって、積分で  $u$  のべきが一増すことを考えると、(24)式の  $\alpha$  が  $-3 < \alpha < 1$  の範囲なら低域又は高域で遮断を行わなくても(26)式は収れんする。それ以外では、 $\alpha \leq -3$  のスペクトル特性をもつ雑音に対しては低域での新たな遮断が、また、 $\alpha \geq 1$  (PM 雑音) では高域での遮断が必要になってくる。第 1 表の場合、 $0 \leq f \leq f_h$  の方形フィルタを仮定している。した

\*  $u \rightarrow 0$  のとき  $\sin^2 u/u^2 \rightarrow 1$ 。また、(26)式の { } 内の  $\sin^2 Nru$  を展開すると { } 内は  $u \rightarrow 0$  で  $\sin^2 ru$  の項に近似されるので、結局 { }  $\propto u^2$  となる。(26)式の  $\sin^2 u \times \{ \}$  は定数項と振動項からなるので、 $u \rightarrow \infty$  で振幅特性を主に左右するのは  $1/u^2$  となる。

第1表 安定度尺度の変換

$S_y(f) \equiv$  one-sided spectral density of  $y$  (dimensions are  $y^2/f$ ),  $0 \leq f \leq f_A$ ,  $f_A \equiv B$ ,  $2\pi f_A \tau \gg 1$ ;  $S_y(f \gg f_A) = 0$   
 General Definition:  $\langle \sigma_y^2(N, T, \tau, f_A) \rangle \equiv \left\langle \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\bar{y}_n - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{y}_k)^2 \right\rangle$ ,  $\frac{dx}{dt} \equiv y \equiv \frac{\delta v}{v_0}$ ,  $\tau \equiv T$   
 Special Case:  $\sigma_y^2(\tau) \equiv \langle \sigma_y^2(N=2, T=\tau, \tau, f_A) \rangle = \left\langle \frac{(\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2}{2} \right\rangle$   
 Useful Relationship:  
 $(2\pi)^2 = 3948$   
 $4n2 = 0.693$   
 $2ln2 = 1.386$   
 $ln10 = 2.303$

Time Domain (Allan variances, ...)	$\sigma_y^2(\tau)$ ( $N=2, \tau=1$ )	$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau, f_A) \rangle$ ( $\tau=1$ )	$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau, f_A) \rangle$
<b>FREQUENCY DOMAIN</b> (Power law spectral densities)			
<b>WHITE x</b> $S_y(f) = h_2 f^2$ ( $S_x(f) = \frac{h_2}{(2\pi)^2}$ ) $2\pi f_A \tau > 1$	$h_2 \cdot \frac{3f_A}{(2\pi)^2 \tau^2}$	$h_2 \cdot \frac{N+1}{N(2\pi)^2} \cdot \frac{2f_A}{\tau^2}$	$h_2 \cdot \frac{N+1}{N(2\pi)^2} \cdot \frac{2f_A}{\tau^2}$
<b>FLICKER x</b> $S_y(f) = h_1 f$ ( $S_x(f) = \frac{h_1}{(2\pi)^2 f}$ ) $2\pi f_A \tau > 1, 2\pi f_A T > 1$	$h_1 \cdot \frac{1}{\tau^2 (2\pi)^2} \left[ \frac{9}{2} + 3 \ln(2\pi f_A \tau) - \ln 2 \right]$	$h_1 \cdot \frac{2(N+1)}{N\tau^2 (2\pi)^2} \left[ \frac{3}{2} + \ln(2\pi f_A \tau) - \frac{\ln N}{N^2 - 1} \right]$	$h_1 \cdot \frac{2}{(2\pi\tau)^2} \left\{ \frac{3}{2} + \ln(2\pi f_A \tau) + \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^{N-1} (N-n) \cdot \ln \left[ \frac{n\tau}{n^2 \tau^2 - 1} \right] \right\}$ , for $\tau > 1$
<b>WHITE y (Random Walk x)</b> $S_y(f) = h_0$ ( $S_x(f) = \frac{h_0}{(2\pi)^2 f^2}$ )	$h_0 \cdot \frac{1}{2} \tau^{-1}$	$h_0 \cdot \frac{1}{2} \tau^{-1}$	$h_0 \cdot \frac{1}{2} \tau^{-1}$ , for $\tau \gg 1$ $h_0 \cdot \frac{1}{6} \tau(N+1) \tau^{-1}$ , for $N\tau \leq 1$
<b>FLICKER y</b> $S_y(f) = \frac{h_{-1}}{f}$ ( $S_x(f) = \frac{h_{-1}}{(2\pi)^2 f^3}$ )	$h_{-1} \cdot 2 \ln 2$	$h_{-1} \cdot \frac{N \ln N}{N-1}$	$h_{-1} \cdot \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n=1}^{N-1} (N-n) \left[ -2(n\tau)^2 \ln(n\tau) + (n\tau+1)^2 \ln(n\tau+1) - (n\tau-1)^2 \ln(n\tau-1) \right]$
<b>RANDOM WALK y</b> $S_y(f) = \frac{h_{-2}}{f^2}$ ( $S_x(f) = \frac{h_{-2}}{(2\pi)^2 f^4}$ )	$h_{-2} \cdot \frac{(2\pi)^2 \tau}{6}$	$h_{-2} \cdot \frac{(2\pi)^2 \tau}{12} \cdot N$	$h_{-2} \cdot \frac{(2\pi)^2 \tau}{12} [\tau(N+1)-1]$ , $\tau \gg 1$

がって、実際の測定でこれと異なる特性のフィルタを用いたときは第1表の結果と異なってくることが考えられる。このようなときは、(22), (23)式でフィルタ特性  $|H(j\omega)|^2$  を掛けて計算すればよい。また、一般に周波数安定度の測定においては測定帯域幅を結果について明記する必要がある。

第1表において  $f^0$  FM 雑音については  $N, r(\geq 1)$  に無関係であるが、これはインパルス性の雑音のため  $\tau$  間に相関が全くないことによる。このことは PM 雑音もこれに準じており、相関が小さく  $N, r$  への依存度が小さい。  $f^0$  FM 及び  $f^0$  PM 雑音については分散を SN 比で表すこともよく行われている、[(70), (71)式]。  $f^{-1}$  PM 雑音については  $f^0$  PM 雑音にほぼ準じていると考えるべき。

一般に、長時間測定においては FM 雑音が支配的になる。ところが、 $\alpha < 0$  の場合  $\langle \sigma_y^2(N \rightarrow \infty, T, \tau) \rangle \rightarrow \infty$  となる。これは周波数の無限個数測定の分散が発散するという事であるから、このような雑音を伴う場合周波数の平均値の真値を求めることができない。一方、周波数ドリフトの場合、 $dy(t)/dt$  を測定するため(14)式から  $f^\alpha \times f^{-2}$  となるので、 $\alpha = -1, -2$  のような場合でも分散は発散せず、ドリフトを決定することが可能である。逆に時間は周波数の積分で与えられるから、スペクトル密度は  $f^\alpha \times f^{-2}$  のようになり、時間に支配的に影響する  $f^{-1}$  及び  $f^{-2}$  FM 雑音の場合には、 $f^{-3}$  及び  $f^{-4}$  のスペクトル特性となる。したがって、(22), (23)式の尺度は時刻に対して使用することはできない。これに対して Modified Sample 分散<sup>(15)</sup> や Prediction error 分散<sup>(16)</sup> などの提案があり、また、ARIMA モデル<sup>(18) (19)</sup> やカルマンフィルタによる取扱いが有力になってくる<sup>(22) (23)</sup>。

3.2 時間領域から周波数領域への変換

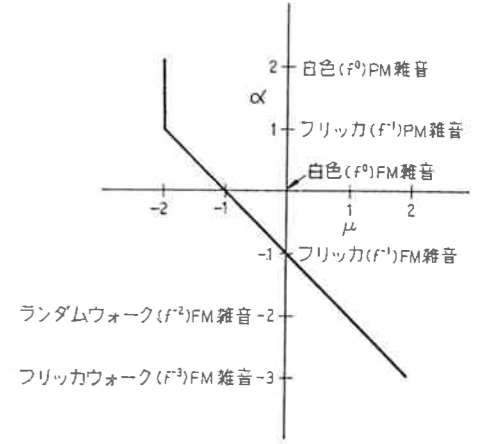
時間領域の周波数安定度尺度から周波数領域のそれへの変換の一般式を導くことは困難である。しかし、高安定発振器の場合などによく当てはまるスペクトルモデルである(24), (25)式の場合は変換が可能である。すなわち、(26)式から、

$$\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle = \tau^{-\alpha-1} h_\alpha C_\alpha = \tau^\mu h_\alpha C_\alpha \quad (-3 < \alpha < 1) \dots (27)$$

ただし、 $\mu \equiv -\alpha - 1$ , 及び

$$C_\alpha \equiv \frac{N}{(N-1)\pi^{\alpha+1}} \int_0^\infty du u^\alpha \frac{\sin^2 u}{u^2} \left\{ 1 - \frac{\sin^2(Nru)}{N^2 \sin^2(ru)} \right\}$$

$\mu$  と  $\alpha$  の関係を第4図に示す<sup>(1)</sup>。ただし、 $\alpha \geq 1$  では高域遮断周波数  $f_h$  が必要であり、また、 $2\pi f_h \tau \gg 1$



第4図  $\mu$  と  $\alpha$  の関係

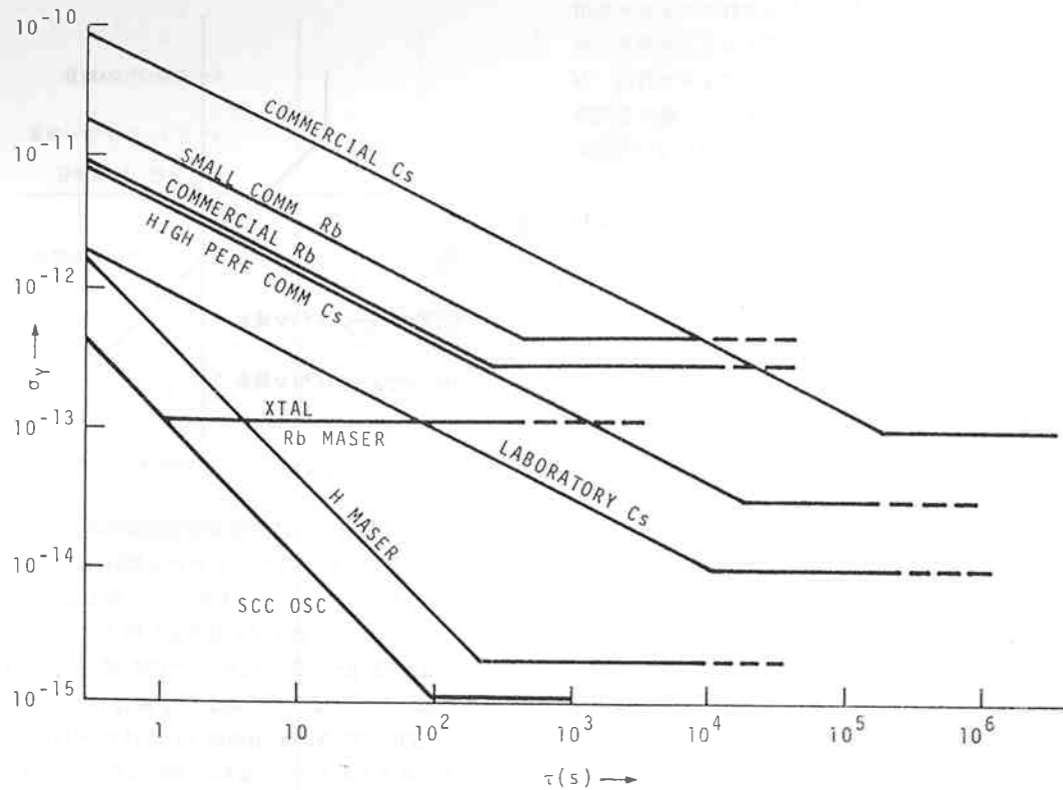
としている。第4図は時間領域の安定度の測定から  $\tau$  特性 ( $\mu$ ) を把握し得るので、これから雑音のスペクトル特性 ( $\alpha$ ) が推定できる。したがって、第1表からパワースペクトル密度の強さ  $h_\alpha$  を決定し得る。ただし、 $1 \leq \alpha \leq 2$  では  $\mu \approx -2$  となり、 $f^0$  PM 雑音と  $f^{-1}$  PM 雑音の識別ができない。このような場合は測定帯域幅  $f_h$  を可変にして Allan 分散の  $f_h$  に対する特性を求めることが考えられる<sup>(24)</sup>。また、測定値を少しずつ重複させながら処理する Modified Allan 分散の提案もある<sup>(14)</sup>。

Allan 分散の測定からスペクトル特性を推定する方法は、長時間測定のデータを必要とし、フーリエ周波数が約 1 Hz 以下 ( $\tau$  が 1 秒以上、数時間又は数か月になることもある) の時系列に特に有効である。筆者らは衛星からのミリ波電波強度が降雨により減衰を受けた時系列データを Allan 分散処理して、これがランダムウォーク ( $f^{-2}$ ) することを見いだしたことはその一例である<sup>(25)</sup>。

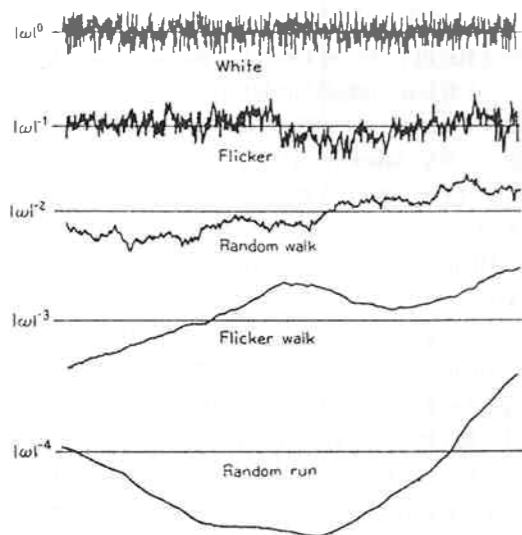
Allan 分散の高安定発振器についての典型的な形を第5図に<sup>(26)</sup>、また、 $f^\alpha$  型のスペクトル特性をもつ時系列のシミュレーションによるプロットを第6図に示す<sup>(27)</sup>。

Allan 分散等の測定から一般的なパワースペクトル密度を求めることができないことは既に述べた。このことは、第7図に示される Allan 分散のウィンドウの分解能の悪さを見れば理解できる。すなわち、 $2\tau f \approx 1$  の主ウィンドウのほかに、これの奇数倍のところに無視できないウィンドウがある。これに対して、Hadamard 分散により一般的にパワースペクトル密度を算出する方法がある<sup>(17)</sup>。

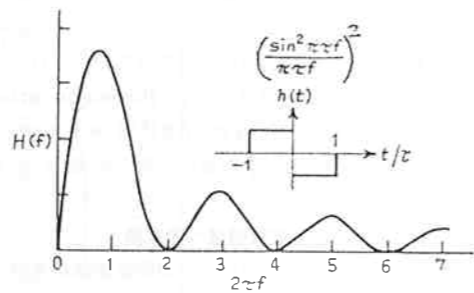
周波数領域で鋭い通過特性をもたせるには、時間領域のウィンドウは正弦波に近い必要がある。それには第7



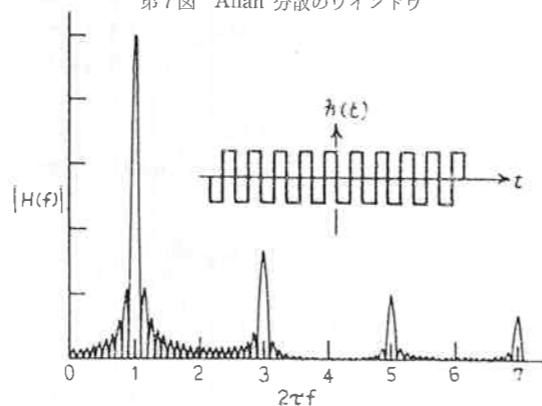
第5図 周波数標準器の周波数安定度



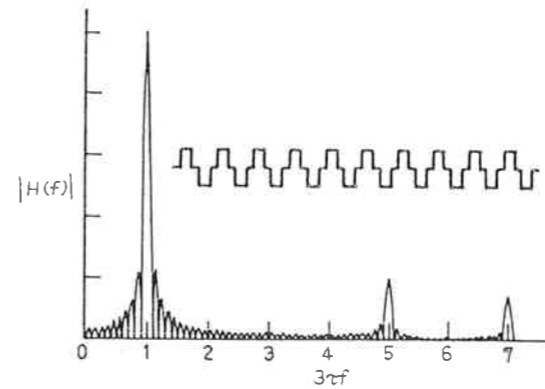
第6図 f<sup>α</sup>型雑音時系列のシミュレーション



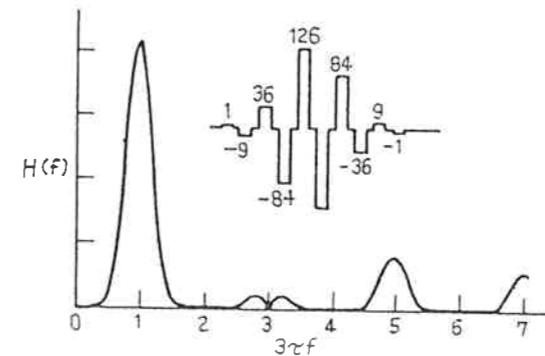
第7図 Allan 分散のウィンドウ



第8図 Hadamard 分散のウィンドウ (N=10)



第9図 修正 Hadamard 分散のウィンドウ (50%空き時間, N=10)



第10図 修正 Hadamard 分散のウィンドウ (二項分布係数の重み, N=5)

図のウィンドウを幾つも連ねて第8図のようにし、更に空き時間を作って丸みをもたせるようにするとよい(第9図)。空き時間の最適値は測定時間  $\tau$  の1/2である。しかし、測定の開始と終わりが急であると、多くの小さいウィンドウができるので、第10図に示すように測定値のそれぞれに重みをつけるのがよい。このことにより、主ウィンドウの幅が広がり、分解能がやや低下するが、測定値の信頼性は高まる<sup>(29)</sup>。

Hadamard 分散は次のように定義される。

$$\langle \sigma_H^2(N, T, \tau) \rangle = \langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_{k+2} + \bar{y}_{k+3} - \dots - \bar{y}_{k+2N})^2 \rangle \dots (28)$$

これをスペクトル密度で表すと、

$$\langle \sigma_H^2(N, T, \tau) \rangle = \int_0^\infty |H(f)|^2 S_y(f) df \dots (29)$$

ただし、 $|H(f)|^2$  はウィンドウ特性であるが、第8図の場合次のようになる<sup>(29)</sup>。

$$|H(f)|^2 = \left( \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right)^2 \left( \frac{\sin N \pi T f}{\cos \pi T f} \right)^2 \dots (30)$$

②式の  $\bar{y}_k$  を二項係数で重みをつけた場合の分散は

$$\langle \sigma_{HBC}^2(N, T, \tau) \rangle = \left\langle \left( \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \binom{N-1}{k-1} \bar{y}_k \right)^2 \right\rangle \dots (31)$$

と書き表せるが<sup>(17)</sup>、これに対するウィンドウ特性は<sup>(29)</sup>、

$$|H_{BC}(f)|^2 = 2^{2(N-1)} \left( \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right)^2 \sin^2(N-1) \pi T f \dots (32)$$

第9図のような場合、Hadamard 分散の測定から、パワースペクトル密度は  $f=1/2T$  における幅  $B_N = (2NT)^{-1}$  のウィンドウのみが支配的であるとして、②式より次のように変換することができる<sup>(17)</sup>。

$$S_y(f=1/2T) \cong (2NT/A_1^2) \langle \sigma_H^2(N, T, \tau) \rangle \dots (33)$$

ただし、 $A_1 = 2N \sin(\pi x) / (\pi x)$ 、 $x = \tau/2T$  である。既に述べたように、③式は  $T = (3/2)\tau$  のとき最適となる。

### 3.3 周波数領域の尺度間の変換

③、⑥式より、周波数の変動分  $\delta\nu$  及び位相の変動分  $\phi$  の間には次の関係がある。

$$\delta\nu = d\phi/dt / 2\pi = \dot{\phi} / 2\pi \dots (34)$$

$$y \equiv \delta\nu / \nu_0 \dots (35)$$

したがって、④式よりパワースペクトル密度間には、

$$S_{\delta\nu}(f) = f^2 S_\phi(f) \dots (36)$$

$$S_y(f) = S_{\delta\nu}(f) / \nu_0^2 = (f/\nu_0)^2 S_\phi(f) \dots (37)$$

$S_{\delta\nu}(f)$ 、 $S_\phi(f)$ 、 $S_y(f)$  の単位は、それぞれ  $\text{Hz}^2/\text{Hz}$ 、 $\text{rad}^2/\text{Hz}$ 、 $1/\text{Hz}$  である。

時間間隔  $\tau$  と位相の間には、

$$\phi - \phi_0 = 2\pi\nu_0\tau \dots (38)$$

ただし、 $\phi_0$  は適当な固定位相量である。したがって、 $\tau$  の変動分  $\delta\tau$  と位相変動分の間には、

$$\phi = (2\pi\nu_0)\delta\tau \dots (39)$$

それゆえ、

$$S_\phi(f) = (2\pi\nu_0)^2 S_{\delta\tau}(f) \dots (40)$$

$$S_{\delta\tau}(f) = S_y(f) / (2\pi f)^2 \dots (41)$$

$S_{\delta\tau}(f)$  の単位は  $\text{sec}^2/\text{Hz}$  である。以上のパワースペクトル密度の周波数範囲は  $0 \leq f \leq \infty$  で定義されている。

実際にパワースペクトル密度を測定する場合、厳密には RF (無線周波数) 信号のパワースペクトル密度  $S_{RF}(f)$  (例えば、①式の  $V(t)$  のパワースペクトル密度  $S_V(f)$ ) を測定することになる。ところが、これにはキャリアパワーや振幅変動分のパワーも含まれている。そして、たとえ振幅の変動分が無視し得るとしても、 $S_{RF}(f)$  は周波数の変動分とは一般に単純には関係づけられ

ない\*.  $S_{RF}(f)$  が実際の尺度であるにもかかわらず周波数安定度の第一義的な尺度に選ばれないのはこの理由による.

RF 信号の測定から周波数領域の安定度尺度を求める方法について述べる. (1)式の信号  $V(t)$  を基準信号  $V_r(t) = V_{or} \sin 2\pi\nu_0 t$  とともに掛け算型の検出器 (二重平衡型混合器など) に入れたとすると, 出力信号  $v(t)$  は,  $v(t) = \gamma V(t) \cdot V_r(t)$

$$= \gamma V_{or} (V_0 + \epsilon) \sin(2\pi\nu_0 t) \times \sin(2\pi\nu_0 t + \varphi)$$

ただし,  $\gamma$  は検出器の効率に related した定数である. 上式は次のように書くことができる.  $v(t) = (A_{ptp}/2)(1 + \epsilon/V_0) [\cos \varphi - \cos(4\pi\nu_0 t + \varphi)]$  (42)

ここで,  $A_{ptp} = \gamma V_{or} V_0$  は正弦波出力を仮定したときの p-p 値である. いま, 雑音のスペクトル分布が  $f \leq f_h$  に制限されており, 測定帯域幅  $f'_h$  と  $V_0$  との間に,  $0 < f_h < f'_h < \nu_0$

なる関係が成立しているとする, (42)式の [ ] 内のキャリア成分は低域フィルタで除くことができるから,  $v'(t) = (A_{ptp}/2)(1 + \epsilon/V_0) \cos \varphi$  (43)

ただし, キャリアを完全に分離除去できるには(5)式の条件が成立しなければならない. (43)式で  $\cos \varphi \approx 1$  とすると,  $v'(t) \approx (A_{ptp}/2)(1 + \epsilon/V_0)$  (44)

となり, 振幅変調雑音  $\epsilon$  を測定することになる.  $\varphi$  に固定位相  $\pi/2$  を加えると,  $\cos[\varphi - \pi/2] = \sin \varphi \approx \varphi$  となるから, (43)式は  $v'(t) \approx A_{ptp} \varphi / 2 + \gamma V_{or} \varphi \epsilon / 2 \approx A_{ptp} \varphi / 2$  (45)

このようにして, ランダム雑音が位相検出器の出力として得られるならば, これを周波数領域又は時間領域での任意の測定が可能である. (45)式が得られるには, (4), (5)式の条件が成立するとしているが, これが成立しない

\* (1)式の RF スペクトル密度  $S_V(f)$  と位相スペクトル密度  $S_\varphi(f)$  の完全な関係式は, AM 雑音  $\epsilon(t)$  を無視して, Rutman によって与えられている (30).

$$S_V(f) = \frac{V_0^2}{2} e^{-\langle \varphi^2 \rangle} \left\{ \delta(f - \nu_0) + S_\varphi^{(r,s)}(f - \nu_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} [S_\varphi^{(r,s)}(f) \otimes^{n-1} S_\varphi^{(r,s)}(f)] \nu_0 \right\}$$

ただし,  $\varphi$  は定常正規過程とし,  $S_\varphi^{(r,s)}(f)$  は  $\varphi$  の両側スペクトル密度, [ ] 内は  $S_\varphi(f)$  同士の  $n-1$  回のたたき込み積分であり, キャリア周波数  $\nu_0$  を中心とする変換に追従される. (4), (5)式の条件が成立するとき,

$$S_V(f) \approx \frac{V_0^2}{2} \{ \delta(f - \nu_0) + S_\varphi^{(r,s)}(f - \nu_0) \}$$

となって,  $S_V(f)$  の観測から直接  $S_\varphi(f)$  を推定することができる.

ときは  $\sin \varphi$  は一般に Bessel 関数として表され,  $\varphi$  の各フーリエ周波数成分の高調波が含まれてくるようになる.

キャリア周波数  $\nu_0$  を中心とする二つの側帯波成分  $\nu_0 + f$  と  $\nu_0 - f$  が振幅が等しくコヒーレントであれば, 位相検出器の出力では単純に加算されるのでパワーとしては4倍になる. したがって,  $v'(t)$  のパワースペクトル密度を  $S_{v'}(f)$ , PM 雑音  $\varphi$  による周波数  $\nu_0 + f$  の側帯波成分の RF パワースペクトル密度を  $[S_{RF}(\nu_0 + f)]_{PM}$  と表すと,

$$S_{v'}(f) = 4[S_{RF}(\nu_0 + f)]_{PM} \dots (46)$$

更に, Halford は測定上の便利さから次のような量を定義した (31).

$$\mathcal{L}(f) \equiv [S_{RF}(\nu_0 + f)]_{PM} / P_{total} \dots (47)$$

ただし,  $P_{total}$  は全信号パワーである.  $\mathcal{L}(f)$  の単位は  $\text{Hz}^{-1}$  であり,  $-\nu_0 < f < +\infty$  の範囲にわたる. また,  $\mathcal{L}(f)$  は入力キャリア信号周波数を基準にとるものとし,  $\mathcal{L}(f) \approx \mathcal{L}(-f)$  を仮定している.

(49)式を二乗平均を考えると,  $\langle \varphi^2 \rangle \approx 4 \langle v'^2 \rangle / A_{ptp}^2 = \langle v'^2 \rangle / 2P_{total}$  (48)

ここで,  $A_{ptp}^2 = 8 A_{rms}^2 = 8 P_{total}$ .  $\langle v'^2 \rangle / 2$  は雑音パワーであるから, これを  $P_N$  とおくと

$$\langle \varphi^2 \rangle \approx P_N / P_{total} \dots (49)$$

すなわち,  $\langle \varphi^2 \rangle$  は信号対雑音比で与えられる.

(48), (49)式に対応するパワースペクトル密度は,  $S_\varphi(f) \approx S_{v'}(f) / 2P_{total} = S_{v'rms}(f) / P_{total}$  (50)

(46), (47)式の関係を用いると,  $\mathcal{L}(f) \approx S_\varphi(f) / 2$  (51)

このように, 位相雑音のスペクトル密度  $S_\varphi(f)$  は測定上実際の量  $\mathcal{L}(f)$  と結びつけることができる.  $A_{ptp}$  を測定するには, 位相検出器の二つの入力信号の周波数をわずかにずらして, 出力に正弦波のビート信号を得るようにすると, その p-p 値が  $A_{ptp}$  となる. 再び零ビートにしたときの雑音レベルが  $A_{ptp}$  より十分小さければ, 位相差  $\pi/2$  の条件がほぼ成立しているとしてよい.

(48)式の  $\langle v'^2 \rangle$  を周波数  $f$  を中心とする単位帯域幅のウィンドウを通して得られたとすると, (51)式は

$$\mathcal{L}(f) = 2 \langle v'^2 \rangle / n^2 A_{ptp}^2 \dots (52)$$

ただし,  $n$  は通倍次数である. (52)式から  $\mathcal{L}(f)$  を測定によって求めることができる.

その他の周波数領域の尺度としては, 例えばマイクロ波発振器の FM 雑音を規定するのに, 周波数弁別器の出力において周波数  $f_m$  を中心とする 1 kHz の帯域幅で測定した rms 電圧を使用する場合がある (4). この rms 電圧は校正により rms 周波数偏移  $\langle \delta f^2 \rangle_{f=f_m}^{1/2}$

に対応させることができ, 周波数安定度の尺度を用いて次のように表すことができる [(19)式].

$$\langle \delta f^2 \rangle_{f=f_m} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{f_m - B/2}^{f_m + B/2} S_\varphi(f) df \dots (53)$$

ただし, 帯域幅  $B$  の方形フィルタを通ずとする.

$$S_\varphi(f) \text{ が帯域幅 } B \text{ 内でほぼ一定とするなら, } \langle \delta f^2 \rangle_{f=f_m} \approx S_\varphi(f) B / (2\pi)^2 \dots (54)$$

$$\text{又は, } \langle \delta f^2 \rangle_{f=f_m}^{1/2} / \nu_0 \approx [BS_y(f)]^{1/2} \dots (55)$$

$f_m$  に対して  $\langle \delta f^2 \rangle_{f=f_m}^{1/2} / \nu_0$  をプロットすることが多い. また,  $\langle \delta f^2 \rangle_{f=f_m}^{1/2} / f_m$  が小さいときは,

$\langle \delta f^2 \rangle_{f=f_m}^{1/2} / f_m$  と同じ rms 周波数偏移を起こさせるような周波数  $f_m$  の正弦波変調信号による単側帯波のパワーとキャリアのパワーとの比で表すことがある. すなわち,

$$(N/C)_{dB} = -20 \log_{10} (\sqrt{2} f_m / \langle \delta f^2 \rangle_{f=f_m}^{1/2}) \dots (56)$$

### 4.3 時間領域の尺度間の変換

周波数安定度の尺度  $\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle$  は  $N, T, \tau$  (及び  $f_h$ ) の関数であるから, 同一の信号についてこれらのパラメータを変えたときの尺度相互間で変換できれば便利である. ランダム雑音のスペクトル特性が(4)式のように周波数成分のべきで表されるとき, 次のようなバイアス関数を定義する (32).

$$B_1(N, r, \mu) \equiv \langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle / \langle \sigma_y^2(2, T, \tau) \rangle \dots (57)$$

$$B_2(r, \mu) \equiv \langle \sigma_y^2(2, T, \tau) \rangle / \langle \sigma_y^2(2, \tau, \tau) \rangle \dots (58)$$

ただし,  $r \equiv T/\tau$ .  $\mu$  と  $\alpha$  の関係は第4図に示されている.

(19)式の  $U_x(\tau)$  が,  $U_x(\tau) = a(\mu)\tau^\mu$  のように表されると (5), (57), (58)式は次のように書ける.

$$B_1(N, r, \mu) = \frac{1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{N-n}{N(N-1)} [2|nr|^{\mu+2} - |nr+1|^{\mu+2} - |nr-1|^{\mu+2}]}{1 + [2|r|^{\mu+2} - |r+1|^{\mu+2} - |r-1|^{\mu+2}]/2} \dots (59)$$

$$B_2(r, \mu) = \frac{1 + [2|r|^{\mu+2} - |r+1|^{\mu+2} - |r-1|^{\mu+2}]/2}{2(1-2\mu)} \dots (60)$$

(59)式で  $r=1$  とおくと,  $B_1(N, r=1, \mu) = N(1-N^\mu) / [2(N-1)(1-2^\mu)]$  (61)

また, 定義により,  $B_2(r=1, \mu) = 1$  である.

(59), (61)式では  $\mu=0$  で  $0/0$  の形になるが, そのときは L'Hospital の定理を使って計算する必要がある (例えば, 分子と分母を  $\mu$  で微分した後  $\mu \rightarrow 0$  を代入する). 文献(3)に  $B_1, B_2$  の値が  $\mu, r$  をパラメータとして表にされている. 例えば, 測定によって  $\langle \sigma_y^2(N_1, T_1, \tau_1) \rangle$  の推定値を得たとすると,  $\langle \sigma_y^2(N_2, T_2, \tau_2) \rangle$  は次式により計算できる.

$$\langle \sigma_y^2(N_2, T_2, \tau_2) \rangle = \left( \frac{\tau_2}{\tau_1} \right)^\mu \left[ \frac{B_1(N_2, r_2, \mu) B_2(r_2, \mu)}{B_1(N_1, r_1, \mu) B_2(r_1, \mu)} \right] \langle \sigma_y^2(N_1, T_1, \tau_1) \rangle \dots (62)$$

ただし,  $r_1 = T_1/\tau_1, r_2 = T_2/\tau_2$ .

(59), (60)式から  $B_1, B_2$  の主なものを計算すると次のようになる.

$$\begin{aligned} B_1(N, r, 2) &= N(N+1)/6 \\ B_1(N, 1, 1) &= N/2 \\ B_1(N, r, -1) &= 1 \quad (r \geq 1) \\ B_1(N, r, -2) &= 1 \quad (r \neq 1, 0) \\ B_2(0, \mu) &= 0 \\ B_2(r, 2) &= r^2 \\ B_2(r, 1) &= (3r-1)/2 \quad (r \geq 1) \\ B_2(r, 0) &= [-2r^2 \ln r + (r+1)^2 \ln(r+1) + (r-1)^2 \ln(r-1)] / (4 \ln 2) \\ &\approx (\ln r + 2) / 2 \ln 2 \quad (r \gg 1) \\ B_2(r, -1) &= r \quad (0 \leq r \leq 1) \\ &= 1 \quad (r \geq 1) \\ B_2(r, -2) &= 0 \quad (r=0) \\ &= 1 \quad (r=1) \\ &= 2/3 \quad (r > 1) \end{aligned} \dots (63)$$

次に, 時間領域で用いられるその他の尺度を幾つか述べておく. (1)式の信号を適当な周波数  $f_B$  に下げて, カウンタで周期測定したとする. 周期数を  $N_0$  とし, この間の時間間隔を  $\tau$  とすると(3)式と類似の関係から,

$$2\pi N_0 = \int_t^{t+\tau} [2\pi f_B + \dot{\varphi}(t')] dt' = 2\pi f_B \tau + \varphi(t+\tau) - \varphi(t) \dots (64)$$

いま,  $\tau_0 = N_0/f_B, \tau = \tau_0 - \delta\tau (\delta\tau \ll \tau_0)$  のようにおくと, (64)式は,

$$\varphi(t+\tau_0) - \varphi(t) \approx 2\pi f_B \delta\tau \dots (65)$$

したがって, 周波数変動の  $\tau$  秒平均値  $\overline{\delta\nu}$  は,

$$\overline{\delta\nu} = [\varphi(t+\tau_0) - \varphi(t)] / 2\pi\tau_0 = f_B \delta\tau / \tau_0 \dots (66)$$

公称値  $\nu_0$  で規格化すると,

$$\bar{y} \equiv \frac{\overline{\delta\nu}}{\nu_0} = \frac{f_B}{\nu_0} \cdot \frac{\delta\tau}{\tau_0} \dots (67)$$

また、 $\Delta\varphi \equiv \varphi(t+\tau_0) - \varphi(t)$ ,  $\Phi_0 \equiv 2\pi\nu_0\tau_0$  とおくと、(67)式は

$$\bar{y} = \frac{1}{2\pi\nu_0} \frac{\Delta\varphi}{\tau_0} = \frac{\Delta\varphi}{\Phi_0} \dots\dots(68)$$

(67)式は周波数カウンタで測定される時間の変動量を周波数の変動量に換算する重要な関係式である。周波数安定度としては(67)又は(68)式の rms 値を求めるのが従来よく行われてきた方法であるが、 $f^{-1}$  及び  $f^{-2}$  FM 雑音の場合  $N \rightarrow \infty$  で rms 値が発散してしまうことは既に述べた [ $\langle \sigma_y^2(\infty, T, \tau) \rangle^{1/2}$  に相当する]。しかし、PM 雑音や  $f^0$  FM 雑音の場合、この方法の方が統計的意味を分かりやすく表しているために、 $\sigma_y(\tau)$  の使用より適している場合が少なからずあるものと思われる。

$f^0$  PM 雑音のとき、 $\bar{y}$ ,  $\delta\tau$ ,  $\Delta\varphi$  の各 rms 値は Allan 分散の平方根と次のように関係づけられる。

$$\begin{aligned} \sigma_y(\tau)_{f^0 \text{ PM}} &= \sqrt{3/2} (\bar{y})_{rms} \\ &= \sqrt{3/2} (f_B/\nu_0) \cdot (\delta\tau)_{rms}/\tau_0 \\ &= \sqrt{3/2} (\Delta\varphi)_{rms}/\Phi_0 \dots\dots(69) \end{aligned}$$

ただし、 $2\pi f_B \tau \gg 1$  とする。 $f^{-1}$  PM 雑音のときは(69)式の係数  $\sqrt{3/2}$  がやや小さめになるだけであり、(69)式によっても事実上差し支えない。

(69)式から、位相変動の二乗平均値は信号対雑音比(SNR)で与えられるので、(69)式は次のようにも書ける。

$$\sigma_y(\tau)_{f^0 \text{ PM}} = \sqrt{3/2} (2\pi\nu_0\tau_0)^{-1} (\text{SNR})^{-1/2} \dots\dots(70)$$

また、発振器の  $f^0$  FM 雑音については(4)、

$$\sigma_y(\tau)_{f^0 \text{ FM}} = [Q^2\tau_0 \cdot P/(kT/2)]^{-1/2} \dots\dots(71)$$

ただし、 $Q$  は共振器の負荷、 $P$  は発振電力、 $k$  はボルツマン常数、 $T$  は実効雑音温度である。 $P/(kT/2)$  は単位雑音帯域幅の SN 比を表している。

高安定発振器では周波数ドリフトがその長期的性能を大きく左右する。測定されたデータから決定可能な量としてのドリフトとランダム雑音を分離して、安定度尺度を求めるのが普通である。それには最小二乗法による直線の当てはめが有力な方法であるが、このようにして決定した周波数ドリフトを Allan 分散対  $\tau$  の図の上に表す場合を考える。

ドリフトの傾斜を  $\beta$  として、これを、(8)、(10)式へ代入すると次式を得る。

$$\sigma_y(\tau) = |\beta|\tau/\sqrt{2} \dots\dots(72)$$

すなわち、 $\tau$  に正比例した特性を得るが、これは見掛け上  $f^{-3}$  FM 雑音のようになる。しかし、 $f^{-3}$  FM 雑音に対しては Allan 分散は発散するので、これに対する尺度にはならない。なお、傾斜の位置は  $|\beta|$  によるが、ドリフトの方向は示されない。

実際の場合、真のドリフトか  $f^{-2}$  又は  $f^{-3}$  スペクトル

ル雑音の極めて低い周波数成分(例えば、数か月以上の周期成分)であるか判断することは難しい。このことは時刻誤差の時系列のときに特に重要となるが、Jones らは、データの差分をとることにより識別する方法を試みている(33)。

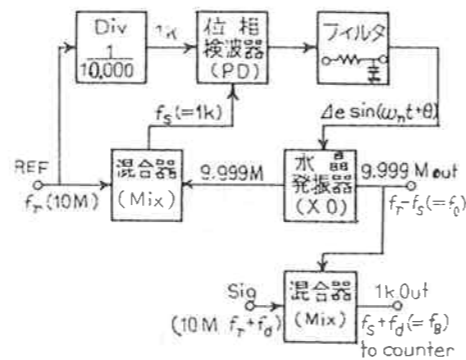
### 4. 離散的雑音による周波数安定度

2., 3. では連続スペクトルをもつ雑音の周波数安定度について述べた。原子周波数標準器や周波数計測装置においては周波数合成器が一般的に用いられているが、この場合信号出力は周波数合成の過程などでスペクトルが離散的な雑音で FM 又は PM 変調を受ける可能性がある。そして、時間領域の周波数安定度尺度も連続スペクトル雑音のときとかなり様子が違ってくる。

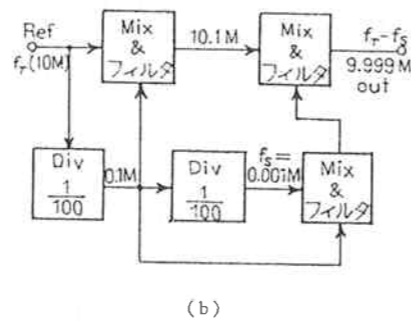
本節では、2. で述べた周波数安定度尺度を離散的雑音の場合に適用して式を導き、連続スペクトル雑音の場合との相違点を明らかにした。また、実際の周波数合成器について検討し、理論と実験との比較を行った(34)(7)。

#### 4.1 離散的雑音による安定度尺度

周波数合成器には大別して同期発振器方式と混合方式とがある(35)。第11図には基準信号  $f_r$  を  $f_s$  だけオフセットして  $f_r - f_s$  を取り出す簡単な例を示している。例



(a)



(b)

第11図 周波数合成器の例

えば、同期発振器方式の場合は位相検出器からの誤差電圧に位相比較信号自身又はその高調波が十分フィルタしきれないで重畳して FM 変調を生じる。この場合、(1)式の  $\varphi(t)$  は一つの変調波成分に対して次のように表せる。

$$\varphi(t) = \varphi_m \sin(2\pi f_m t + \theta) \dots\dots(73)$$

ただし、 $\varphi_m$  は変調指数、 $f_m$  は変調周波数である。 $\theta$  は固定位相量であり、今の議論では無視してよい。複数個の変調波の場合は、

$$\varphi(t) = \sum_i \varphi_{mi} \sin(2\pi f_{mi} t + \theta_i) \dots\dots(74)$$

混合方式については、例えば信号成分より周波数が  $f_m$  だけ異なる雑音成分がフィルタしきれないで残ったとすると、

$$\begin{aligned} V(t) &= V_0 \sin 2\pi\nu_0 t + v_1 \cos 2\pi(\nu_0 + f_m)t \\ &= V_0(1 - \varphi_m \sin 2\pi f_m t) \sin 2\pi\nu_0 t \\ &\quad + v_1 \cos 2\pi f_m t \cdot \cos 2\pi\nu_0 t \dots\dots(75) \end{aligned}$$

ただし、 $\varphi_m \equiv v_1/V_0 (\ll 1)$ 。(75)式は次のように近似される。

$$V(t) \cong V_0 \sin [2\pi\nu_0 t + \varphi(t)] \dots\dots(76)$$

$$\varphi(t) = \tan^{-1}(\varphi_m \cos 2\pi f_m t) \cong \varphi_m \cos 2\pi f_m t \dots\dots(77)$$

(77)式は(73)式と同じ形であり、複数個の場合も(74)式と同様である。ただし、(1)及び(73)式の場合雑音成分がキャリアの両側に生じるが、(75)式では片側のみにあることに注意する必要がある。いま、 $\varphi_m$  をスペクトル分析したときの一つの雑音成分の信号成分に対する比と考えると、離散的雑音で FM (PM) 変調を受けた信号は同期発振器の場合も混合方式の場合も全く同じように扱うことができる。

(73)式を(6)式へ代入すると、

$$y(t) = (f_m/\nu_0) \varphi_m \cos 2\pi f_m t \dots\dots(78)$$

したがって、(11)式から  $y(t)$  の自己相関関数は、

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \langle y(t)y(t+\tau) \rangle \\ &= (f_m/\nu_0)^2 \varphi_m^2 \langle \cos 2\pi f_m t \cos 2\pi f_m (t+\tau) \rangle \\ &= (1/2) (f_m/\nu_0)^2 \varphi_m^2 \cos 2\pi f_m \tau \dots\dots(79) \end{aligned}$$

(80)式を(12)式へ代入するとパワースペクトル密度が求まる。

$$\begin{aligned} S_y(f) &= 2\varphi_m^2 \left(\frac{f_m}{\nu_0}\right)^2 \int_0^\infty \cos 2\pi f_m \tau \cos 2\pi f \tau d\tau \\ &= (1/2) \varphi_m^2 (f_m/\nu_0)^2 \delta(f - f_m) \dots\dots(81) \end{aligned}$$

ただし、 $\delta(z) \equiv (1/\pi) \int_0^\infty \cos zt' dt'$  はディラックの  $\delta$  関数と呼ばれるものであり、次の性質をもっている。

$$\int_{-\infty}^\infty \delta(z) dz = 1, \delta(z) = 0 (z \neq 0) \dots\dots(82)$$

また、(81)式において、 $\delta(f + f_m)$  は  $f = -f_m < 0$  の成

分であって  $S_y(f)$  の定義領域 ( $f \geq 0$ ) に入らないので除外してある。

(74)式のような複数個の場合、異なる周波数成分の積の平均は零であることを考慮すると、

$$R_y(\tau) = \sum_i \left(\frac{f_{mi}}{\nu_0}\right)^2 \frac{\varphi_{mi}^2}{2} \cos 2\pi f_{mi} \tau \dots\dots(83)$$

したがって、パワースペクトル密度は、

$$S_y(f) = \sum_i \frac{\varphi_{mi}^2}{2} \left(\frac{f_{mi}}{\nu_0}\right)^2 \delta(f - f_{mi}) \dots\dots(84)$$

(81)式を(82)式へ代入し、(82)式の関係を用いると、

$$\begin{aligned} \langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle &= \frac{N}{N-1} \frac{\varphi_m^2}{2} \left(\frac{f_m}{\nu_0}\right)^2 \\ &\quad \frac{\sin^2 u}{u^2} \left(1 - \frac{\sin^2 Nru}{N^2 \sin^2 ru}\right) \dots\dots(85) \end{aligned}$$

ただし、 $u = \pi f_m \tau$ 。また、複数個の雑音の場合には、

$$\begin{aligned} \langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle &= \frac{N}{N-1} \sum_i \frac{\varphi_{mi}^2}{2} \left(\frac{f_{mi}}{\nu_0}\right)^2 \\ &\quad \frac{\sin^2 u_i}{u_i^2} \left(1 - \frac{\sin^2 Nru_i}{N^2 \sin^2 ru_i}\right) \dots\dots(86) \end{aligned}$$

ただし、 $u_i = \pi f_{mi} \tau$ 。

(85)式から次式がえられる。

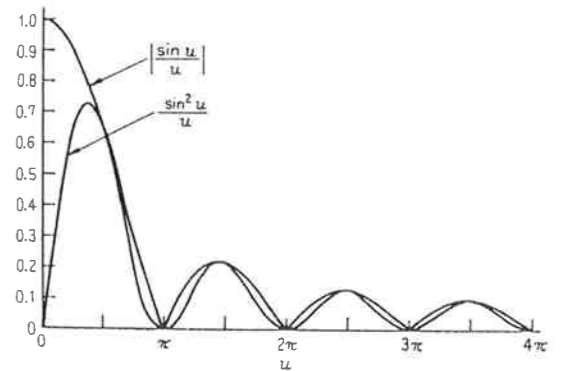
$$\langle \sigma_y^2(\infty, T, \tau) \rangle^{1/2} = (\varphi_m/\sqrt{2}) (f_m/\nu_0) |\sin u|/u \dots\dots(87)$$

$$\langle \sigma_y^2(2, T, \tau) \rangle^{1/2} = \varphi_m (f_m/\nu_0) |\sin u| |\sin ru|/u \dots\dots(88)$$

$$\sigma_y(\tau) = \varphi_m (f_m/\nu_0) \sin^2 u/u \dots\dots(89)$$

複数個の雑音成分のときは、(87)~(89)式の和をとればよい。

第12図に  $|\sin u|/u$  及び  $\sin^2 u/u$  の特性を示す。(87)~(89)式において、最大値の  $\tau$  特性は PM 雑音のときと同じように  $\tau^{-1}$  であるが、全体としては第12図に示すように  $\tau$  と変調周波数  $f_m$  によって決まる周期で正弦波的に変化をする。特に、 $f_m \tau = 1, 2, 3, \dots$  のときは



第12図 周波数ウィンドウ

安定度尺度は零になる。カウンタによる周波数測定では、 $\tau$  は普通 1ms, 10ms, 0.1s, 1s, 10s などの値をとるので、例えば  $f_m \geq 1$  kHz なる整数値の場合、これらすべての  $\tau$  に対し安定度尺度は零となる。また、 $100 \text{ Hz} \leq f_m \leq 1 \text{ kHz}$  では  $\tau = 1 \text{ ms}$  を除くすべての  $\tau$  で零となる。以下同様にいえる。したがって、このような測定方法では離散的雑音についての正確な測定をすることは困難であり、周波数領域における  $S_\varphi(f)$  等の測定によることが望ましい。

4.2 周期測定法における離散的雑音の影響

高精度で周波数又は周波数安定度の測定をする場合、信号を適当に通信して周波数合成器などでビート周波数を得て、これをカウンタで周期測定するのが普通である。実際、現在のカウンタは、周期測定を行ってこれをカウンタ内部で周波数に変換して [64~66式] 表示するようになっているものが多い。この場合、 $\tau$  は厳密には一定ではないが、変動分  $\delta\tau$  が十分小さいという条件のもとでは時間領域の安定度尺度は85~89式と同様に表される。

被測定(ビート)周波数を  $f_B$ 、周期数を  $N_p$  とすると、

$$\tau_0 = N_p / f_B \quad \dots\dots(90)$$

$$\tau = \tau_0 - \delta\tau \quad \dots\dots(91)$$

議論を明確にするために第11(b)図のような場合を考える。すなわち、 $f_B$  を合成周波数  $f_s$  と二つの比較信号の差周波数  $f_d$  との和で与えられるものとする。

$$f_B = f_s + f_d \quad (f_s \gg f_d) \quad \dots\dots(92)$$

また、周波数合成器の場合普通に起こり得るように、離散的雑音の周波数  $f_m$  と合成周波数  $f_s$  は比例するとする。

$$f_m = l f_s \quad (l=1, 2, \dots) \quad \dots\dots(93)$$

(90), (91)式より

$$\tau_0 = N_p / (f_s + f_d) \cong (N_p / f_s) (1 - f_d / f_s) \cong \tau_s - \tau_d \quad \dots\dots(94)$$

ただし、 $\tau_s \cong N_p / f_s$ 、 $\tau_d \cong \tau_s f_d / f_s \cong \tau_0 f_d / f_s$ 。したがって、 $f_m \tau_s = l N_p$  の関係より、 $\sin(\pi f_m \tau_0) = \sin(\pi f_m \tau_d)$  となる。

これらの関係を(87), (89)式へ代入すると安定度尺度はそれぞれ次のようになる。

$$\langle \sigma_y^2(\infty, T, \tau) \rangle^{1/2} = (\sqrt{2} \varphi_m / 2\pi\nu_0 \tau_0) |\sin(\pi f_m \tau_d)| \quad \dots\dots(95)$$

$$\cong (l \varphi_m / \sqrt{2}) (f_d / \nu_0) |\sin u' / u'| \quad \dots\dots(95)$$

$$\sigma_y(\tau) = (2\varphi_m / 2\pi\nu_0 \tau_0) \sin^2(\pi f_m \tau_d) \cong l \varphi_m (f_d / \nu_0) \sin^2 u' / u' \quad \dots\dots(96)$$

ただし、 $u' \cong \pi f_m \tau_d$ 。  $\tau_d$  が十分小さくて、 $\sin(\pi f_m \tau_d) \cong \pi f_m \tau_d$  が成立するとき\*、(95), (96)式は、

$$\langle \sigma_y^2(\infty, T, \tau) \rangle^{1/2} \cong (l \varphi_m / \sqrt{2}) (f_d / \nu_0) \quad \dots\dots(97)$$

$$\sigma_y(\tau) \cong \pi^2 l \varphi_m \tau_0 f_d^2 / \nu_0 \quad \dots\dots(98)$$

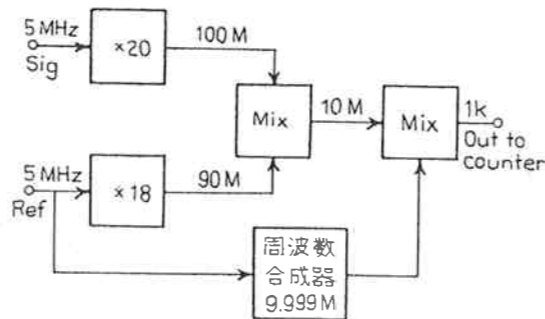
以上のことから次の点が明らかとなる。

①  $f_d = 0$ 、すなわち二つの比較される信号の周波数が一致するとき、(95)~(98)式の各安定度尺度は零となる。測定系自身の性能を評価するために、比較信号を同一の発振器からとる共通入力法が一般的に行われているが、それに相当する。上述の結果は、離散的な雑音で測定系が汚されていても、共通入力法による時間領域の測定ではこれを評価し得ないことを意味している。

② (97)式は  $\tau_0$  に対して一定、(98)式は  $\tau_0$  に比例している( $f_B$  は一定とする)。したがって、 $\sin(\pi f_m \tau_d) \cong \pi f_m \tau_d$  の近似が成立する範囲で、連続スペクトル雑音による周波数安定度が比較的好くなる、測定時間  $\tau_0$  の大きいところで影響は大きくなる。

③  $f_d, \nu_0$  はともに周波数通倍によって拡大されるので、 $f_d / \nu_0$  はそれに対して一定に保たれる。(97)式は  $(f_d / \nu_0)$  に比例し、(98)式は  $f_d (f_d / \nu_0)$  に比例しているから、前者の場合は周波数通倍しても相対値としての安定度は改善されず、後者については逆に安定度が劣化する( $\sin \pi f_m \tau_d \cong \pi f_m \tau_d$  の近似が成立する範囲内である)。すなわち、周波数合成器を測定系等に用いる場合、それによる劣化は周波数通倍器と組み合わせることによって一般に軽減されるが(第13図参照)、離散的な雑音の場合このことが必ずしも正しくないことを意味している。

離散的雑音の影響を時間領域の安定度尺度から議論するには、(95)~(99)式又は(95)~(98)式の最大値で行うべき



第13図 高精度周波数安定度の測定系例

\* この近似式が成立する範囲を検討してみる。近似が成立するには、 $f_m \tau_d = l f_a \tau_0 = l N_p (\nu_0 / f_B) (f_d / \nu_0) < 1/6$  の必要がある。したがって、 $f_d / \nu_0 < (f_B / \nu_0) (6 / l N_p)^{-1}$ 。例として、 $N_p = 10^3$ 、 $f_B = 10^3 \text{ Hz}$ 、 $l = 1$  とすると、 $\tau_0 = N_p / f_B = 1 \text{ sec}$  であり、 $\nu_0 = 10^7 \text{ Hz}$  で  $f_a / \nu_0 < 10^{-8}$ 、 $\nu_0 = 10^8 \text{ Hz}$  で  $f_a / \nu_0 < 10^{-9}$ 、 $\nu_0 = 10^9 \text{ Hz}$  で  $f_a / \nu_0 < 10^{-10}$  の範囲で、比較される二つの発振器は一致している必要がある。

であろう。(95), (97)式から、

$$\langle \sigma_y^2(\infty, T, \tau) \rangle_{max}^{1/2} = \sqrt{2} \varphi_m / (2\pi\nu_0 \tau_0) \quad \dots\dots(99)$$

$$\sigma_y(\tau)_{max} = 2\varphi_m / (2\pi\nu_0 \tau_0) \quad \dots\dots(100)$$

例えば、 $\nu_0 = 10^7 \text{ Hz}$ 、 $\varphi_m \leq -80 \text{ dB}$  とすると、 $\tau_0 = 1 \text{ sec}$  で、

$$\langle \sigma_y^2(\infty, T, \tau) \rangle_{max}^{1/2} \leq 2 \times 10^{-12}$$

$$\sigma_y(\tau)_{max} \leq 3 \times 10^{-12}$$

複数個の成分があるときは、安定度は個々の和になるから、各変調指数  $\varphi_{mi}$  についての要求は更に厳しくなる。

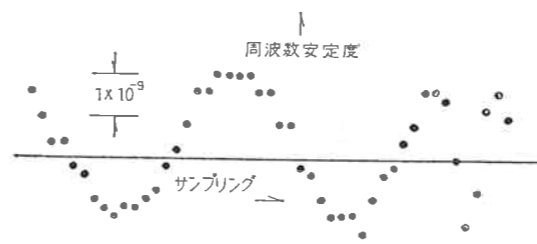
4.3 実験による検討

第14図に離散的雑音で変調を受けている  $R_b$  原子発振器(試作器)出力の周波数安定度のプロットを参考のために示す。周波数が正弦波状に変化しているが、変調周波数を表しているわけではない。次に、同期発振器方式と混合方式の周波数合成器を試作し、実験を行った結果について述べる。

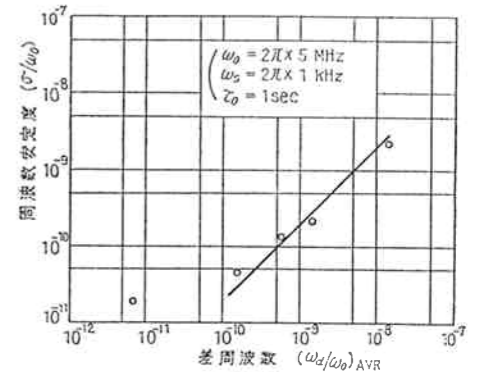
(1) 同期発振器方式

同期発振器方式は比較的簡単な構成で複雑な周波数合成が可能なので周波数合成器に多く使われている。第11図(a)と同じ構成で、周波数測定装置の目的で 5 MHz + 1 kHz の合成器を試作した。周波数測定用のため位相同期回路の帯域幅をあまり狭くできないことから、位相比較器の出力誤差電圧に 1 kHz 及びその高調波成分が重畳する状態になった。

5 MHz + 1 kHz の周波数合成器の出力信号をもう一つの 5 MHz の信号と混合して 1 kHz のビートを取り出し、周期測定によって周波数安定度を測定した。周波数合成器への 5 MHz 入力信号 [第11(a)図の REF] と他の 5 MHz 信号 [同図の SIG] との相対差周波数  $f_d / \nu_0$  に対する周波数安定度の測定値を第15図に示す。図の縦軸は  $\langle \sigma_y^2(\infty, T, \tau) \rangle^{1/2}$  に相当している。図から明らかなように、周波数安定度は  $f_d / \nu_0$  に比例しており、(97)式の正しさを証明している。図で、 $f_d / \nu_0 \cong 10^{-11}$  のところで比例関係からずれているのは連続スペクトル



第14図 離散的雑音で変調を受けた信号の例



第15図 比較発振器の周波数差と周波数安定度—実験データ

雑音と測定精度の影響によるものである。

第15図の直線部分に(97)式を当てはめると、

$$l \varphi_m / \sqrt{2} \cong 0.2$$

平衡混合形位相比較器を使用しているため、 $l=4$  とすると、 $\varphi_m \cong 0.087$  という非常に大きい値となる。

(2) 混合方式

同じく、周波数測定の目的で 10 MHz—1 kHz の比較的簡単な周波数合成器を混合方式で試作した [第11(b)図]。この出力とはかの被測定信号 10 MHz を混合して 1 kHz を取り出して周期測定をすると、(90)式より平均測定時間は  $\tau_0 = N_p / f_B \cong N \times 10^{-3} \text{ sec}$  ( $f_s \cong f_B$ ) から求められる。普通、カウンタでは  $N=1, 10 \dots 10^5$  であるから、 $\tau_0$  としては  $10^{-3}, 10^{-2}, \dots 10^2 \text{ sec}$  が得られる。測定精度は、 $\nu_0 = 10 \text{ MHz}$ 、カウンタのタイミングを 0.1 nsec とし、 $\tau_0 = 1 \text{ sec}$  で  $10^{-14}$  が得られる。第13図のように通信器と組み合わせると更に精度が上がり得る。

離散的雑音レベルを -80 dB 以下を目標とし、そのため3個の水晶フィルタを使用した。これにより帯域幅も 6 dB down 値が  $\pm 3.5 \text{ kHz}$  と比較的広くすることができた。連続スペクトル雑音も含め、本周波数合成器の性能は所期の性能を満たすことがわかった。

5. Allan 分散の推定値と周波数測定誤差の評価

2. で述べた時間領域の周波数安定度尺度は無制限時間平均で定義されている [(9), (10)式]。しかし、これは実際には実現不可能であり、有限個数の測定から推定値を求めることになる。文献(1)が提示している Allan 分散の推定値の形式は次のようである。

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{(\bar{y}_k - \bar{y}_{k+1})^2}{2} \quad \dots\dots(101)$$

ただし、 $M$  は測定個数である。



(101)式は(10)式と類似して書かれているが、個々の測定値  $(\bar{y}_k - \bar{y}_{k+1})^2/2$  ( $k=1, 2, \dots$ ) においてデータ  $\bar{y}_k$  が重複して使用されているという特徴をもっている。ところで、(10), (101)式は無限時間平均と統計(アンサンブル)平均という基本的相違を有している<sup>(10)</sup>。例えば、(9)式の推定値  $\sigma_y^2(N, T, \tau)_k$  を  $M$  個測定によって得たとする。個々の推定値において、 $\bar{y}_n$  は  $n=1, 2, \dots, N$  に対して定義により連続している必要があるが、推定値  $\sigma_y^2(N, T, \tau)_k$  ( $k=1, 2, \dots, M$ ) は連続している必要はない。逆に、平均をとる上で各推定値が独立であることが本来望ましいわけであらうから、各推定値の測定間隔は一般に離れていた方がむしろ良い。Allan 分散のときは、 $N=2, T=\tau$ 、であるが議論は全く同じである。したがって、(101)式の形式は、前述の IEEE 小委員会による、推定値を統一するための定義とみなされるべきものである。

本節では、Allan 分散の推定値の一般形式を示し、個々の推定値  $(\bar{y}_k - \bar{y}_{k+1})^2/2$  の時間軸上の配列の仕方と測定個数による影響等について理論的に検討した。また、Allan 分散の信頼限界を議論するために、スペクトルが  $f^\alpha$  型の雑音モデルに対して計算機シミュレーションによって推定値の分布を調べた。更に、これらの結果を測定周波数の誤差を評価するために適用し、検討した<sup>(11)(12)</sup>。

5.1 Allan 分散の信頼限界について

(9)式の  $\sigma_y^2(N, T, \tau)$  は  $N$  個の  $\tau$  秒平均測定値  $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_N$  についての分散を表しているが、もし、これらの測定値が互いに独立なガウス分布をするなら、

$$\chi^2 \equiv (N-1)\sigma_y^2(N, T, \tau) / \langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle \dots\dots(102)$$

は自由度  $N-1$  の  $\chi^2$  (カイ二乗) 分布をする。また、独立な  $M$  個の  $\sigma_y^2(N, T, \tau)$  の測定値について更に平均をとった場合は自由度  $M(N-1)$  になる。 $\bar{y}_k$  が互いに独立な条件は  $f^0$  FM 雑音の場合にのみ当てはまる。

Allan 分散については  $N=2$  であるから自由度は  $M$  となり、 $\sigma_y(\tau)$  の信頼限界は次式で与えられる。

$$\frac{\sqrt{M\sigma_y^2(\tau)}}{\chi_{p1}} < \sigma_y(\tau) < \frac{\sqrt{M\sigma_y^2(\tau)}}{\chi_{p2}} \dots\dots(103)$$

ただし、 $\sigma_y^2(\tau)$  は、 $\sigma_y^2(2, \tau, \tau)$ 、( $i=1, 2, \dots, M$ ) の  $M$  個の平均で与えられる推定値である。 $\chi_{p1}, \chi_{p2}$  は信頼限界(%)を定める係数である。 $(\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k) / \sqrt{2}$  が互いに独立でガウス分布するなら、 $M\sigma_y^2(\tau)$  は  $\chi^2$  分布をする。例えば、95% 信頼限界のときは、 $p_1=0.975, p_2=0.025$  として  $\chi^2$  分布の表から自由度  $M$  のときの値を採用すればよい。

$f^{-1}$  及び  $f^{-2}$  FM 雑音などの場合、測定値  $\bar{y}_k$  間に共分散が存在するので、 $\bar{y}_k$  は互いに独立とはいえなくなる。したがって、 $\bar{y}_k$  がガウス分布をするとしても(102)式は  $\chi^2$  分布からずれてくると考えられる。そして、 $\sigma_y^2(N, T, \tau)$  は特定の個数又は全観測時間  $NT$  に固有の量になり、独立なガウス分布のときのように  $N$  の相違が単に自由度の相違、すなわち、測定値の信頼性の相違を意味するのとは異なってくる。しかし、このことが  $\langle \sigma_y^2(N, T, \tau) \rangle$  の形式の定義を特徴的にしているといえるわけである。この場合、1 個の測定値  $\sigma_y^2(N, T, \tau)$  だけでは当然信頼性が悪すぎるので、独立な測定値を平均して推定値を求めることになる。そして、Allan 分散の信頼限界を定めるには、実際の分布を測定によって求めるか、多数の測定個数を得ることにより中心極限定理でガウス分布とみなせるようにすることによって行うことになる。

Allan 分散の場合、測定値は等価的に  $(\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k) / \sqrt{2}$  とみなせるので、 $f^{-2}$  FM (ランダムウォーク) 雑音のとき各測定値は独立とみなし得る [(14)式]。  $f^\alpha$  型スペクトル特性の雑音に対する Allan 分散の推定値についての検討を次節以下で述べる(詳しくは文献(7)参照)。

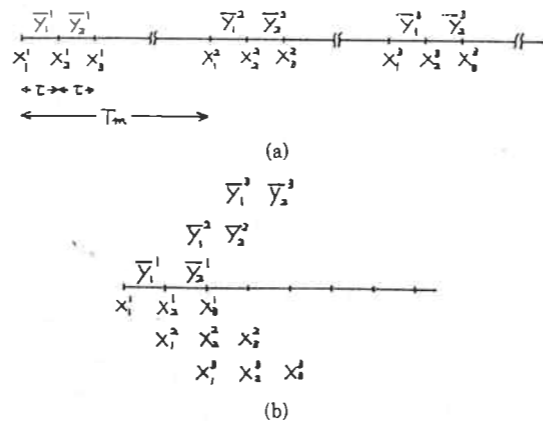
5.2 相関係数

Allan 分散の推定値の一般形式を次のように表す。

$$\sigma_y^2(\tau) = \sum_{i=1}^M x_i^2 / M \dots\dots(104)$$

$$x_i \equiv (\bar{y}_1^i - \bar{y}_2^i) / \sqrt{2} \dots\dots(105)$$

ただし、 $x_i$  は第 16 図に示すように  $i$  番目のサンプル値である。図で、 $X$  は時間誤差を表しており、また、(101)式は  $T_m = \tau$  とした特別な場合になっている。時間誤差  $X$  と規格化周波数  $\bar{y}$  との間に次の関係がある。



第 16 図 (a) Allan 分散の推定値の一般的サンプリング形式 (b)  $T_m = \tau$  の場合

$$\bar{y}_1^i = (X_1^i - X_2^i) / \tau \dots\dots(106)$$

$$\bar{y}_2^i = (X_2^i - X_3^i) / \tau$$

(105)式の  $x$  の相関係数  $\rho$  を次のように定義する。

$$\rho_{ij} \equiv \langle x_i x_j \rangle / \langle x_i^2 \rangle \dots\dots(107)$$

$\rho_{ii}=1$ 、また、定常性の仮定から  $\rho_{ij} = \rho_{ji} = \rho_k, k=|i-j|$  である。(10)(105)式から、

$$\langle x_i^2 \rangle = \sigma_y^2(\tau) \dots\dots(108)$$

(107)式の  $\langle x_i x_j \rangle$  を計算すれば  $\rho_{ij}$  が求まる。

(107)式から

$$\begin{aligned} \langle x_i x_j \rangle &= \langle (\bar{y}_1^i - \bar{y}_2^i)(\bar{y}_1^j - \bar{y}_2^j) \rangle / 2 \\ &= [\langle \bar{y}_1^i \bar{y}_1^j \rangle - \langle \bar{y}_1^i \bar{y}_2^j \rangle - \langle \bar{y}_2^i \bar{y}_1^j \rangle \\ &\quad + \langle \bar{y}_2^i \bar{y}_2^j \rangle] / 2 \dots\dots(109) \end{aligned}$$

(106)式の関係を用いると、例えば、

$$\begin{aligned} \tau^2 \langle \bar{y}_1^i \bar{y}_1^j \rangle &= \langle X_1^i X_1^j \rangle - \langle X_1^i X_2^j \rangle \\ &\quad - \langle X_2^i X_1^j \rangle + \langle X_2^i X_2^j \rangle \dots\dots(110) \end{aligned}$$

いま、 $k=j-i$  及び  $r_m \equiv T_m / \tau$  とおき、時間誤差  $X$  の自己相関関数  $R_x$  を考える。第 16(a) 図から、例えば

$$R_x(kr_m) = \langle X_1^i X_1^j \rangle = \langle X_2^i X_2^j \rangle \dots\dots(111)$$

などと表せる。また、計算の便宜上次の量を定義する。

$$U_x(Z) \equiv 2[R_x(0) - R_x(Z)] \dots\dots(112)$$

そのとき、 $U_x$  は(9)式の分散と次の関係がある<sup>(9)</sup>。

$$\begin{aligned} U_x(n\tau) &= -n(n-1)\tau^2 \langle \sigma_y^2(n, \tau) \rangle \\ &\quad + n^2 U_x(\tau) \dots\dots(113) \end{aligned}$$

ただし、 $\langle \sigma_y^2(n, \tau) \rangle \equiv \langle \sigma_y^2(n, \tau, \tau) \rangle$  とおいた。

(113)式の  $n$  は整数である必要はない<sup>(13)</sup>。

(111)~(113)式を(110)式へ代入すると、

$$\begin{aligned} \langle \bar{y}_1^i \bar{y}_1^j \rangle &= kr_m(kr_m - 1) \langle \sigma_y^2(kr_m, \tau) \rangle \\ &\quad - (kr_m + 1)kr_m \langle \sigma_y^2(kr_m + 1, \tau) \rangle / 2 \\ &\quad - (kr_m - 1)(kr_m - 2) \langle \sigma_y^2(kr_m - 1, \tau) \rangle / 2 + U_x(\tau) / \tau^2 \dots\dots(114) \end{aligned}$$

$U_x(\tau) / \tau^2$  は、(113)式で  $U_x(n\tau) / n^2 \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) として、

$$\begin{aligned} U_x(\tau) / \tau^2 &= (2/\tau^2) [R_x(0) - R_x(\tau)] \\ &= \langle \sigma_y^2(\infty, \tau) \rangle \dots\dots(115) \end{aligned}$$

(114)式と同様にして(109)式の他の項も計算できて、結局(109)は、 $U_x(\tau) / \tau^2$  の項が消えてしまうので次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle x_i x_j \rangle &= 1.5a(a-1) \langle \sigma_y^2(a, \tau) \rangle - (a+1)a \\ &\quad \langle \sigma_y^2(a+1, \tau) \rangle - (a-1)(a-2) \\ &\quad \langle \sigma_y^2(a-1, \tau) \rangle + 0.25(a+2)(a+1) \\ &\quad \langle \sigma_y^2(a+2, \tau) \rangle + 0.25(a-2)(a-3) \\ &\quad \langle \sigma_y^2(a-2, \tau) \rangle \dots\dots(116) \end{aligned}$$

ただし、 $a \equiv kr_m$ 。

測定に空き時間のある場合も同様にして求めることができるが、ここでは省略する。

第 1 表から、各雑音に対する  $\langle \sigma_y^2(n, \tau) \rangle$  を (116)式へ代入すれば相関係数  $\rho_k$  が求まる。第 2 表に計算結果を示す。PM 雑音の場合、 $a \rightarrow 1, 2$  で  $\rho_k$  は最大となるが、これは第 16(b) 図 ( $a \rightarrow 1$ ) に示されるように  $X$  が重複して用いられることによる(付録 A 参照)。  $f^{-1}$  PM 雑音の場合でも、 $a \geq 3$  であれば  $\rho_k$  は十分小さい。  $f^0$  FM 雑音では、 $a \rightarrow 1$  のときのみ  $\rho_k \neq 0$  であるが、これは第 16(b) 図に示されるように  $\bar{y}$  が重複して用いられることによる。

$f^{-2}$  FM 雑音の場合、常に  $\rho_k = 0$  となる。これは  $x_i$  が  $\bar{y}$  の相隣る量の差 ( $\cong$  微分) で与えられるため、 $x_i$  のスペクトル特性は  $f^{-2} \times f^2 = f^0$  のようになるからである [(14)式]。  $f^{-1}$  FM 雑音についても、 $x_i$  のスペクトル特性は  $\propto f$  になって、発散性の周波数雑音が適度に白色化されて好都合であるが、 $f^0$  及び  $f^{-1}$  PM 雑音のときは  $x_i$  が  $f^4$  及び  $f^3$  のスペクトル特性となるので、 $x_i$  はかなり急峻な変化をするようになる(周波数成分の高い方にパワーが大きく移行する)。Allan 分散では  $f^0$  PM 雑音と  $f^{-1}$  PM 雑音の識別ができないことも考えると、Allan 分散は発散性の雑音の尺度としては優れているが(ただし、 $\alpha > -3$  でしか使えないが)、PM 雑音に対してはあまりよい尺度とはいえないと思われる。

5.3 Allan 分散の推定値の分散

さきに求めた相関係数を用いると、 $x_i$  の平均値の分散や  $x_i^2$  の平均値 (Allan 分散) の分散が求まる<sup>(1)</sup>。Lesage らは(101)式で定義された Allan 分散の推定値について、ここで述べる方法とは全く別の計算手法で推定値の分散を計算し報告している<sup>(10)(10)</sup>。しかし、既に述べたようにプロセスの分布の議論を抜きにして単に推定値の分散のみを議論するのは正確ではない。推定値の分散がプロセスの統計的性質を正確に表し得るのはガウス分布のときだけである。実際、推定値  $\sigma_y^2(\tau)$  は、 $x_i$  が独立なガウス分布をするという最も都合の良い場合を想定しても、 $\chi^2$  分布をするわけであり、この場合推定値の分散によっては信頼限界を表し得ない。したがって、Allan 分散の推定値  $\sigma_y^2(\tau)$  とその分散  $\sigma^2$  を求めて、 $\sigma_y^2(\tau) \pm \sigma$  のように表しても、そのもつ具体的な内容が不明確となる。 $M$  が大きく、 $\sigma_y^2(\tau)$  が中心極限定理でガウス分布に近づく場合は  $\sigma^2$  は直ちに信頼限界と結びつく。

Allan 分散の推定値の分散  $\sigma^2$  は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \left\langle \left[ \sum_{i=1}^M x_i^2 / M - \sigma_y^2(\tau) \right]^2 \right\rangle \\ &= \langle x_i^4 \rangle / M + \sum_{i \neq j} \langle x_i^2 x_j^2 \rangle / M^2 - [\sigma_y^2(\tau)]^2 \dots\dots(117) \end{aligned}$$

第2表

(a)—Autocorrelation coefficient  $\rho_k$ .

noise	$f^0$ PM	$f^{-1}$ PM	$f^0$ FM	$f^{-1}$ FM	$f^{-2}$ FM
$a \neq 0, 1, 2$	0	$\frac{1}{2}[2\ln(a^2 - 1) - 3\ln(a) - \frac{1}{2}\ln(a^2 - 4)]$	0	$\frac{1}{4\ln 2}[3a^2 \ln(a) - 2(a+1)^2 \ln(a+1) - 2(a-1)^2 \ln a-1  + \frac{1}{2}(a+2)^2 \ln(a+2) + \frac{1}{2}(a-2)^2 \ln a-2 ]$	0
$a=1$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}[2c_1 + \frac{1}{2}\ln 3 - 2\ln 2]$	$-\frac{1}{2}$		
$a=2$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4c_2}[2c_1 - 16\ln 2 + 8\ln 3]$			

(b)—Numerical value of  $\rho_k$  for flicker-phase and flicker-frequency noises.  $E-d \equiv \times 10^{-d}$ .  $c_1 = 3/2 + \ln(2\pi f_h \tau)$ ,  $c_2 = 9/2 + 3 \ln(2\pi f_h \tau) - \ln 2$ ,  $2\pi f_h \tau \gg 1$ .  $a \equiv kr_m$ .

noise	$f^{-1}$ FM	$f^{-1}$ PM	$10^1$	$10^2$	$10^3$
$\frac{2\pi f_h \tau}{a}$			10	$10^2$	$10^3$
1	-0.217	-0.632	-0.645	-0.651	
2	-0.132	0.124	0.141	0.148	
3	-0.455E-1	0.544E-2	0.331E-2	0.238E-2	
4	-0.241E-1	0.138E-2	0.838E-3	0.602E-3	
5	-0.150E-1	0.516E-3	0.314E-3	0.226E-3	
10	-0.364E-2	0.290E-4	0.176E-4	0.127E-4	
100	-0.385E-4	0.282E-8	0.172E-8	0.123E-8	

いま,  $x_i, x_j$  が2変数のガウス分布に従うとすると, 多変数モメントの関係式\* 及び(107), (108)式から,

$$\langle x_i^4 \rangle = 3[\sigma_y^2(\tau)]^2$$

$$\langle x_i^2 x_j^2 \rangle = [\sigma_y^2(\tau)]^2 (1 + 2\rho_{ij}^2) \quad \dots\dots(118)$$

(118)式の関係(117)式へ代入すると, 結局

$$\sigma^2 = (2/M)[\sigma_y^2(\tau)]^2 F_{ct} \quad \dots\dots(119)$$

$$F_{ct} \equiv 1 + (2/M) \sum_{k=1}^{M-1} (M-k)\rho_k^2 \quad \dots\dots(120)$$

ただし,  $\rho_{ij} = \rho_{k=|i-j|}$  であるから, 次の関係式を用いている.

$$\sum_{i=1}^M \rho_k^2 = 2 \sum_{i=1}^{M-k} \rho_{k=j-i}^2 = 2 \sum_{k=1}^{M-1} (M-k)\rho_k^2 \quad \dots\dots(121)$$

第3表に各雑音について  $F_{ct}$  の値を計算した結果を示す. 第3(b)表の  $f^{-1}$  PM 雑音の場合,  $2\pi f_h \tau = 10^2$  に

\* 確率変数  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{2k}$  ( $k$  は整数) が多変数正規分布に従うとき,  $Z_1 Z_2 \dots Z_{2k}$  の統計平均は次式で計算できる(38).

$$\overline{Z_1 Z_2 \dots Z_{2k}} = \sum \overline{Z_1 Z_2} \cdot \overline{Z_3 Z_4} \dots \overline{Z_{2k-1} Z_{2k}}$$

ここで,  $\Sigma$  は統計平均を表し,  $\Sigma$  は任意の二つの確率変数の積の平均と残りの確率変数のそれとの積をすべての組み合わせについて和をとることを意味している.

ついでのみ示したが,  $2\pi f_h \tau$  にはあまり依存しない. 表から,  $M \rightarrow \infty$  で  $F_{ct}$  は一定値に収束するので, (119)式において,  $\sigma^2 \rightarrow 0 (M \rightarrow \infty)$  となる. したがって, Allan 分散の推定値はここに示した雑音特性の範囲で真値に収束する [(117)式].

第3表

(a)—Factor for the variance of the estimated Allan variance;  $F_{ct} = 1 + (2/M) \sum_{k=1}^{M-1} (M-k)\rho_k^2$ .

noise	$f^0$ PM	$f^{-1}$ PM	$f^0$ FM	$f^{-1}$ FM	$f^{-2}$ FM
$r_m$					
1	$\frac{35}{18} - \frac{1}{H}$	see (b)	$\frac{3}{2} - \frac{1}{2H}$	see (b)	1
2	$\frac{19}{18} - \frac{1}{18H}$	=1	1	=1	1
$\geq 3$	1	=1	1	=1	1

(b)—Numerical value of  $F_{ct}$  for flicker-phase and frequency noises.

noise	$f^{-1}$ FM	$f^{-1}$ PM ( $2\pi f_h \tau = 10^2$ )
$r_m$		
1	1	1
2	1.047	1.010
3	1.002	1.002
4	1.017	1.020
5	1.098	1.029
10	1.117	1.033
100	1.134	1.036

Lesage らは  $r_m=1$  について  $\sigma^2$  を<sup>(9)</sup>, また, Tausworthe は  $r_m=2$  について  $\sigma^2$  を<sup>(10)</sup> 筆者とは全く別の方法で計算して報告しているが, 残念ながら筆者の結果と一致しない部分がある. この不一致に関して, 実験的側面から<sup>(39)</sup>, 理論的側面から<sup>(40)</sup> 検討が試みられている.

5.4 シミュレーションによる推定値の分布

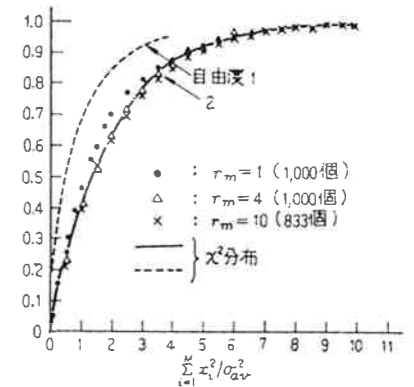
一般に, 統計量の信頼限界を定めるには分布を知る必要がある. 独立なガウス分布の場合は話が容易になることは既に述べたとおりである. 一方, 時系列に自己相関のある場合に分布を定める一般的な理論式は, 確率変数がたとえガウス分布をすとしても無いようである. したがって, ここでは計算機シミュレーションで Allan 分散の推定値の分散を調べる.

シミュレーションに用いた  $f^0$  雑音 ( $f^0$  PM 及び  $f^0$  FM) はガウス分布をすとしたが, これはほぼ実測と合致する<sup>(41)</sup>. また,  $f^{-1}$  雑音 ( $f^{-1}$  PM 及び  $f^{-1}$  FM) は Barnes らによるモデル<sup>(42)</sup> を用いたが, これは  $f^0$  雑音を適当にフィルタすることによって得るものである.  $f^{-1}$  雑音はその発散性の性質から考えて, 有限測定データの範囲ではガウス分布からずれてくると思われるが, ガウス分布に近似できる実測結果を得たという報告もある<sup>(10)(43)</sup>.

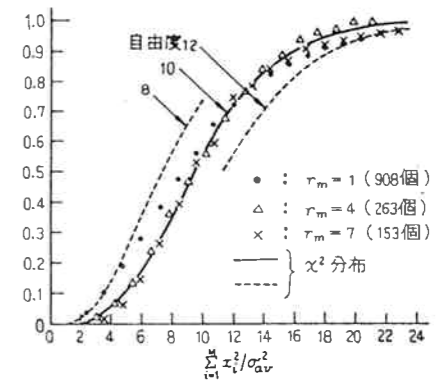
(104)式の  $\sum_i x_i^2$  のシミュレーションによる分布を  $f^0$  PM,  $f^0$  FM,  $f^{-1}$  FM の各雑音について第17~19図に示す. 図の縦軸は確率分布関数である. 規格化に用いた  $\sigma_{av}^2$  は, 1プロセスについて100~1000個の分散 ( $x_i^2$ ) の平均値を更に10の独立したプロセスについて平均し ( $\sigma_{rm}^2$ ), これを  $r_m=10, 20, 30, 50, 100$  の場合について平均したものである. したがって,  $\sigma_{av}^2 \approx \sigma_y^2(\tau)$  とみなすことができる. なお, 各  $r_m$  について  $\sigma_{rm}^2$  は0.5%以内で一致していた.

第17図で,  $M$  及び  $r_m$  が大きくなると分布を構成するデータ数が少なくなるので曲線は滑らかでなくなる. 図には比較のため  $\chi^2$  分布曲線を示しているが,  $f^0$  PM 雑音から  $f^{-1}$  FM 雑音に向かって  $\chi^2$  分布に近くなる. そして,  $f^{-2}$  FM 雑音の場合は (ここでは示していないが),  $x_i$  が  $f^0$  特性となるので  $\chi^2$  分布 (独立なガウス分布) と一致する.  $f^{-1}$  PM 雑音の場合は,  $f^0$  PM 雑音と  $f^0$  FM 雑音のほぼ中間の特性であった.  $f^0$  PM 雑音に見られる  $\chi^2$  分布からの大きなずれは, 差分を2回とるために,  $x_i$  のスペクトル特性が  $f^4$  に比例するようになることと関係しているようである.

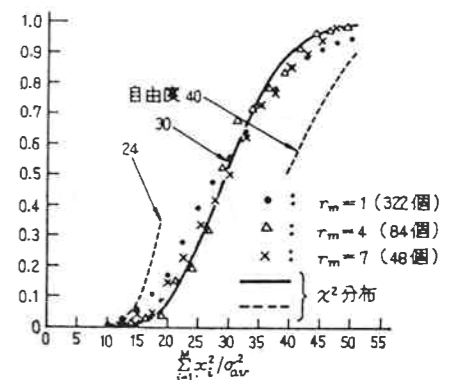
$r_m=1$  の場合, 一般に下限では自由度の低い方に, 上限では自由度の高い方にずれているが, これは信頼限界を定める場合自由度  $M$  の  $\chi^2$  分布より上限下限が広が



(a)  $f^0$  PM雑音 ( $M=2$ )

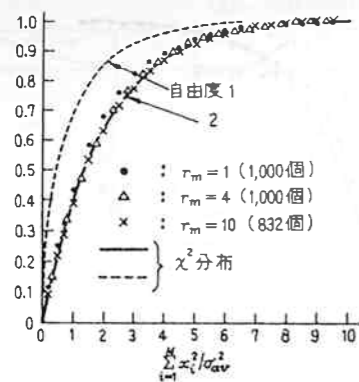


(b)  $f^0$  PM雑音 ( $M=10$ )

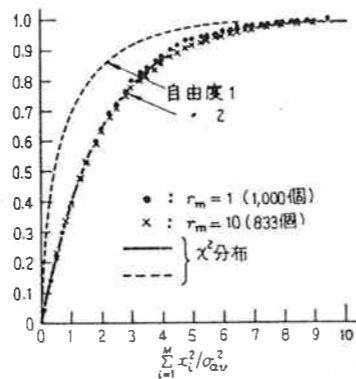


(c)  $f^0$  PM雑音 ( $M=30$ )

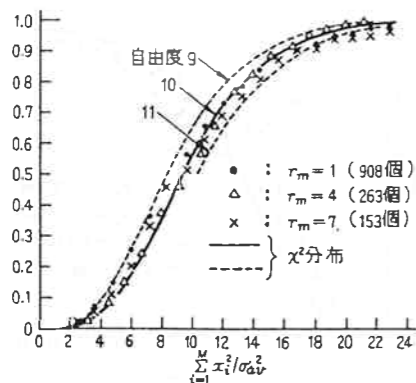
第17図 Allan 分散の推定値の分布 ( $f^0$  PM 雑音)



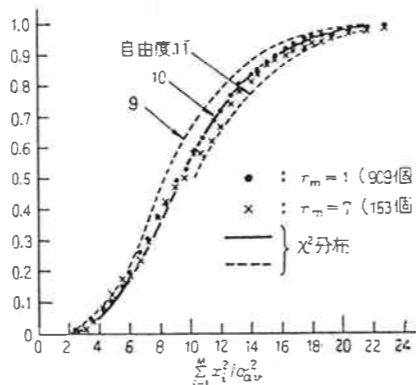
(a)  $f^0$  FM雑音 ( $M=2$ )



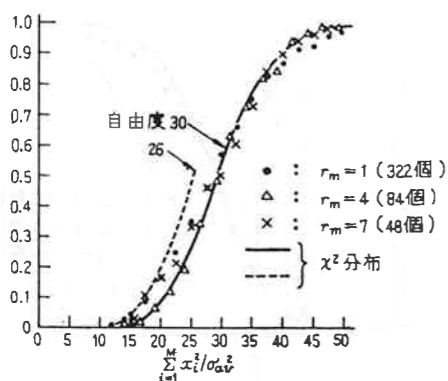
(a)  $f^{-1}$  FM雑音 ( $M=2$ )



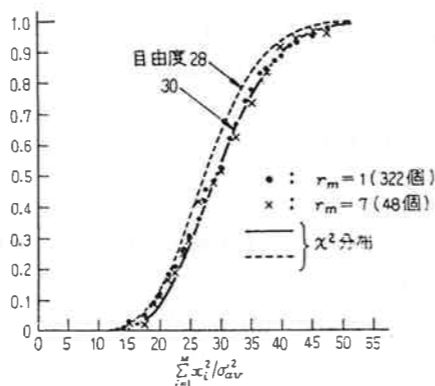
(b)  $f^0$  FM雑音 ( $M=10$ )



(b)  $f^{-1}$  FM雑音 ( $M=10$ )



(c)  $f^0$  FM雑音 ( $M=30$ )



(c)  $f^{-1}$  FM雑音 ( $M=30$ )

第18図 Allan 分散の推定値の分布 ( $f^0$  FM 雑音)

第19図 Allan 分散の推定値の分布 ( $f^{-1}$  FM 雑音)

ることを意味している。

5.5 周波数測定誤差の評価

一次周波数標準器の校正(絶対値の決定)や二次標準器の基準標準器による校正などの場合、雑音などによる周波数測定誤差の評価が伴わなければならない。誤差は、一般に分散の平方根(標準偏差)に±を付け、±σ, ±2σ, ±3σ などのように表現される。ここでは、このような測定誤差が時間領域の周波数安定度尺度を用いてどのように表され得るかについて述べる。

(1) 差周波数の測定誤差

例えば、周波数標準器に対するいろいろな要因の影響を規定するため、要因をある値から他の値へとステップ状に変化させて出力周波数に生じる変化を測定するという事は、しばしば用いられる方法である(第20図)。いま、発振器の状態を第20図の#1と#2に交互に変えて、一連のτ秒平均周波数を、その差をΔy<sub>i</sub>(i=1, 2, …, M)とする。真の平均値が存在するとし、ΔY<sub>0</sub>で表すと、

$$\Delta Y_0 = \langle \Delta y_i \rangle \quad \dots\dots(122)$$

また、Δy<sub>i</sub>の分散は、

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta y}^2 &= \langle (\Delta y_i - \Delta Y_0)^2 \rangle = \langle \Delta y_i^2 \rangle - \Delta Y_0^2 \\ &= 2\sigma_y^2(\tau) \quad \dots\dots(123) \end{aligned}$$

したがって、 $f^{-1}$  FM 又は  $f^{-2}$  FM 雑音のあるときでも ΔY<sub>0</sub> を測定し得ることになる。測定に空き時間のあるときは、(123)式の  $\sigma_y^2(\tau)$  の代わりに  $\langle \sigma_y^2(2, T, \tau) \rangle$  となる。

M個の Δy<sub>i</sub> の平均値を ΔY<sub>M</sub> とすると、

$$\Delta Y_M = \sum_{i=1}^M \Delta y_i / M \quad \dots\dots(124)$$

ΔY<sub>M</sub> の分散を  $\sigma_{\Delta Y_M}^2$  とすると、

$$\sigma_{\Delta Y_M}^2 = \langle (\Delta Y_M - \Delta Y_0)^2 \rangle \quad \dots\dots(125)$$

(122)~(124)式を(125)式へ代入し、

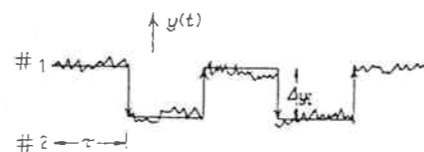
$$\rho_{ij} = \rho_{jk} = \langle (\Delta y_i - \Delta Y_0)(\Delta y_j - \Delta Y_0) \rangle / \sigma_{\Delta y}^2(\tau) \quad \dots\dots(126)$$

なる関係を用いると、

$$\sigma_{\Delta Y_M}^2 = 2\sigma_y^2(\tau) F_{ct}' / M \quad \dots\dots(127)$$

$$F_{ct}' = 1 + (2/M) \sum_{k=1}^{M-1} (M-k) \rho_k \quad \dots\dots(128)$$

(127)式は、 $\rho_k=0$  なら  $F_{ct}'=1$  となるので、独立な測



第20図 状態を#1と#2に交互に変えたときの周波数変化

定値の場合のよく知られた、平均値の分散式となる。

(124)式の形のままでは、例えば第16(b)図のような場合、 $\sum \Delta y_i = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^M$  のように中間項が全部消えてしまうので実際的でない。したがって、Δy<sub>i</sub>の符号を中間項が消えないように変えて和をとる必要がある。そのときは(128)式の代わりに次式を用いることになる。

$$F_{ct}' = 1 + (2/M) \sum_{k=1}^{M-1} (-1)^b (M-k) \rho_k \quad \dots\dots(129)$$

ただし、bはr<sub>m</sub>, kが同時に奇数のときは奇数、それ以外では偶数になる記号である。5.2の結果を用いると(129)式を計算できる<sup>7)</sup>。結果を第4表に示す。M→∞でF<sub>ct</sub>'は一定値になるので $\sigma_{\Delta Y_M}^2 \rightarrow 0$ となり、ΔY<sub>M</sub>→ΔY<sub>0</sub>を得る。

(127)式の $\sigma_{\Delta Y_M}$ を用いてΔy<sub>i</sub>の平均値の信頼限界を定めることができる。もし、Δy<sub>i</sub>がガウス分布をするすると、

$$\Delta Y_M - Z_c \sigma_{\Delta Y_M} < \Delta Y_0 < \Delta Y_M + Z_c \sigma_{\Delta Y_M} \quad \dots\dots(130)$$

ただし、Z<sub>c</sub>はガウス分布に対する係数である。

原子周波数標準器を使用する場合、測定精度を上げるためτを長くするとFM雑音が主に影響してくる。その場合、(127)式のAllan分散はf<sup>0</sup> FM雑音に対してτ<sup>-1</sup>に比例し、f<sup>-1</sup> FM雑音の場合はτ<sup>0</sup>に比例するので、この両者の雑音のみを考えてよい場合、τを十分大きくしてf<sup>0</sup> FM雑音の影響を無視できるようにし、かつ測定個数Mを大きくすると $\sigma_{\Delta Y_M}^2$ を小さくできる。

全観測時間 T<sub>M</sub>(≅τM) が限られていて、一定の場合、

$$\sigma_{\Delta Y_M}^2 = (a\tau^{-1} + b) / M = (a + b\tau) / T_M \quad \dots\dots(131)$$

ただし、a, bはM, τに無関係な定数である。(131)式から、PM雑音の影響の小さい範囲でτを小さくして、Mを大きくした方がよい。

第4表

(a)—Factor for the variance of the average difference frequency;  $F_{ct}' = 1 + (2/M) \sum_{k=1}^{M-1} (-1)^b (M-k) \rho_k$ , where b is an odd number for r<sub>m</sub> and k odd and otherwise even.

noise	$f^{PH}$	$f^{-1}PH$	$f^{FH}$	$f^{-1}FH$	$f^{-2}FH$
1	$\frac{8}{3} - \frac{2}{M}$		$2 - \frac{1}{M}$		1
2	$\frac{4}{3} - \frac{1}{3M}$	see (b)	1	see (b)	1
≥3	1	=1	1	=1	1

(b)—Numerical value of F<sub>ct</sub> for flicker-phase and frequency noises.

noise	$f^{-1}FH$			$f^{-1}PH(2Mf_{PH}\tau=10^2)$		
$r_m$	1	2	3	1	2	3
2	1.217	0.868	1.046	1.645	1.141	0.997
5	1.215	0.749	1.063	2.199	1.226	0.995
10	1.223	0.694	1.070	2.383	1.255	0.994
100	1.229	0.627	1.076	2.548	1.280	0.994

長期的な周波数安定度が比較的悪い周波数標準器の場合、 $f^0$  FM 雑音と  $f^{-2}$  FM 雑音の和として表すことも可能である。この場合、(127)式は次のように書ける。

$$\sigma_{\Delta Y M}^2 = (a\tau^{-1} + c\tau) / M \quad \dots\dots(132)$$

ただし、 $c$  は定数である。(132)式は  $M$  を一定にすると、 $\tau^2 = a/c$  のとき最小となる。 $a, c$  は  $\tau = 1$  秒のときの Allan 分散と  $F_{ct}$  に関係している。全観測時間  $T_M$  ( $\cong \tau M$ ) が一定のときは、

$$\sigma_{\Delta Y M}^2 = (a + c\tau^2) / T_M \quad \dots\dots(133)$$

となるから、 $\tau$  を小さくし、代わりに  $M$  を大きくする必要がある。

(2) 平均周波数の測定誤差

二次周波数標準器を基準の標準器で測定校正するときなどは、 $\tau$  秒平均測定を何回か行ってその平均及び分散を求めることになる(第21図)。

測定値  $\bar{y}_i (i=1, 2, \dots, N)$  の平均値は、

$$Y_N = \sum_{i=1}^N \bar{y}_i / N \quad \dots\dots(134)$$

また、 $Y_N$  の分散は(127)式のときと同様に、

$$\sigma_{Y_N}^2 = F_{ct}'' \sigma_{\bar{y}}^2 / N = F_{ct}'' \langle \sigma_{y^2}(\infty, T=\tau) \rangle / N \quad \dots\dots(135)$$

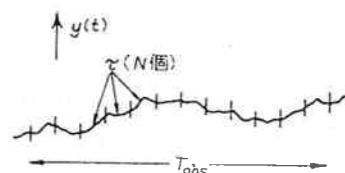
$$F_{ct}'' = 1 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} (N-k) \rho_k' / N \quad \dots\dots(136)$$

ただし、 $\sigma_{\bar{y}}^2$  は  $\bar{y}_i$  の分散  $\langle \bar{y}_i^2 \rangle$  である。また、 $\rho_k'$  は

$$\rho_{ij}' = \rho_k' = |i-j| = \langle (\bar{y}_i - Y_0)(\bar{y}_j - Y_0) \rangle / \sigma_{\bar{y}}^2 \quad \dots\dots(137)$$

であり、 $Y_0 = \langle Y_N \rangle$  は  $Y_N$  の真値であり、存在すると仮定している。

$f^0$  FM 雑音の場合、 $\rho_k' = 0, F_{ct}'' = 1, \sigma_{\bar{y}}^2 = \sigma_{y^2}(\tau)$



第21図 平均周波数の測定

第5表

Correlation coefficient  $\rho_k'$ , factor  $F_{ct}''$  and variance  $\sigma_{Y_N}^2$  of average frequency for white-phase noise.

$k r_m$	$\rho_k'$	$F_{ct}''$	$\sigma_{Y_N}^2$
1	-1/2	1/N	$\sigma_{\bar{y}}^2 / N^2$
>1	0	1	$\sigma_{\bar{y}}^2 / N$

となる。 $f^0$  PM 雑音については(114)式の関係を用いると  $\rho_k'$  と  $F_{ct}''$  を計算できる。結果を、(135)式の  $\sigma_{Y_N}^2$  とともに第5表に示す。また、 $f^0$  PM 雑音については  $\sigma_{\bar{y}}^2 = (2/3)\sigma_{y^2}(\tau)$  の関係がある。 $f^{-1}$  PM 雑音についても、 $f^0$  PM 雑音のときとほぼ同様の結果になると考えられる。したがって、これらの雑音が影響している場合でも無限個測定で周波数の真の平均値を求めることが可能である。

一方、 $f^\alpha (\alpha < 0)$  FM 雑音の場合、 $\sigma_{\bar{y}}^2 = \langle \sigma_{y^2}(\infty, T=\tau) \rangle \rightarrow \infty$  となってしまうから、これが物理的意味をもつのは有限個数  $N$  に限ったときだけである。そのときの分散は  $\langle \sigma_{y^2}(N, T, \tau) \rangle$  で与えられるが、これは測定パラメータの  $N, T, \tau$  に固有の量となり、 $\tau$  秒平均測定値母集団  $\bar{y}_i (i=1, 2, \dots, \infty)$  の分散を意味しない。 $f^\alpha$  FM 雑音による周波数変動は時間とともに周波数が発散してゆく過程であるが、これは発振器の平均周波数が時間とともに変動してゆく非定常過程としてとらえることができる<sup>(44)</sup>。したがって、無限時間観測で真の平均値を見いだそうということは無意味なわけである。 $(f^0 + f^\alpha)$  FM 雑音 ( $\alpha < 0$ ) のある場合、 $N$  個の  $\tau$  秒平均測定値の平均値  $Y_N$  の分散は次式のように書ける。

$$\sigma_{Y_N}^2 = \sigma_{y^2}(\tau) f^0 / N + \langle \sigma_{y^2}(N, T, \tau) \rangle f^\alpha \quad \dots\dots(138)$$

(138)式では、 $Y_N$  の分散  $\sigma_{Y_N}^2$  を最小にする  $N$  及び  $\tau$  が存在する。

$f^{-1}$  FM 雑音のとき、(138)式は第1表から、

$$\sigma_{Y_N}^2 / \sigma_{y^2}(\tau = 1s) f^{-1} = K / N\tau + N \ln N / c(N-1) \quad \dots\dots(139)$$

ただし、 $K = \sigma_{y^2}(\tau = 1s) f^0 / \sigma_{y^2}(\tau = 1s) f^{-1}, c = 2 \ln 2$ 。(139)式は  $\tau$  が大きいほど小さくなるから、第1項が無視できるとすると  $N=2$  が最適となる。そのとき、最小値は

$$\sigma_{Y_N}^2 = \sigma_{y^2}(\tau) f^{-1} \quad \dots\dots(140)$$

(139)式で  $\tau$  を任意にとれば最適の  $N$  が存在する。(139)式を  $N$  で微分して、

$$cK(N-1)^2 + N^2 \ln N - N^2(N-1) = 0 \quad \dots\dots(141)$$

数値計算で(141)式を解いた結果を第6表に示す。 $\langle \sigma_{y^2}(N, T, \tau) \rangle \propto \ln N$  であり、 $N$  に対して鈍感であるから、最適  $N$  も厳密である必要はない。

全観測時間  $T_N (\cong N\tau)$  が一定のときは、(139)式の代わりに

$$\sigma_{Y_N}^2 / \sigma_{y^2}(\tau) f^{-1} = K / T_N + N \ln N / c(N-1) \quad \dots\dots(142)$$

すなわち、 $N=2, \tau = T_N/2$  で最小となる。最小値は、

$K$	$\leq 2$	5	10	50	100
$N$	2	2~3	6~7	21~22	37~38
$\left[ \sigma_{Y_N}^2 / \sigma_{y^2}(\tau=1s) f^{-1} FM \right]_{\min}$	$\leq 2.33$	3.83~2.91	3.22~3.05	5.68~4.60	5.37~5.32

第6表 ( $f^0 + f^{-1}$ ) FM 雑音のときの最適  $N$  値

$$(\sigma_{Y_N}^2)_{\min} = \sigma_{y^2}(\tau=1s) f^0 / T_N + \sigma_{y^2}(\tau) f^{-1} \quad \dots\dots(143)$$

$f^{-2}$  FM 雑音のとき、(138)式は

$$\sigma_{Y_N}^2 / \sigma_{y^2}(\tau=1s) f^{-2} = K' / N\tau + N\tau/2 \quad \dots\dots(144)$$

ただし、 $K' \equiv \sigma_{y^2}(\tau=1s) f^0 / \sigma_{y^2}(\tau=1s) f^{-2}$ 。(144)式から、最適条件は  $N\tau = \sqrt{2K'}$  となり、そのときの最小値は  $\sqrt{2K'}$  となる。全観測時間  $T_N \cong N\tau$  が一定のときは、(144)式も一定となる。

6. ま と め

周波数安定度尺度が定義されるに至った背景と意義、その後の進展等について触れるとともに、定義された安定度尺度と種々の安定度尺度間の変換について述べた。また、定義された Allan 分散を離散的雑音の場合に適用し、周波数測定や周期測定における影響の仕方を連続スペクトル雑音のときと対比させながら検討した。更に、Allan 分散の推定値の一般形式を設定し、相関係数及び推定値の分散を計算するとともに、シミュレーションによって分布を調べた。これらの結果を周波数測定誤差の評価に適用し、測定値の分散が最小となるような条件を明らかにした。

定義された周波数安定度尺度、パワースペクトル密度と Allan 分散は関係分野に受け入れられ、統一的な尺度として十分普及しているようである。特に、パワースペクトル密度は基本的な量であり、形式的には何ら問題はない。したがって、測定方法などでいろいろ工夫されてきたが、フーリエ周波数  $f$  が 1 Hz 以上の PM 雑音の影響する領域ではスペクトル分析器も進歩し  $S_\nu(f)$  を十分高い精度で測定できるようになった。しかし、 $f < 1$  Hz では結局時間領域の測定に依存することになり、しかも原子発振器の大きな特長の一つは長時間安定度が優れていることであるから、時間領域の尺度としての Allan 分散の方が手軽に頻繁に使われているといっても過言でない。

Allan 分散の弱点は  $f^0$  PM 雑音と  $f^{-1}$  PM 雑音を区別して表現できないということ、及び  $f^\alpha$  型のスペクトルで  $\alpha > -3$  までしか使用できないため、時間変動の直接的尺度にはならないということである。したがって、時間変動を評価するのにいちいち周波数 ( $f$ ) に直

してから Allan 分散で表現するという方法をとっている。これらの問題点について、今後も検討が続けられていくと思われる。

なお、増幅器や周波数通倍器などの影響は位相雑音として、短時間領域における  $S_\nu(f)$  の測定に解消しているくらいがあるように思われるが、温度変動等による比較的長時間の位相変動を測定したり、これを軽減したりすることの意義は依然として失われていない<sup>(45)(46)</sup>。なぜなら、これらの装置が原子発振器の制御ループ内に存在すれば、それは発振器の出力周波数の長期変動成分として影響するし、また、周波数比較システムや高い周波数の供給源などに使用された場合も見掛け上周波数変動として影響するからである。この場合、尺度としては Allan 分散や(7)式の形式の方が適しているわけである。

謝 辞

有益な議論をしていただいた当研究所の安田部長、いろいろお励ましいただいた宇都宮前東京大学教授に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- (1) Barnes, J.A. et al.; "Characterization of Frequency Stability", NBS Tech. Note 394, Oct. 1970.
- (2) IEEE-NASA Symposium on Short-term Frequency Stability, Nov. 23~24, 1964.
- (3) "Special Issue on Frequency Stability", Proc. IEEE, 54, 2, Feb. 1966.
- (4) Cutler, L. S. and Searle, C. L.; "Some Aspects of the Theory and Measurements of Frequency Fluctuations in Frequency Standards", (3) に同じ, p. 136.
- (5) Allan, D. W.; "Statistics of Atomic Frequency Standards", (3) に同じ, p. 221.
- (6) Barnes, J. A.; "Atomic Time-Keeping and the Statistics of Precision Signal Generators", (3) に同じ, p. 207.
- (7) 吉村; "周波数安定度の定義", 電気学会技術報告(II部)第41号, 周波数安定度とその測定, pp. 8-54, 昭51-2.

(8) Mccoubrey, A. P.; "A Survey of Atomic Frequency Standards", (3)と同じ, p. 116.

(9) Lesage, P. and Audion, C.; "Characterization of Frequency Stability; Uncertainty due to the Finite Number of Measurements", IEEE Trans., **IM-22**, 2, p. 157, June 1973.

(10) Tausworthe, R. C.; "Convergence of Oscillator Spectral Estimators for Counted-Frequency Measurements", IEEE Trans., **COM-20**, p. 214, April 1972.

(11) Yoshimura, K.; "Characterization of Frequency Stability: Uncertainty due to the Autocorrelation of the Frequency Fluctuations", IEEE Trans., **IM-27**, 1, p. 1, March 1978.

(12) 吉村; "周波数安定度尺度 Allan 分散の推定値の評価: 周波数変動の自己相関による不確定性", 信学論, **59-C**, 2, p. 115, 昭51-2.

(13) Rutman, J.; "Characterization of Phase and Frequency Instabilities in Precision Frequency Sources: Fifteen Years of Progress", Proc. IEEE, **66**, 9, p. 1048, Sept. 1978.

(14) Allan, D. and Barnes, J.; "A Modified Allan Variance with Increased Oscillator Characterization Ability", Proc. 35th Annu. Frequency Control Symp., p. 470, May 1981.

(15) Rutman, J.; "Oscillator Specifications: A Review of Classical and New Ideas", Proc. 31st Annu. Frequency Control Symp., p. 291, June 1972.

(16) Percival, D. B.; "Characterization of Time and Frequency Instabilities: Prediction Error Variance", Digest CPEM '82, p. N-7, June, 1982.

(17) Baugh, R. A.; "Frequency Modulation Analysis with the Hadmard Variance", Proc. 25th Annu. Frequency Control Symp., p. 222, April 1971.

(18) Barnes, J. A.; "Models for the Interpretation of Frequency Stability Measurements", NBS Tech. Note 683, Aug. 1976.

(19) Percival, D. B.; "Prediction Error Analysis of Atomic Frequency Standards", Proc. 31st Annu. Frequency Control Symp., p. 319, June 1977.

(20) Percival, D. B.; "A Heuristic Model of Long-Term Atomic Clock Behavior", Proc. 30th Annu. Frequency Control Symp., p. 414, June 1976.

(21) 周波数精密測定回路専門委員会; "周波数安定度とその測定", 電気学会技術報告 (II部) 第41号, 昭51-2.

(22) Tryon, P. V. and Jones, R. H.; "Estimations of Parameters in Models for Cesium Beam Atomic Clocks", 2nd Symp. of Atomic Time Scale Algorithms, June 1982.

(23) Barnes, J. A.; "Time Scale Algorithms Using Kalman Filters-Insights from Simulation", (22)と同じ.

(24) Snyder, J. J.; "An Ultra-High Resolution Frequency Meter", Proc. 35th Ann. Freq. Contro. Symp., p. 464, May 1981.

(25) 吉村, 篠塚, 鈴木, 峯野, 島田; "降雨減衰をうけた衛星電波強度の Allan 分散", 信学技報, **A・P 82-6**, 昭57-2.

(26) Hellwig, H.; "A Review of Precision Oscillators", NBS Tech. Note 662, Feb. 1975.

(27) Barnes, J. A.; "The Generation and Recognition of Flicker Noise", NBS Report 9284, June 1967.

(28) Richards, P. I.; "Computing Reliable Power Spectra", IEEE Spectrum, Jan. 1967.

(29) Sauvage, G. and Rutman, J.; "Analyse Spectrale de Bruit de Fréquence des Oscillateurs par la Variance de Hadmard", Ann. Télécom., **28**, 7~8, p. 301, July 1973.

(30) Rutman, J.; "Relations between Spectral Purity and Frequency Stability", Proc. 28th Ann. Freq. Control Symp., p. 160, May 1974.

(31) Halford, D., Shoaf, J. H. and Risley, A. S.; "Frequency Domain Specification and Measurements of Signal Stability", NBS Tech. Note 632, Jan. 1973.

(32) Barnes, J. A.; "Tables of Bias Functions, B<sub>1</sub> and B<sub>2</sub>, for Variances based on Finite Sample of Process with Power Law Spectral Dencities", NBS Tech. Note 357, Jan. 1969.

(33) Jones, R. H. and Tryon, P. V.; "Estimating Time from Atomic Clocks", 2nd Symp. on Atomic Time Scale Algorithms, June 1982.

(34) 吉村, 小林; "周波数合成器の離散的雑音による周波数安定度", 信学論, **54-C**, 6, p. 507, 昭46-6.

(35) Noordanus, J.; "Frequency Synthesizer---A Survey of Techniques", IEEE Trans., **COM-17**, No. 2, p. 257, April 1969.

(36) Bendat, J. S., Principles and Applications of Random Noise Theory, New York, Wiley, 1958.

付 録 A

PM 雑音の場合の相関係数 (a=1, 2) の計算

(116)式各項は  $n(n-1)\langle\sigma_y^2(n, \tau)\rangle$  の形をしており, a=1 及び 2 に対する計算は n=1 及び 2 に対する計算と同じである. (113)式から

$$n(n-1)\langle\sigma_y^2(n, \tau)\rangle = [n^2 U_x(\tau) - U_x(n\tau)]/\tau^2 \quad \dots\dots(A1)$$

(A1)式で  $U_x(\tau)$  が存在するなら,  $n \rightarrow 1$  で  $n(n-1)\langle\sigma_y^2(n, \tau)\rangle \rightarrow 0$  となる.

$n \rightarrow 0$  のとき, (A1)式は,

$$n(n-1)\langle\sigma_y^2(n, \tau)\rangle \rightarrow -U_x(n\tau)/\tau^2 \equiv n^2 U_x(\tau')/\tau'^2 = -n^2 \langle\sigma_y^2(\infty, \tau')\rangle \quad \dots\dots(A2)$$

ただし,  $\tau' \equiv n\tau$ , 及び  $U_x$  は有限と仮定した.  $\langle\sigma_y^2(\infty, \tau')\rangle$  は, 帯域制限された  $f^0$  PM 雑音のときは  $\tau'$  によらないから<sup>(4)</sup>,

$$n(n-1)\langle\sigma_y^2(n \rightarrow 0, \tau)\rangle \rightarrow 0 \quad \dots\dots(A3)$$

$f^{-1}$  PM 雑音では  $U_x(\tau')$  は次のように書ける<sup>(6)</sup>.

$$U_x(\tau') \propto [2\beta^2 \ln \beta - (1+\beta)^2 \ln(1+\beta) - (1-\beta)^2 \ln|1-\beta|] \quad \dots\dots(A4)$$

ただし,  $\beta = 2\pi f_n \tau'$ . (A4)の右辺は  $\tau' \rightarrow 0$  で  $2\beta^2(\beta-2)$  に近づく. したがって,  $f^{-1}$  PM 雑音に対しても(A3)式を得る. これらの結果を(116)式の計算に適用すると次のようになる.

$$\langle x_i x_j \rangle \cong -2 \langle \sigma_y^2(2, \tau) \rangle + (3/2) \langle \sigma_y^2(3, \tau) \rangle \quad (a \rightarrow 1) \quad \dots\dots(A5)$$

(107), (108)式から,

$$\rho_k(kr_m \rightarrow 1) = -2/3 \quad (a \rightarrow 1) \quad \dots\dots(A6)$$

$$\langle x_i x_j \rangle = 3 \langle \sigma_y^2(2, \tau) \rangle - 6 \langle \sigma_y^2(3, \tau) \rangle + 3 \langle \sigma_y^2(4, \tau) \rangle \quad (a \rightarrow 2) \quad \dots\dots(A7)$$

$$\rho_k(kr_m \rightarrow 2) = 1/6 \quad (a \rightarrow 2) \quad \dots\dots(A8)$$



## 2. 周波数と時間の計測法

小宮山 牧 児\*

## 1. ま え が き

1秒がセシウム (Cs) 133 原子の基底状態の二つの超微細準位間の遷移に対応する放射波の 9 192 631 770 周期の継続時間で定義されているように、周期の逆数である周波数の計測と時間 (間隔) の計測は全く同じ意味をもっているといえよう。

II.1 (3)式にあるように、周波数の瞬時値  $\nu(t)$  は時間  $t$  の関数として次式で与えられる。

$$\nu(t) = \nu_0 [1 + y(t)]$$

ここで、 $\nu_0$  は公称周波数、 $y(t)$  は規格化周波数変動分である。 $\nu(t)$  は  $y(t)$  のために  $\nu_0$  の周りにゆらいであり、周波数の測定値は常にある不確定部分を有している。 $y(t)$  は不規則変数であるため周波数の不確定さは、II.1 で述べている周波数安定度という統計的尺度で示される。

このように、周波数と時間の精密計測は  $\nu(t)$  の変動部分として観測される  $y(t)$  をいかに精度よく測定するかということになる。したがって、ここでは周波数 (時間) の精密計測=周波数安定度の測定としてとらえ、主として周波数安定度の測定法について議論している。

II.1 で述べられているように、発振器の周波数安定度の尺度として周波数領域では  $y(t)$  のパワースペクトラム密度  $S_y(f)$ 、時間領域では Allan 分散  $\sigma_y^2(\tau)$  がそれぞれ定義されている。ここで、 $f$ 、 $\tau$  はそれぞれフーリエ周波数及びサンプル時間である。

周波数領域では一般に波形分析器でスペクトラム密度を測定する。 $f$  のすべての領域で  $S_y(f)$  が測定できるならば、 $y(t)$  の統計的性質は全部求まることになるが、 $f < 1$  Hz での変動成分を波形分析器で測定することは、時間がかかる等で現実的でなく、 $S_y(f)$  の測定は通常  $f \geq 1$  Hz でなされることが多い。

$\sigma_y^2(\tau)$  は一般に、周波数カウンタで測定されるが、 $\sigma_y^2(\tau)$  も  $\tau$  のすべての領域で測定できるわけではなく、高精度の測定は  $\tau \geq 1$  ms でなされることが多い。

したがって、現実に測定される  $S_y(f)$  は  $y(t)$  の比較的早い変動成分の評価に有効な尺度となり、現実に測定される  $\sigma_y^2(\tau)$  は  $y(t)$  の比較的ゆっくりした変動成分の評価に有効な尺度であるといえよう。このため、目

\*周波数標準部 標準値研究室

的に応じて  $S_y(f)$ 、 $\sigma_y^2(\tau)$  を単独で、あるいは併用して周波数安定度を評価することが必要となる。

AM 雑音を無視できる場合は、波形分析器で RF パワースペクトラム密度を測定することにより位相雑音スペクトラム密度  $S_\phi(f)$  を推定できるが (次節で述べているように実際測定しているのは通常  $S_y(f)$  でなく  $S_\phi(f)$  である)、波形分析器のダイナミックレンジは 80 dB 程度である。また、周波数カウンタによる周波数の測定精度は、最も性能のよいものでも  $\tau=1$  s で  $10^{-10}$  程度が限度である。

一方、高品位の水晶発振器では、 $S_\phi(f=1$  kHz)  $\sim -170$  dB、 $\sigma_y(\tau=1$  s)  $\sim 10^{-13}$  といった高安定性を有している。また、水素メーザでは  $\sigma_y(\tau)$  の noise floor が  $\sim 10^{-15}$  にも達する。このため、測定精度を上げるための技術がいろいろ開発されている。

ここでは、主としてこれらの高安定発振器の周波数及びその安定度の測定法について報告する。2. では、周波数領域における測定法、3. では、時間領域における測定法について述べている。周波数や周波数安定度測定では、増幅、周波数分周、周波数通信等の信号処理をすることがしばしばあるが、4. では信号処理による付加雑音について論じている。

なお、距離的に離れた地点間における周波数、時間の計測法として標準電波、衛星等を利用した電波による計測法があるが、ここでは触れていないので興味のある読者は、本特集号 V. を参照されたい。

周波数安定度の測定法については、既に文献(1)で安田らにより広範囲にわたり詳細に報告されているが、ここでは比較的よく用いられる測定法について測定原理、測定限界を明確にすることに重点をおいて報告するとともに、著者らが実際利用している測定法については、当室での測定システムの一部を紹介した。

## 2. 周波数領域における測定法

## 2.1 概要

周波数安定度を測定しようとする発振器の出力電圧  $V(t)$  を時間  $t$  の関数として次式で表す。

$$V(t) = V_0 [1 + m(t)] \sin [2\pi\nu_0 t + \phi(t)] \dots\dots(1)$$

ここで、 $V_0$ 、 $\nu_0$  はそれぞれ電圧振幅及び周波数の公称値である。また、 $m(t)$  は振幅変動成分、 $\phi(t)$  は位相の

変動成分を示しており、ともにゆっくり変化する関数である。 $m(t) \ll 1$  であれば (通常満足されている),  $m(t)$  は  $\phi(t)$  の測定に直接影響を及ぼさない。 $\phi(t)$  の無限時間平均  $\langle \phi(t) \rangle$  は零と仮定する。

$y(t)$  は次式で定義されている。

$$y(t) = \frac{1}{2\pi\nu_0} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad \dots\dots(2)$$

周波数領域での周波数安定度の尺度は  $S_y(f)$  で定義されているが,  $y(t)$  を高精度に直接測定できる装置は通常ないので (周波数弁別器は周波数変動分を電圧に変換する装置であるが一般的でない), 実際は  $\phi(t)$  を測定することが多い。このため, これ以降は  $S_\phi(f)$  の測定法について論ずる。 $S_y(f)$  は次の関係式から求めることができる。

$$S_y(f) = \left(\frac{f}{\nu_0}\right)^2 S_\phi(f) \quad \dots\dots(3)$$

$S_\phi(f)$  の単位は  $[\text{rad}^2/\text{Hz}]$  である。10 log  $[S_\phi(f)]$  として dB 表示で示すこともある。また, 低域の遮断周波数  $f_0$  に対して

$$\int_{f_0}^{\infty} S_\phi(f') df' \ll 1 \text{ (rad)}^2 \quad \dots\dots(4)$$

が満足されているときは,  $f > f_0$  で, II.1.3 で定義されているスクリプト (script)  $\mathcal{L}(f)$  で位相雑音スペクトラム密度を表すことができる。このとき,

$$\mathcal{L}(f) \doteq \frac{1}{2} S_\phi(f) \quad \dots\dots(5)$$

である。 $\mathcal{L}(f)$  の単位は  $\text{Hz}^{-1}$  であるが, 10 log  $[\mathcal{L}(f)]$  として普通 dB で示す。(4) 式の条件は, 高安定発振器では十分満足されている。周波数合成器の仕様等で位相雑音を示す尺度として, 1 Hz 帯域幅における SSB (Single Side Band) 位相雑音 (単位: dBc/Hz) がしばしば用いられるが, これは II.1 (7) 式の  $\mathcal{L}(f)$  の定義から明らかのように  $\mathcal{L}(f)$  の dB 表示と全く等価な量である。

このほかに, 1 Hz 帯域幅の rms 周波数推移  $\langle \delta f^2 \rangle^{1/2} f = f_m$  (マイクロ波帯でよく用いられる) や,  $(N/C)$  dB で  $y(f)$  のスペクトラム密度を表示することがあるが, これらの尺度と  $S_y(f)$  の関係については II.1.3 を参照されたい。

$\mathcal{L}(f)$  の定義からわかるように, 波形分析器で RF パワースペクトラム密度を測定すれば  $S_\phi(f)$  を計算できるが, 波形分析器のダイナミックレンジが 80 dB 程度と小さいこと, また, キャリア近傍の測定が難しいことから  $S_\phi(f)$  の測定には適当でない。このため, 2.2 で述べているように被測定信号の位相と, 被測定信号と周波数が同じ基準信号の位相を位相検出器で比較し,  $\phi(t)$  の成分だけを取り出すことによりダイナミックレンジの

問題及び  $f$  の低い領域での測定の問題を解決している。2.3 では, 被測定信号と基準信号の位相関係を適当に保つため位相ロックをかけたときの  $S_\phi(f)$  の測定法について論じている。2.4 では, 2.2, 2.3 の測定系における測定限界すなわちシステムノイズについて検討している。

ここで述べている周波数領域の測定では, すべて波形分析器によりスペクトラム密度を測定しているが, 波形分析器で測定可能な最小のフーリエ周波数は通常 1 Hz 程度であるので,  $S_\phi(f)$  の測定は  $f \geq 1 \text{ Hz}$  で行われることが多い。

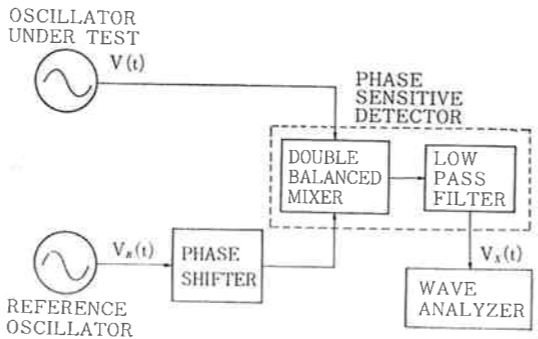
スペクトラム密度を測定するには, 上述の波形分析器のほかに,  $\phi(t)$  の時間領域のデータから Blackman and Tukey の方法<sup>(1)</sup> や II.1.3 で述べられている Hadamard 分散により  $S_\phi(f)$  を推定する方法がある。これらの方法はとりわけ  $f < 1 \text{ Hz}$  での測定に有効であるが, ここでは紹介だけにとどめておく。なお, 超 LSI, マイクロプロセッサの出現により, 最近では時間領域のデータからスペクトラム密度を測定する波形分析器も商品として出ており,  $f < 1 \text{ Hz}$  での測定も可能となっている。

2.2 位相検波器を用いた  $S_\phi(f)$  測定の原理<sup>(2)</sup>

(1) 式で示される被測定信号の位相変動分を検出するには, 一般に周波数の同じ基準信号  $V_R(t)$  の位相と  $\phi(t)$  を位相検波器 (PDS) により比較する。 $V_R(t)$  を次式で表す。 $V_r, \phi_r(t)$  は, 振幅の公称値, 位相変動分をそれぞれ示す。

$$V_R(t) = V_r \sin [2\pi\nu_0 t + \phi_r(t)]$$

第1図に位相比較のブロック図を示す。移相器により,  $V_R(t)$  の位相が  $\phi_s$  だけ推移されている。同図にあるように PSD として, 低雑音とバランスの良さから, ショットキダイオードを用いた二重平衡混合器 (DBM) が一般に用いられている。以下, PSD として DBM を用いるものとする。



第1図 位相雑音測定ブロック図

DBM が線形動作をしている場合は, 低周波出力  $V_X(t)$  は次式のように正弦波で与えられる。

$$V_X(t) = V_d \cos [\phi(t) - \phi_r(t) - \phi_s]$$

$\phi_s = \pi/2$  に設定すると,  $\phi_X(t) \equiv \phi(t) - \phi_r(t) \doteq 0$  へ, へ,

$$V_X(t) = V_d \sin [\phi_X(t)] \quad \dots\dots(6)$$

$$\doteq V_d \phi_X(t) \quad \dots\dots(7)$$

(7) 式は, DBM 出力の零交差点の  $\pm\pi/6$  の範囲では 5% 以下の誤差内で  $V_X(t)$  の近似式となる。

PSD の感度  $K_d(V/\text{rad})$  は,

$$K_d = \left. \frac{dV_X}{d\phi_X} \right|_{\phi_X=0} \quad \dots\dots(8)$$

と定義される。この場合, (6) 式にあるように,  $K_d = V_d$  なので,  $\phi_s$  を変化, 若しくは一方の発振器の周波数を少し離調させて, 出力正弦波の振幅を測定することにより  $K_d$  を求めることができる。 $V_d$  の値は, DBM への入力信号レベルと, DBM の変換損失によって決まる。

$\phi(t)$  と  $\phi_r(t)$  は独立なので, (7) 式より

$$S_{\phi_X}(f) = K_d^{-2} S_{V_X}(f) \quad \dots\dots(9)$$

$$= S_\phi(f) + S_{\phi_r}(f) \quad \dots\dots(9)$$

となる。通常, 次の(i), (ii)の条件を満足するように基準発振器を選ぶことが多いので,

(i)  $S_\phi(f) \approx S_{\phi_r}(f)$  のとき,

$$S_\phi(f) \approx K_d^{-2} S_{V_X}(f) / 2 \quad \dots\dots(10)$$

(ii)  $S_\phi(f) \gg S_{\phi_r}(f)$  のとき,

$$S_\phi(f) \approx K_d^{-2} S_{V_X}(f) \quad \dots\dots(11)$$

となり,  $S_{V_X}(f)$  を測定することにより  $S_\phi(f)$  を求めることができる。

$S_{V_X}(f)$  は, 波形分析器で測定される。波形分析器では, 設定された帯域幅  $B$  [Hz] での電圧の実効値  $V_{rms}$  を測定する。帯域幅内で  $S_{V_X}(f)$  が一定であると仮定すると,  $f = f_m$  でのスペクトラム  $S_{V_X}(f_m)$  は,

$$S_{V_X}(f_m) = V_{rms}^2 / B \text{ V}^2/\text{Hz} \quad \dots\dots(12)$$

となる。

いま, 例として  $S_{\phi_X}(f_m) = -150 \text{ dB}$  の位相雑音を測定するものとする。 $K_d = 0.15 \text{ V/rad}$ ,  $B = 10 \text{ Hz}$  とすると, (9), (12) 式より  $V_{rms} = 15 \text{ nV}$  となる。一方, 波形分析器の入力感度は,  $\mu\text{V}$  程度なので, 通常 DBM の後に, 低雑音増幅器が必要となる。

2.3 位相ロックループによる  $S_\phi$  の測定<sup>(3)</sup>

前節で述べたように,  $S_\phi(f)$  を測定するときは, DBM 出力の零交差点の  $\pm\pi/6$  の範囲になるように, 2台の発振器の位相差を保つ必要がある。いま,  $\nu_0 = 5 \text{ MHz}$  の発振器の  $S_\phi(f)$  を測定する場合を考えてみよう。基準発振器との周波数差を  $\Delta\nu$  とし, 測定に要する時間を 15 min とする。 $\pm\pi/6$  を満足するためには,

$$\left| \frac{\Delta\nu}{\nu_0} \right| \leq 1.8 \times 10^{-11}$$

となる。このように測定時間中, 2台の発振器の周波数差を  $10^{-11}$  台に保つ必要がある。 $\nu_0$  が大きくなると, この条件は更に厳しくなる。

以上のような理由により, 位相ロックループ (PLL) で2台の発振器の位相差を  $\pi/2$  に保つ方式が通常用いられている。第2図に, そのブロック図を示す。この場合, 基準発振器は電圧制御発振器 (VCO) である。PLL の関係式により<sup>(4)</sup>,

$$\mu K_d [\phi(s) - \phi_0(s) - \phi_r(s)] = V_X(s) \quad \dots\dots(13)$$

$$s\phi_0(s) = K_0 F(s) V_X(s) \quad \dots\dots(14)$$

が成り立つ。ただし,  $\phi_0(t)$ : VCO の電圧により制御される位相,  $\mu$ : 増幅器の電圧利得,  $K_0$ : VCO の FM 変調感度  $[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}]$ ,  $F(s)$ : フィルタの伝達関数である。そのほかの変数は, 2.2 と同じである。ただし, ここで  $V_X$  は増幅後の DBM 出力を示している。また,  $s$  はラプラス変数である。

(13), (14) 式より,

$$V_X(s) = \frac{\mu K_d s}{s + \mu K_0 K_d F(s)} [\phi(s) - \phi_r(s)] \quad \dots\dots(15)$$

$$= \mu K_d E(s) [\phi(s) - \phi_r(s)] \quad \dots\dots(16)$$

ただし,  $E(s)$  は誤差応答で,

$$E(s) = \frac{s}{s + \mu K_0 K_d F(s)} \quad \dots\dots(17)$$

である。 $s$  が次の条件を満足していると,

$$|s| \gg \mu K_0 K_d |F(s)| \quad \dots\dots(18)$$

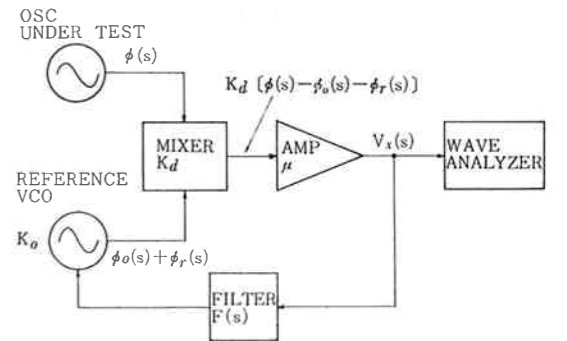
$E(s) \approx 1$  と近似できるので,

$$V_X(s) \approx \mu K_d [\phi(s) - \phi_r(s)] \quad \dots\dots(19)$$

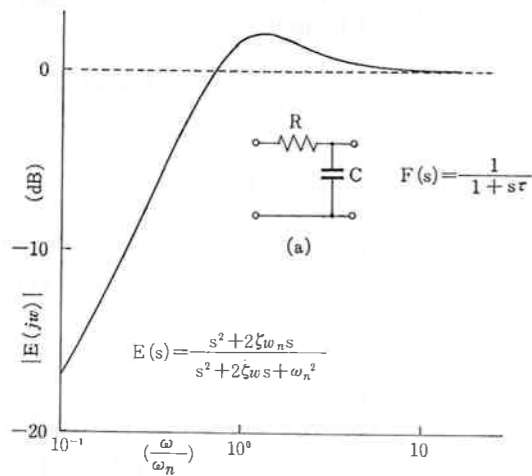
となる。 $\phi(t)$  と  $\phi_r(t)$  は独立なので,

$$S_{V_X}(f) \approx \mu^2 K_d^2 [S_\phi(f) + S_{\phi_r}(f)] \quad \dots\dots(20)$$

したがって, 2.2 と同様に,  $S_{V_X}(f)$  を測定することにより  $S_\phi(f)$  を求めることができる。



第2図 PLLによる位相雑音測定原理図



第3図 RC フィルタ(a)及び  $\zeta=1/\sqrt{2}$  としたときの誤差応答(b)

例として、 $F(s)$  が第3図(a)にある簡単なフィルタの場合について  $E(s)$  を計算してみる。 $F(s)$  は次式で与えられる。

$$F(s) = \frac{1}{1+s\tau} \quad \dots\dots(21)$$

ただし、 $\tau=RC$  である。(21)式を(17)式に代入すると、

$$E(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \dots\dots(22)$$

となる。自然角周波数  $\omega_n (=2\pi f_n)$ 、減衰率  $\zeta$  は

$$\omega_n = \left( \frac{\mu K_0 K_d}{\tau} \right)^{1/2} \quad \dots\dots(23)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu K_0 K_d \tau} \right)^{1/2} \quad \dots\dots(24)$$

である。 $\zeta=1/\sqrt{2}$  としたときの  $|E(j\omega)|$  の周波数特性を第3図(b)に示す。 $f \geq 3f_n$  のフーリエ周波数に対しては、1dB以下の誤差で  $|E(j\omega)| \approx 1$  と近似できる。したがって、 $f_n$  の値を、測定する最小のフーリエ周波数の1/3以下に設定すれば、1dB以下の誤差内で  $S_{\phi}(f)$  を測定できる。

$S_{\phi}(f)$  は通常、 $f \geq 1\text{ Hz}$  で測定されているが、第3図の例では上述の理由により、 $f_n$  を0.3 Hz程度に設定する必要がある。一方、第2図のPLLでロックが安定にかかるために2台の発振器に許容される最大の周波数変動 (hold in range) は  $f_n$  程度であるので、 $\nu_0$  が大きく、かつ  $f$  の小さい領域まで測定するときは、それぞれの発振器に相当の周波数安定度が要求されることとなる。

2台の発振器に  $\Delta\nu$  の周波数差があると、velocity

error  $\theta_v$  は次式で与えられる<sup>(4)</sup>。

$$\theta_v = \frac{2\pi\Delta\nu}{\mu K_0 K_d F(0)} \quad \dots\dots(25)$$

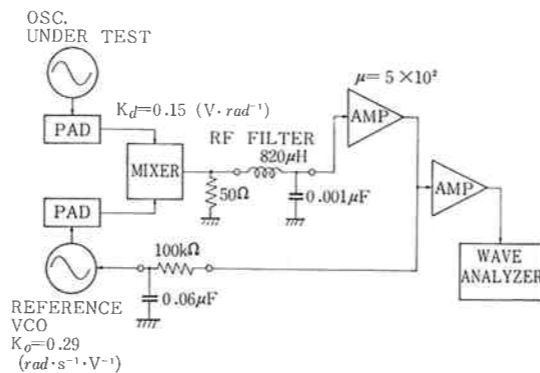
したがって、 $\theta_v \leq \pi/6$  となるように  $\Delta\nu$  を調整する必要がある。通常、第3図(a)、あるいは  $F(s)=1$  のようなフィルタで十分であるが、 $\theta_v$  を常に0に保つために  $F(s)$  として二次のアクティブフィルタを用いることがある<sup>(5)</sup>。

第2図のPLLでは、 $f_n$  を小さく、すなわち hold in range を小さく設計しているため、“loose phased lock” と呼ばれている。

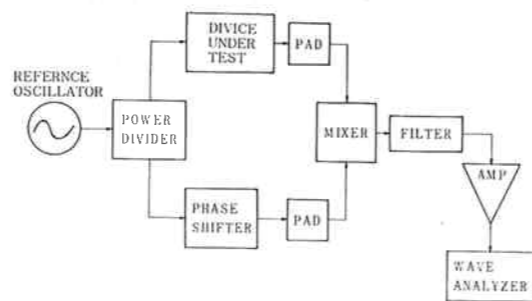
当研究室での  $S_{\phi}(f)$  測定システムを第4図に示す。基準発振器は、5 MHz 水晶発振器である。PLLの各定数を同図に示してある。ここで用いられている波形分析器の最小測定周波数は20 Hzなので、 $f_n=5\text{ Hz}$  に設定している。

2.4 デバイスの位相雑音測定及びシステム雑音

増幅器やフィルタのようなデバイスの付加位相雑音の測定は、2.2で述べた方法を直接応用できる。第5図に、そのブロック図を示す。DBMの両チャンネルに同一の信号が入力しているため、DBMの平衡が完全であ



第4図 PLLによる位相雑音測定システム。PADは可変減衰器を示す。



第5図 増幅器やフィルタのようなデバイスの付加位相雑音を測定する場合の測定系

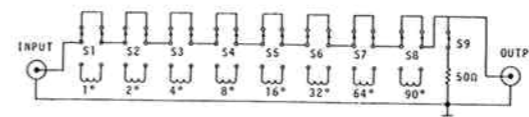
ば基準信号の位相雑音の影響は相殺される。移相器は十分低雑音である必要があるため、第6図にあるように同軸ケーブルを用いた移相器が好ましい<sup>(3)</sup>。

システム雑音は、第5図でデバイスのところを短絡することにより同様に測定できる。DBM出力での等価雑音を  $e_n(t)$  とすると、片チャンネルあたりのシステム雑音のスペクトラム  $S_{\phi_0}(f)$  は、

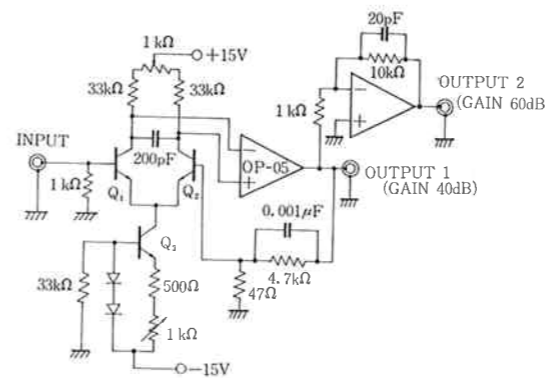
$$S_{\phi_0}(f) = K_d^{-2} S_{e_n}(f)/2 \quad \dots\dots(26)$$

となる。 $e_n(t)$  は、DBMの雑音と増幅器入力換算雑音の和として与えられる。白色雑音領域では、 $S_{e_n}(f)$  はほとんど増幅器の雑音によるものである。このため増幅器の低雑音化は大変重要である。第7図に当研究室で用いている低雑音増幅器を示す<sup>(6)</sup>。初段のトランジスタの電流は最も雑音が小さくなるように設定している。入力を50Ωで終端したときの、この増幅器の入力換算雑音電圧は  $\sim 2.2\text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$  である。DBMを線形動作させているときは、 $K_d \approx 0.15\text{ V/rad}$  程度となるため、 $S_{\phi_0}(f)$  は160 dBとなる。第8図に、第4図の測定系で測定した5 MHz水晶発振器の位相雑音とシステム雑音を示す。また、同図には、増幅器のみの入力換算雑音電圧も示してある。

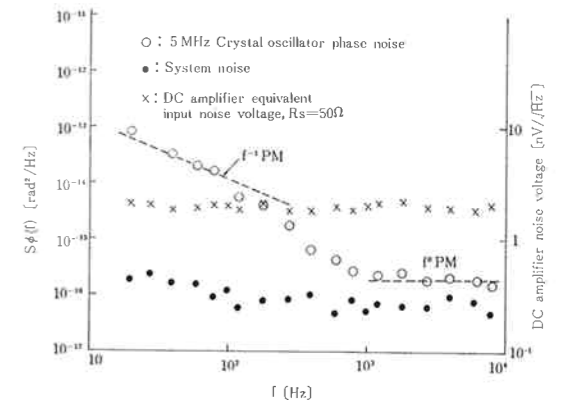
最近の高品位水晶発振器では白色位相雑音レベルが  $\sim -170\text{ dB}$  にも達している。一方、増幅器の入力換算



第6図 50Ω同軸ケーブルを使用した可変位相移器。文献(3)より引用



第7図 低雑音直流増幅器。トランジスタ  $Q_1, Q_2$  のコレクタ電流は、 $Q_3$  のエミッタ抵抗を可変して最適値に設定できる。ここでは約420  $\mu\text{A}$  に設定してある。



第8図 5 MHz 水晶発振器位相雑音の測定及びシステム雑音。また、第7図にある直流増幅器を50Ωで終端したときの等価入力雑音も示してある。

雑音電圧は、現在報告されている最も良いもので  $1\text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$  程度なので<sup>(7)</sup>、(ちなみに、50Ω抵抗の発生する熱雑音は室温で  $\sim 0.9\text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$  である)、上述の計算例からわかるように、システム雑音は十分でない。このため、 $K_d$  を大きくしてシステム雑音を下げる試みがなされている。文献(8)では、DBMの各アームにショットキバリアダイオードを2個直列に接続し、動作電力レベルを上げたり、DBMを定格以上の電力で駆動して  $K_d$  を大きくしている。この場合、DBMの出力はもはや正弦波でなくなるため、実際の出力波形から(8)式に従って  $K_d$  を求める必要がある。

システム雑音及びデバイスの位相雑音の測定では、基準発振器の位相雑音は相殺されるものとして無視しているが、実際のDBMの平衡性は完全でないため、基準発振器は十分低位相雑音のものを使用すべきである<sup>(9)(10)</sup>。

これまで述べてきたように、位相雑音の測定では微小電圧を測定しているため、ハムの誘導による悪影響がしばしば問題になる。したがって、測定系のグラウンドの設計には、十分注意する必要がある<sup>(11)</sup>。

3. 時間領域における測定法

3.1 概要

(1)式で示される信号の時間領域における周波数安定度の尺度  $\sigma_y^2(\tau)$  は、次式で与えられている。

$$\sigma_y^2(\tau) = \left\langle \frac{\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k}{2} \right\rangle^2 \quad \dots\dots(27)$$

$\langle \rangle$  は無限時間平均を示す。 $\bar{y}_k$  は  $y(t)$  の  $\tau$  秒平均値で

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(t) dt \quad \dots\dots(28)$$

$$= \frac{\phi(t_k+\tau) - \phi(t_k)}{2\pi\nu_0\tau} \quad \dots\dots(29)$$



$$\frac{X(t_k + \tau) - X(t_k)}{\tau} \quad \dots\dots(30)$$

である。ただし、 $t_{k+1} = t_k + T$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  であり、 $T$  は以下に示されるように  $\tau$  秒測定の繰り返し周期である。また、 $X(t)$  は時間の変動分を示しており、次式で定義されている。

$$X(t) = \frac{\phi(t)}{2\pi\nu_0} \quad \dots\dots(31)$$

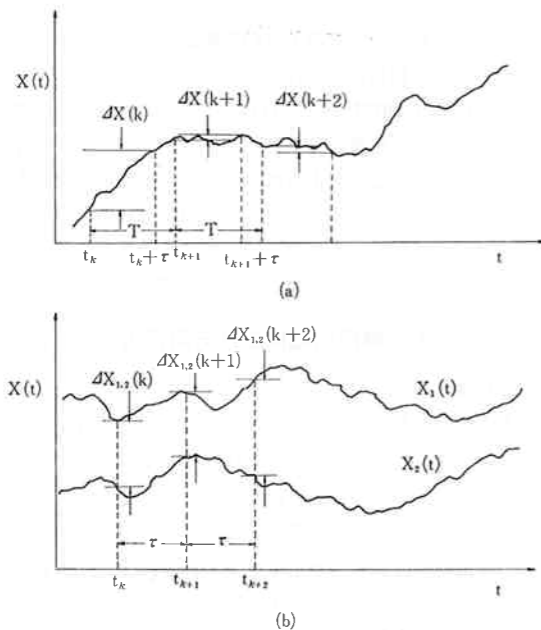
周波数領域と同様に、時間領域でも  $y(t)$  を直接測定する測定器は一般になく、位相差若しくは時間差を測定して(29), (30)式より  $\bar{y}_k$  を求めている。時間差(位相差)を測定して  $\bar{y}_k$  を求める方法は二つに大別できる。

第1の方法は、周波数カウンタで周波数測定(3.2で述べるように高精度測定では周期測定をして周波数を求めている)をして  $\bar{y}_k$  を求めるもので、このとき周波数カウンタが表示する周波数は  $\tau$  秒平均の周波数  $\bar{\nu}$  で、 $\bar{\nu} = \nu_0(1 + \bar{y}_k)$   $\dots\dots(32)$

となる。いま、変動分だけに着目すると、このとき周波数カウンタが計測しているのは第9図(a)に示すように時間軸上で  $\tau$  秒離れている点の時間差  $\Delta X(k)$  で、 $T$  秒ごとに測定している。ただし、

$$\Delta X(k) = X(t_k + \tau) - X(t_k) \quad \dots\dots(33)$$

$$\bar{y}_k = \frac{\Delta X(k)}{\tau} \quad \dots\dots(34)$$



第9図 時間領域における周波数の測定法。(a)周波数カウンタによる  $\bar{y}_k$  の測定。  $\bar{y}_k = \Delta X(k)/\tau$ 。(b)二つの信号の時間差測定による周波数変動の測定。  $\bar{y}_{1,2,k} = [\Delta X_{1,2}(k+1) - \Delta X_{1,2}(k)]/\tau$ 。

である。3.2で述べるように、 $T > \tau$  となり必ず空き時間 (dead time) が生じる。この測定法は簡便なことから最も頻りに用いられており、周波数カウンタによる直接計測から高精度測定まで広く利用されている。

第2の方法は被測定信号の位相と、被測定信号と周波数の同じ基準信号の位相の差を、タイムインタバルカウンタ (T.I. カウンタ) 若しくは位相計で測定し  $\bar{y}_k$  を求めるもので、第9図(b)に変動分だけに着目したときの二つの信号源 OSC. #1, #2 の位相を示している。T.I. カウンタで測定しているのは、 $t = t_k$  における時間差  $\Delta X_{1,2}(k)$  で  $\tau$  秒ごとに測定している。位相計では時間差が連続的に記録されているが、 $\bar{y}_k$  を求めるという点では、T.I. カウンタと全く同じである。 $\Delta X_{1,2}(k)$  は次式で与えられる。

$$\Delta X_{1,2}(k) = X_1(t_k) - X_2(t_k) \quad \dots\dots(35)$$

添字は OSC. #1, #2 にそれぞれ対応している。いま、 $\bar{y}_{1,2,k}$  を次式で定義する。

$$\bar{y}_{1,2,k} = \bar{y}_{1,k} - \bar{y}_{2,k}$$

ここで  $\bar{y}_{1,k}$ ,  $\bar{y}_{2,k}$  はそれぞれ、OSC. #1, #2 の規格化周波数変動分の  $\tau$  秒平均値である。(30), (35)式より

$$\bar{y}_{1,2,k} = \frac{\Delta X_{1,2}(k+1) - \Delta X_{1,2}(k)}{\tau} \quad \dots\dots(36)$$

となる。したがって、隣り合う  $\Delta X_{1,2}(k)$  の測定値から  $\bar{y}_{1,2,k}$  を求めることができる。一方、 $\bar{y}_{1,k}$ ,  $\bar{y}_{2,k}$  は統計的に独立なので、 $\bar{y}_{1,2,k}$  の値から OSC. #1, #2 のアラン分散を推定できる。この測定では、二つの信号源の位相差を時間の関数として測定していることから  $T = \tau$  となり空き時間が生じない。この測定法は必ず被測定信号と基準信号の周波数が等しい必要があるが(周波数が等しくなければいけない理由は3.5で述べる)このことは逆に、発振器間の周波数差が必要ないという有利な点でもある。この方法は通常の周波数測定には用いられないが、高安定信号源の周波数較正や長期安定度の高精度測定等に適しているとされている。最近では、空き時間がないこと等に注目して短期安定度の高精度測定にも応用されている。

(34), (36)式からわかるように、いずれの測定法でも時間差の測定精度により  $\bar{y}_k$  の測定精度が決まる。エレクトロニックカウンタの時間差の測定精度は 100 ps 程度が限度であるが、 $\tau = 1$  s とするとこのときの  $\bar{y}_k$  の測定精度は  $10^{-10}$  となる。また、位相計では、 $\nu_0 = 5$  MHz で  $1.5^\circ$  程度(一般に入力周波数により異なる)の精度のものが市販されているが、 $\tau = 1$  s とするとこのときの  $\bar{y}_k$  の測定精度は  $8.3 \times 10^{-10}$  となる。

ここでは、まず3.2で時間領域の測定で最もよく使用されるエレクトロニックカウンタの動作原理を述べ、

3.3以降では、上述の二つの測定法を高精度化したこれまでによく知られている測定法について述べている。

3.3のビート法、3.4の位相ロックープを利用した計測法は、第1の周波数測定法を高精度化したものであり、3.5の時間差法、3.6の DMTD 法は第2の時間差測定法を高精度化したものである。

3.2 エレクトロニックカウンタの動作原理

時間領域における周波数安定度測定では、エレクトロニックカウンタ(以下カウンタと略す)により直接周波数測定することが最も簡便な方法である。

カウンタの機能は年々向上しているが、現時点での最高技術では、

- (i) 周波数レンジ 40 GHz
- (ii) タイムインタバル (T.I.) 分解能  $\pm 20$  ps

の測定が可能となっている。

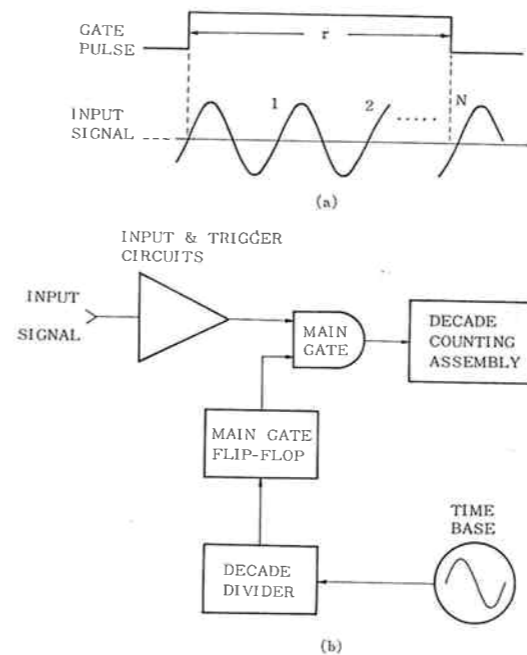
ここでは、周波数安定度測定の際しばしば用いられる周波数測定、周期測定、(T.I.) 測定の機能について、主として文献(12)に従って簡単に説明する。

(1) 周波数測定

第10図(a)にあるように、カウンタ上で設定されたゲート時間  $\tau$  の間に入力信号が何回繰り返したかを測定し、その回数を  $N$  とすると平均周波数  $\bar{\nu}$  は、

$$\bar{\nu} = N\tau^{-1} \quad \dots\dots(37)$$

で与えられる。周波数測定の基本的なブロック図を第10図(b)に示す。同図での基本要素として次の五つが挙



第10図 周波数カウンタ周波数測定モード。(a)信号波形 (b)基本ブロック図

げられる。

(i) 入力回路とトリガ回路; 入力信号を増幅器とシュミットトリガ回路を通して、カウンタの内部回路の動作に適合するように波形整形する。

(ii) タイムベース発振器; (37)式にある時間  $\tau$  の発生部である。1 MHz, 5 MHz, 10 MHz 等の水晶発振器が用いられている。

(iii) デイケード・デバイダ; タイムベースで発生される信号を入力として、10進ステップで変化できるパルス列を出力し、これが測定時間  $\tau$  を決定する。

(iv) 主ゲート; 主ゲートが開いているときに、増幅器/トリガ回路から供給されるパルス列が通過する。主ゲートの閉閉は、デイケード・デバイダによって制御される。

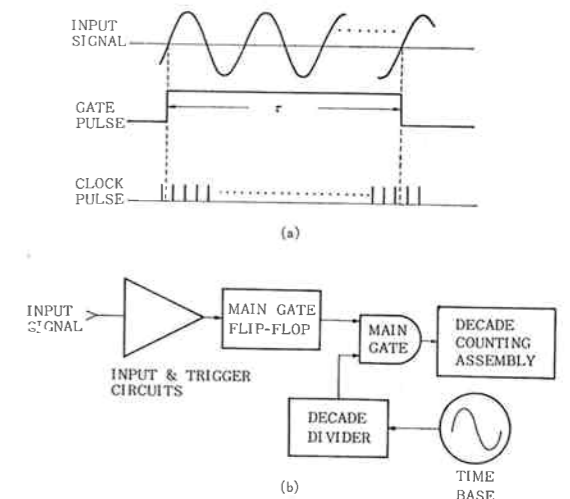
(v) デイケード・カウンティング・アセンブリ (DCA); 主ゲートを通ってきたパルスを積算する部分である。例えば、主ゲートが正確に 1 s 開いていた場合の積算値はそのまま Hz の単位で表示される。

(2) 周期測定

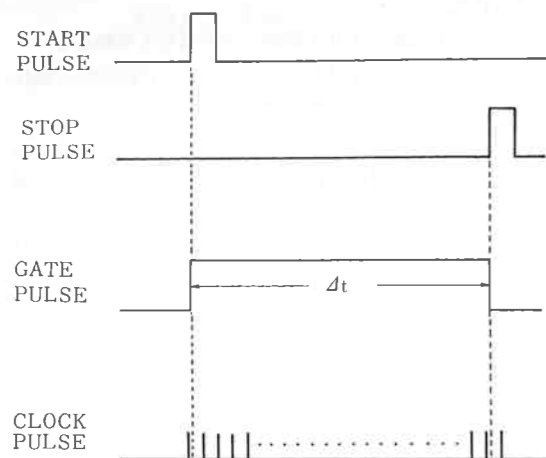
第11図(a)に示すように、入力信号の  $N$  周期と等しい間隔を有するゲートパルスを作り、その間隔  $\tau$  をカウンタ内蔵のクロックパルス (10 MHz のタイムベースの場合  $0.1 \mu\text{s}$ ) で測定する。したがって、平均周期  $\bar{p}$  は  $\bar{p} = \tau N^{-1}$   $\dots\dots(38)$

となる。第11図(b)に周期測定のブロック図を示す。(34)式の  $\Delta X(k)$  はこの図にあるように、実際は  $\tau$  の変動分として測定される。

(3) T.I. 測定



第11図 周波数カウンタ周期測定モード。(a)信号波形 (b)ブロック図



第12図 T.I. 測定

第12図に示すように、ゲートパルスの間隔が、スタートパルスとストップパルスにより決定される。Δt が周期測定と同様にクロックパルスで測定され表示される。

(4) 測定誤差

カウンタの誤差の原因として、±1カウント誤差、タイムベースの確度、トリガ誤差の三つがある。周波数測定、周期測定の総合の誤差は、結論的にいうと次のようになる。

周波数測定の場合；

測定確度 = ±1カウント誤差 ± タイムベースの確度

となる。第10図(a)の測定条件では

$$\pm 1 \text{ カウント誤差} = \frac{\pm 1}{N} = \pm \left(\frac{1}{v}\right) / \tau \quad \dots\dots(39)$$

周期測定の場合；

測定確度 = ±1カウント誤差 ± トリガ誤差 ± タイムベースの確度

となる。第11図(a)にあるように N 周期の平均測定している場合は、

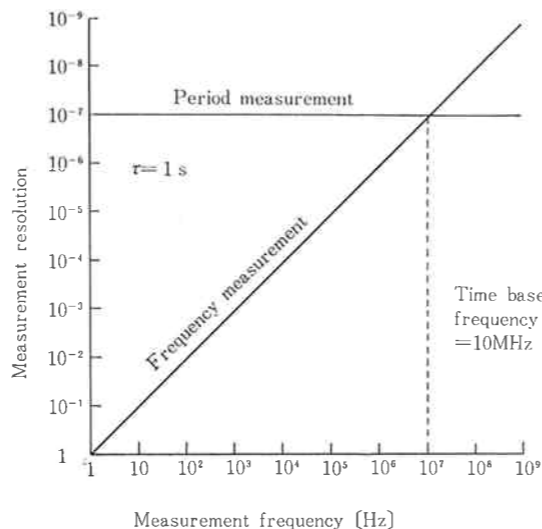
$$\text{平均周期測定確度} = \frac{\pm 1 \text{ カウント誤差} \pm \text{トリガ誤差}}{N}$$

± タイムベースの確度

となる。この場合の±1カウント誤差は、クロックパルスの周期を t<sub>c</sub> とすると、次のように与えられる。

$$\frac{\pm 1 \text{ カウント誤差}}{N} = \pm (t_c) / \tau \quad \dots\dots(40)$$

信号の S/N (信号/雑音) が良く、トリガ誤差を無視できる場合、タイムベースの影響が現れるまでは、±1カウント誤差によりカウンタの測定確度が決まる。39, 40式を比較するとわかるように、周期測定ではク



第13図 周波数測定と周期測定の分解能の比較。タイムベース 10 MHz, 測定時間 τ = 1 s としている。

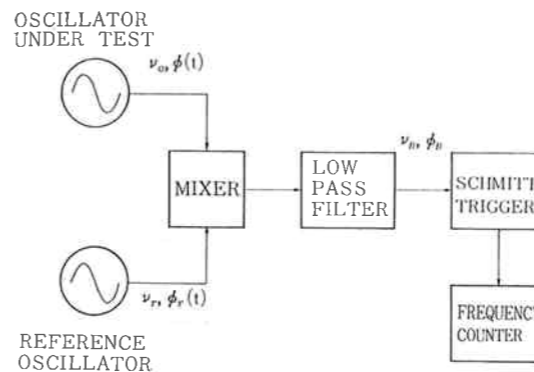
ックパルスの1周期が±1カウントの要因であるのに対し、周波数測定では入力信号がクロックパルスの役割をしており、入力信号の1周期が±1カウント誤差を与えている。第13図に、τ = 1 s, タイムベース 10 MHz, すなわち、t<sub>c</sub> = 0.1 μs のときの周期測定、周波数測定の測定分解能を示す。この図にあるように周期測定では入力信号の周波数によらず測定分解能は一定で、また、入力信号の周波数がタイムベース周波数より低い場合は、常に周期測定の方が周波数測定より分解能が高い。

周期測定の方が分解能が高いことから、IC 技術の発展とともに周期測定をして周波数表示をするカウンタ (レシプロカルカウンタと呼ばれている) が主流となってきている。このため以下に述べる周波数安定度の測定では、常に周期測定により周波数を求めている。また、特別な技術により±1カウント誤差を除去したカウンタも市販されている。

II.1 で述べられているように、σ<sub>y</sub>(τ) を計算する際、測定の空き時間は常に考慮しておく必要があるが、カウンタでは第10図(a), 11図(a), 12図に示されている測定の終了の後、次の測定が開始するまでに必ず空き時間がある。

3.3 ビート法<sup>(2) (13)</sup>

ビート法は σ<sub>y</sub> 測定の精度を高める最も簡便な方法である。第14図にそのブロック図を示す。供試発振器の公称周波数、位相変動分をそれぞれ ν<sub>0</sub>, φ(t), 基準発振器の公称周波数、位相変動分をそれぞれ ν<sub>r</sub>, φ<sub>r</sub>(t) とする。ν<sub>0</sub> > ν<sub>r</sub> とするとビート信号の周波数 ν<sub>B</sub> 及び位相変動分 φ<sub>B</sub>(t) は、



第14図 ビート法のブロック図。シュミットトリガはカウンタのトリガ誤差を避けるために挿入している。

$$\nu_B = \nu_0 - \nu_r$$

$$\phi_B(t) = \phi(t) - \phi_r(t) \quad \dots\dots(41)$$

となる。ただし、ν<sub>B</sub> ≪ ν<sub>0</sub> とする。定義によりビート信号の規格化周波数変動分 y<sub>B</sub>(t) は、次式で与えられる。

$$y_B(t) = \frac{\dot{\phi}_B(t)}{2\pi\nu_B}$$

$$\div \frac{\nu_0}{\nu_B} [y(t) - y_r(t)] \quad \dots\dots(42)$$

ただし、

$$y(t) = \frac{\dot{\phi}(t)}{2\pi\nu_0}, \quad y_r(t) = \frac{\dot{\phi}_r(t)}{2\pi\nu_r} \div \frac{\dot{\phi}_r(t)}{2\pi\nu_0}$$

は、それぞれ供試、基準発振器の規格化周波数変動分である。(42)式は、ビート法により周波数測定精度が ν<sub>0</sub>/ν<sub>B</sub> だけ改善されることを示している。y(t) と y<sub>r</sub>(t) は独立であるので(42)式から、

$$\sigma_{y_B}^2(\tau) = \left(\frac{\nu_0}{\nu_B}\right)^2 [\sigma_y^2(\tau) + \sigma_{y_r}^2(\tau)] \quad \dots\dots(43)$$

となる。2.2 と同様に、

(i) σ<sub>y</sub>(τ) ≫ σ<sub>y<sub>r</sub></sub>(τ) のとき、

$$\sigma_{y_B}(\tau) = \frac{\nu_B}{\nu_0} \sigma_{y_B}(\tau) \quad \dots\dots(44)$$

(ii) σ<sub>y</sub>(τ) ≃ σ<sub>y<sub>r</sub></sub>(τ) のとき、

$$\sigma_{y_B}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\nu_B}{\nu_0} \sigma_{y_B}(\tau) \quad \dots\dots(45)$$

となり σ<sub>y<sub>B</sub></sub>(τ) を測定することにより σ<sub>y</sub>(τ) を求めることができる。

ビート法の測定精度は大変優れており、現在あるほとんどの発振器の σ<sub>y</sub>(τ) を測定できる。この方式の欠点は、τ の短い領域での測定が困難なことと、空き時間が大きくなることである。例えば、5 MHz 高品位水晶発

振器では 1 Hz 以上周波数を離調することが難しい。一方、周波数カウンタの測定時間は、入力信号の1周期以上となるので、τ の下限は 1/ν<sub>B</sub> となる。したがって、いまの例では τ > 1 s における σ<sub>y</sub> しか測定できないことになる。ただし、II.1 第13図にあるように両方の信号を逡倍したり、逡倍後周波数合成器の信号と混合すると任意の ν<sub>B</sub> を設定できる。しかし、この場合、4. で述べるように逡倍器や周波数合成器の付加位相雑音が元の信号純度を劣化させる可能性があるので注意を要する。また、周波数カウンタでは、信号処理 (data sequence) において入力信号の1周期以上の空き時間があるので、データ処理には注意を要する。

3.4 位相ロッキングを利用した計測法<sup>(3)</sup>

この方式は、2.3 で述べた PLL でループバンド幅を大きくし、ループバンド幅内の周波数成分をもつ信号を取り出し周波数安定度を測定するものである。この方式は τ ≧ 1 s の測定に適しており、空き時間をほとんど無視できること、測定バンド幅を容易に変えられる点に特徴がある。

(45)式で F(s) = 1 とする1次ループは、可変できる変数がループ利得 (μK<sub>0</sub>K<sub>d</sub>) しかないので通常それほど用いられないが<sup>(4)</sup>、周波数安定度測定の際は、ループバンド幅を大きくする目的で、F(s) = 1 としている。よって、(45)式より、

$$V_X(s) = \frac{\mu K_d s}{s + \mu K_0 K_d} [\phi(s) - \phi_r(s)] \quad \dots\dots(46)$$

である。|s| ≪ μK<sub>0</sub>K<sub>d</sub> に対しては、

$$V_X(s) = K_0^{-1} s [\phi(s) - \phi_r(s)] \quad \dots\dots(47)$$

時間表示で表すと、

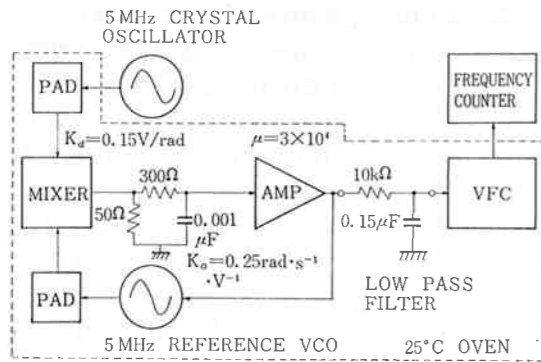
$$V_X(t) = 2\pi\nu_0 K_0^{-1} [y(t) - y_r(t)] \quad \dots\dots(48)$$

となる。y(t), y<sub>r</sub>(t) はそれぞれ、供試発振器、基準発振器の規格化周波数変動分である。(49)式の場合 V<sub>X</sub>(t) は位相変動に比例しているが、(48)式では周波数変動に比例している。したがってこの場合、PLL は周波数弁別器として動作している。y(t) と y<sub>r</sub>(t) は独立なので(48)式より

$$\sigma_{y^2}(\tau) + \sigma_{y_r^2}(\tau) = \left(\frac{K_0}{2\pi\nu_0}\right)^2 \sigma_{V_X^2}(\tau) \quad \dots\dots(49)$$

となり、σ<sub>V<sub>X</sub></sub>(τ) を測定することにより σ<sub>y</sub>(τ) を求めることができる。V<sub>X</sub> の変動は、電圧一周波数変換器 (VFC) で周波数に変換し、周波数カウンタで測定される。このため、V<sub>X</sub>(t) の測定値はやはり(48)式にあるように周波数変動分の τ 秒平均値に比例している。

この方式で ~10<sup>-14</sup> の測定精度を得ることはそれほど難しくない。第15図に当研究室での測定系を示す<sup>(17)</sup>。



第15図 PLLを利用した周波数安定測定システム。温度による影響を避けるため、ここでは基準VCO及び測定系を恒温槽に収納している。

ここで用いている 5 MHz 電圧制御水晶発振器では、 $K_0/2\pi\nu_0 \approx 8 \times 10^{-9} [V^{-1}]$  である。したがって、 $\sim 10^{-14}$  の測定精度を得るには VFC の安定度が  $\sim 10^{-6}$  であることが要求される。VFC (HP 2212 B 使用) 内蔵の較正電圧を入力として等価的周波数変動を測定した結果、 $\tau = 40 \text{ ms}$  で  $\sigma_y(\tau) = 4 \times 10^{-14}$ 、 $\tau$  の大きいところ (ただし 90 s 以下) では  $\sigma_y(\tau) = 1 \times 10^{-14}$  と十分な精度が得られている<sup>(1)</sup>。

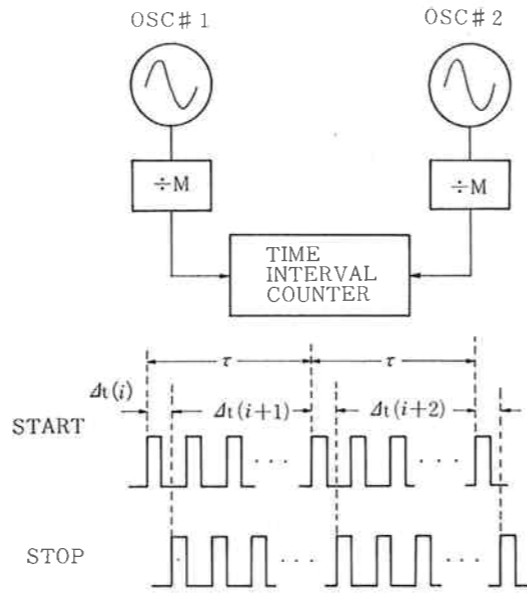
$F(s) = 1$  の PLL は原理上無条件に安定であるが、実際はループ内の素子が周波数特性を有しているためループバンド幅 (この場合ループ利得に等しい) を無制限に大きくできない。このため、この方式では  $\tau \geq 1 \text{ s}$  の領域での測定が妥当である。第15図の VFC はフルスケールで 100 kHz (1V フルスケールのレンジを使用) のパルスが出る。また、この VFC の応答時間は 100  $\mu\text{s}$ 、使用した周波数カウンタの空き時間は 3 ms 程度であるので、 $\tau \geq 1 \text{ s}$  では空き時間を無視できる。測定バンド幅は VFC の前段にある RC フィルタで容易に可変できる。

この PLL では、ループバンド幅を大きく設計しているので “very tight phase-lock” と呼ばれている。

3.5 時間差法<sup>(1)(13)</sup>

この測定法は、 $\text{Eq. (1)}$  で  $\tau$  を 1 日のように長くして測定精度を上げているもので、長期安定度が重要となる発振器 (例えば時計) の安定度測定に適している。

第16図に示すように、周波数の等しい 2 台の発振器 OSC #1, OSC #2 の出力を M 分周して両パルス (例えば秒パルス) の時間間隔  $\Delta t(i)$  を T.I. カウンタで  $\tau$  秒ごとに測定する。ここで分周しているのは測定精度には直接関係せず、2 台の発振器のわずかな周波数差によって両分周信号の位相差が 1 サイクル以上ずれるのを防ぐためである。T.I. カウンタはカウンタ内蔵のクロッ



第16図 T.I. 測定による周波数安定度の測定法

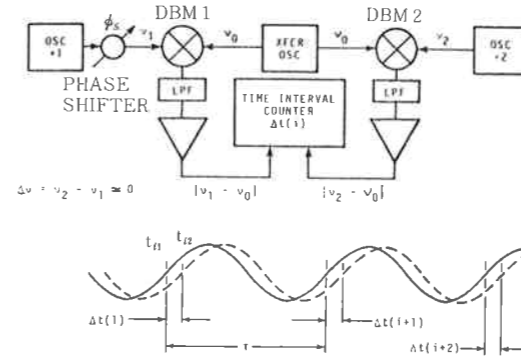
クパルスより短い時間間隔は測定できないので、この意味においても分周信号の位相差が 1 サイクル以上変化するのは都合が悪い。このため、3.1 で述べたように時間差測定による周波数測定では 2 台の発振器の周波数が等しくなければいけない。

いま、 $\tau = 8.6 \times 10^4 \text{ s}$  (1 日) とし、T.I. カウンタの測定精度が 0.1  $\mu\text{s}$  とすると  $\text{Eq. (1)}$  より  $\bar{y}_{1,2,k}$  の測定精度は  $1.2 \times 10^{-12}$  となる。当所では測定精度 100 ps の T.I. カウンタにより Cs 標準器からの秒パルスを毎日測定し、同標準器の時間変動を監視している。このときの  $\bar{y}_{1,2,k}$  の測定精度は  $1.2 \times 10^{-15}$  となり、Cs 標準器のルーチン測定には十分な精度である。

ただし、この測定では分周器の jitter による位相ゆらぎが十分小さくなるように注意しなければならない。

3.6 Dual Mixer Time Difference (DMTD)<sup>(14)(15)</sup> 法

この方式は比較的最近 NBS で開発されたもので、3.1 で述べている第 2 の時間差測定による周波数測定法を高精度化し、短期安定度の測定にまで拡張した点に特徴がある。第17図にそのブロック図を示す。このような考えによる測定精度の改善は古くから行われていて<sup>(2)</sup>、当所でも TV カラーサブキャリアの位相比較や 100 ps の測定精度をもつ T.I. カウンタの普及以前の Cs 時計データ集録装置に採用されていたが<sup>(1)</sup>、いずれも位相計と組み合わせて長期の周波数及び周波数安定度測定に利用されている。



第17図 DMTD 法のブロック図。XFER OSC は共通発振器、LPF は低域通過フィルタをそれぞれ示す。LPF により測定帯域幅が決定される。文献(14)より引用。

1 対の発振器を時計として動作させ、その時間差を T.I. カウンタで測定する方法については、前節にその例を挙げているが、現在得られる最高機種のカウンタでも測定精度が 100 ps 程度であるため、短期安定度の測定には十分な精度が得られない。しかし、DMTD 法では、0.1 ps の精度を有しており、更に 0.01 ps の精度に達する可能性を有している。このため、 $\tau \geq \sim \text{ms}$  の領域で空き時間なしに高精度の周波数安定度測定ができる。

第17図で OSC #1 を供試発振器、OSC #2 を基準発振器とする。OSC #1, #2 の出力は、それぞれ DBM で希望の周波数だけ OSC #1, #2 からずれている周波数を有する共通発振器と混合され、ほぼ同じ周波数を有しているビート信号を発生する。

いま、

$$\text{OSC \#1 の瞬時位相を } 2\pi\nu_1 t + \phi_1(t)$$

$$\text{OSC \#2 の瞬時位相を } 2\pi\nu_2 t + \phi_2(t)$$

$$\text{共通発振器の瞬時位相を } 2\pi\nu_c t$$

とする。共通発振器の位相ゆらぎは、以下に述べるように相殺されるものとして無視してある。また、 $\nu_1 \approx \nu_2 = \nu_0$  とする。DBM からの低周波信号の瞬時位相は  $\nu_0 > \nu_c$  とすると

$$\text{DBM 1 の出力 } 2\pi(\nu_1 - \nu_c)t + \phi_1(t) + \phi_s$$

$$\text{DBM 2 の出力 } 2\pi(\nu_2 - \nu_c)t + \phi_2(t)$$

で支えられる。 $\phi_s$  は移相器の位相である。 $\phi_s$  を適当に調整することにより、共通発振器の雑音が相殺されるような状態を作ることができる。この移相器は、共通発振器が十分低雑音である場合は必要ない。図にあるように、DBM 1 の出力の  $i$  番目の零交差点の時間  $t_{i1}$  は、

$$t_{i1} = \frac{-\phi_1(t_{i1}) + \phi_s + 2n_1\pi}{2\pi(\nu_1 - \nu_c)} \div \frac{-\phi_1(t_{i1}) + \phi_s + 2n_1\pi}{2\pi\nu_B} \dots\dots(50)$$

DBM 2 の出力の零交差点  $t_{i2}$  は、

$$t_{i2} = \frac{-\phi_2(t_{i2}) + 2n_2\pi}{2\pi(\nu_2 - \nu_c)} \div \frac{-\phi_2(t_{i2}) + 2n_2\pi}{2\pi\nu_B} \dots\dots(51)$$

となる。ただし、 $\nu_B$  はビート周波数で、

$$\nu_B = \nu_0 - \nu_c$$

また、 $n_1, n_2$  は整数である。

(50), (51)式より、 $i$  番目の時間差  $\Delta t(i)$  は、

$$\Delta t(i) = t_{i2} - t_{i1} = \frac{\phi_1(t_{i1}) - \phi_2(t_{i2}) - \phi_s + 2n\pi}{2\pi\nu_B} \dots\dots(52)$$

$$n = n_2 - n_1$$

となる。ただしここでは T.I. カウンタを DBM 1 出力がスタートさせ、DBM 2 出力がストップさせているものとしている。したがって、OSC #1 と #2 の  $i$  番目の測定時の時間差  $\Delta_{1,2}X(i)$  は、

$$\Delta_{1,2}X(i) = \frac{\phi_1(t_{i1})}{2\pi\nu_1} - \frac{\phi_2(t_{i2})}{2\pi\nu_2} \div \frac{\phi_1(t_{i1}) - \phi_2(t_{i2})}{2\pi\nu_0} = \frac{\nu_B}{\nu_0} \Delta t(i) - \frac{\phi_s}{2\pi\nu_0} + \frac{n}{\nu_0} \dots\dots(53)$$

$$= \frac{\Delta t(i)}{\tau\nu_0} - \frac{\phi_s}{2\pi\nu_0} + \frac{n}{\nu_0} \dots\dots(54)$$

となる。ここで  $\tau$  はビート信号の周期である。(53)式は時間差の測定精度が  $\nu_0/\nu_B$  だけ改善されていることを示している。 $n$  は絶対時間差を知るときだけ必要である。一連の測定中に二つのビート信号が 1 サイクル以上ずれなときは、周波数、周波数安定度、時間ゆらぎの測定には、 $n$  を 0 としてよい。

$\bar{y}_{1,2}(i, \tau)$  を OSC #1, #2 の規格化された周波数変動分の  $\tau$  秒平均  $\bar{y}_1(i, \tau), \bar{y}_2(i, \tau)$  の差とすると、

$$\bar{y}_{1,2}(i, \tau) = \bar{y}_1(i, \tau) - \bar{y}_2(i, \tau) = \frac{\Delta_{1,2}X(i+1) - \Delta_{1,2}X(i)}{\tau} = \frac{\Delta t(i+1) - \Delta t(i)}{\nu_0 \tau^2} \dots\dots(55)$$

となる。 $\tau$  の整数倍のサンプル時間の規格周波数変動は次式で与えられる。

$$\bar{y}_{1,2}(i, m\tau) = \frac{\Delta_{1,2}X(i+m) - \Delta_{1,2}X(i)}{m\tau} \dots\dots(56)$$

ただし、 $m$  は正の整数である。

OSC #1 と #2 は独立であるので、(55)式から

$$\sigma_{\bar{y}_{1,2}}^2 = \sigma_{\bar{y}_1}^2(\tau) + \sigma_{\bar{y}_2}^2(\tau)$$

$$= \frac{1}{2} \langle [\bar{y}_{12}(i+1, \tau) - \bar{y}_{12}(i, \tau)]^2 \rangle$$

$$= \frac{1}{2\nu_B^2 \tau^4} \langle [A(i+1) - A(i)]^2 \rangle \dots\dots(57)$$

となる。ただし、

$$A(i) = \Delta t(i+1) - \Delta t(i) \dots\dots(58)$$

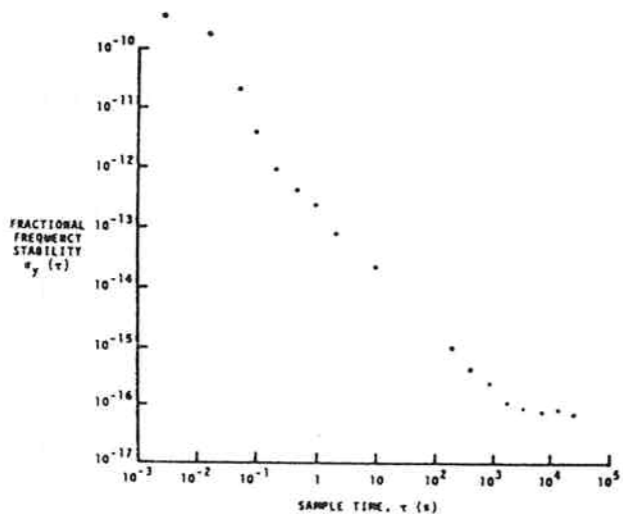
である。

この測定法では、共通発振器の周波数を変えて  $\nu_B$  を大きくすると、 $\tau$  が  $\sim$ ms のような短いサンプル時間からの測定ができる。また、セシウム、ルビジウム、水素メーザのような原子標準では周波数をあまり可変できないので、前節で述べたビート法では測定が難しいが、この方式は原子標準のような周波数の同じ発振器の測定には極めて有効である。

DMTD 法は、現在ある最も高安定の発振器の安定度を測定するのに十分精度を有している。例えば、5 MHz 発振器で  $\nu_B = 0.5$  Hz とし、T.I. カウンタの精度を 0.1  $\mu$ s とすると、 $\tau = \nu_B^{-1} = 2$  s に対して測定精度は  $10^{-14}$  となる。

共通発振器が周波数合成器の場合、 $\tau$  を自由に變えることができる。しかし、満足すべき測定精度を得るためには、周波数合成器は十分低雑音である必要がある。第 17 図で、同一発振器の信号を分割して、OSC #1, #2 の入力に置き換えるとシステム雑音を測定できる。第 18 図に、NBS で測定された低雑音周波数合成器を共通発振器として使用した場合のシステム雑音を示す。

DMTD 法は、他の方式に比較するとシステムが複雑



第 18 図 DMTD 法のシステム雑音。共通発振器として周波数合成器を使用している。最初の 3 点の測定帯域幅 ( $f_h$ ) は 300 Hz, 次の 2 点では 18 Hz, 次の 1 点では、3 Hz で、残りは  $f_h = 1.8$  Hz である。  $\sim 10^{-17}$  の noise floor は毎日の温度変動によるものと思われる。文献 (15) より引用

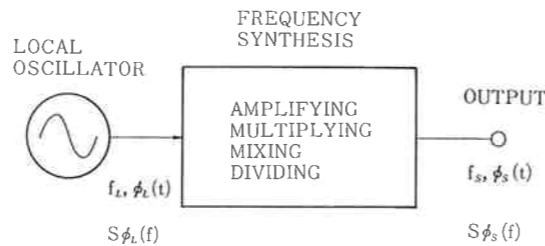
である。低周波ビート信号が含まれているため、グランドループの問題に注意する必要がある。これらの問題を避けるため絶縁トランスや緩衝増幅器が使われているが、詳しい設計については文献(16)を参照されたい。

4. 信号処理による付加雑音

これまで述べてきたように、周波数安定度測定精度を高めるため被測定発振器と基準発振器の周波数を同一にすることが多い。このため増幅、混合、周波数通倍、分周等の信号処理によって周波数変換することがしばしばある。第 19 図にそのブロック図を示す。周波数変換前の信号の公称周波数、位相変動分を  $f_L, \phi_L(t)$ , 変換後の公称周波数、位相変動分を  $f_s, \phi_s(t)$  とすると、出力信号の位相パワースペクトラム密度  $S\phi_s(f)$  は一般に、

$$S\phi_s(f) = \left(\frac{f_s}{f_L}\right)^2 S\phi_L(f) + S\phi_f(f) \dots\dots(59)$$

となる。ここで  $\phi$  は信号処理の過程で生じる付加位相



第 19 図 周波数変換による付加位相雑音

雑音である。  $S\phi_f(f)$  は、一般にフリッカ ( $f^{-1}$ ) と白色 ( $f^0$ ) 雑音成分を含んでおり、短期安定度を劣化させる。

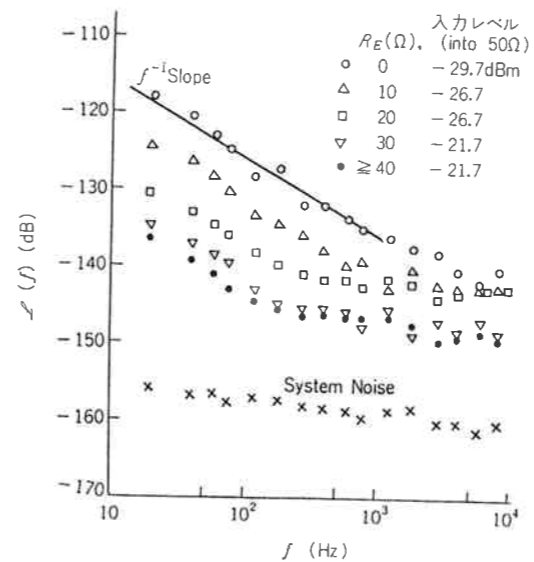
ここでは増幅器と周波数通倍器の付加位相雑音について簡単に説明する。

4.1 増幅器の付加位相雑音

増幅器は周波数安定度を測定するときの緩衝増幅器として、あるいは周波数合成等における同調増幅器、緩衝増幅器として極めて頻りに使用される。これらの場合は通常、付加的に  $f^{-1}$  と  $f^0$  PM (位相) 雑音に加わり、元の信号の位相スペクトラムを劣化させる。一方、増幅器が線形帰還発振器のループ内に使われる場合は、増幅器の  $f^{-1}, f^0$  PM 雑音レベルと、帰還フィルタの Q 値で発振器の PM 雑音が決まる<sup>(18)(19)</sup>。したがって低位相雑音増幅器の設計は極めて重要である。

増幅器で発生する  $f^0$  PM 雑音は、能動素子の雑音と RF 駆動電力によって決まるため、通常初段の増幅器を低雑音化すればよい。

$f^{-1}$  PM 雑音について、その発生機構を解析した例は少ない。著者らはトランジスタ増幅器の  $f^{-1}$  PM 雑音は、トランジスタ個々の  $f^{-1}$  雑音によるパラメータ変調の結果生じるとして解析を行い、(i)  $f^{-1}$  PM 雑音は、トランジスタ個々の  $f^{-1}$  雑音と電気的特性から計算できること、(ii) エミッタ抵抗の負帰還による  $f^{-1}$  PM 雑音の改善には限度があること、(iii)  $f^{-1}$  PM 雑音は入力信号レベルに依存しないことを明らかにし、実験との比較を行った<sup>(20)</sup>。第 20 図は、エミッタ接地 5 MHz 同調増幅器における  $f^{-1}$  PM 雑音の負帰還による改善を示して



第 20 図  $f^{-1}$  PM 雑音の負帰還による改善<sup>(20)</sup>。使用トランジスタ, 2SC31

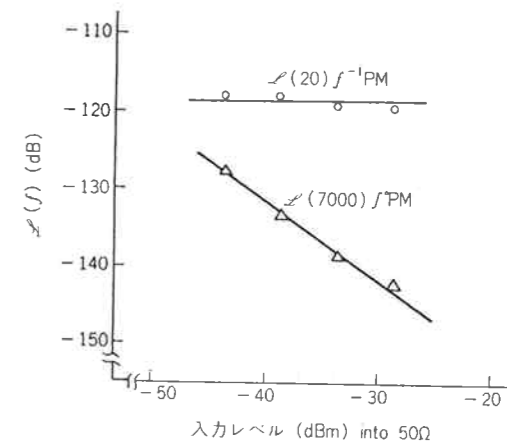
いる。  $R_E$  はエミッタ抵抗、また、使用トランジスタは 2SC31 である。  $R_E = 40 \Omega$  で約 18 dB 改善されている。同図で、  $R_E \geq 30 \Omega$  における入力レベルが増加しているが、次図にあるように入力レベルの変化は  $f^{-1}$  PM 雑音に影響を及ぼさない。第 21 図に、同じ増幅器における  $f^0, f^{-1}$  PM 雑音の入力レベル依存性を示す。  $I_E, V_{cb}$  はそれぞれエミッタ電流、コレクタベース間電圧である。  $f^{-1}$  PM 雑音は入力レベルを 15 dB 変化させても一定である。  $f^{-1}$  PM 雑音はこのように入力信号レベルに依存しないため、増幅器を多段接続するときはその段数に比例して増加することになるので注意が必要である。

4.2 周波数通倍器の付加位相雑音

通倍器の低位相雑音化は、周波数安定度の精度向上のため<sup>(21)</sup>、セシウム標準器の精度向上のため<sup>(21)</sup>、更に光周波数測定において高次の通倍次数を得るため等<sup>(22)</sup>、種々の分野で大変重要な役割を担っている。通倍器の位相雑音スペクトラムは通倍次数の二乗に比例して増加するので、高次の通倍では初段の通倍器の低雑音化が大切である。

通倍器の位相雑音の解析はいろいろ行われているが<sup>(23)(24)</sup>、ほとんどが狭帯域雑音モデルにより  $f^0$  PM 雑音の発生機構を扱っている。  $f^{-1}$  PM 雑音に関しての理論的検討はほとんどなされていないのが現状であるが、D. Halford らはトランジスタ通倍器では、増幅器の場合と同様にエミッタ抵抗による負帰還のみが  $f^{-1}$  PM 雑音を軽減できることを予測し、典型的には 30 dB 以上  $f^{-1}$  PM 雑音を改善できたことを報告している<sup>(25)</sup>。5 MHz  $\rightarrow$  10 MHz トランジスタ通倍器の帰還抵抗依存性は、文献(6)に与えられている。

文献(26)では、リミッタとして動作するエミッタ結合電



第 21 図 2SC31 ( $I_E = 3$  mA,  $V_{cb} = 11$  V,  $R_E = 0$ ) PM 雑音の入力レベル依存性<sup>(20)</sup>

流スイッチによる 1 MHz→35 MHz 通倍器を試作し、入力換算の  $S_{\phi}(f)$  が、

$$S_{\phi}(f) = 10^{-17.1} + 10^{-14.4} f^{-1} \quad [\text{rad}^2/\text{Hz}]$$

という大変優れた結果を得ている。この通倍器は、位相の情報は零交差点に含まれているので、入力信号の零交差点が通倍器の出力信号の位相においても密接に保たれているような通倍器は、低位相雑音であるはずであるという予測のもとに設計されている。

文献<sup>27</sup>では、トランジスタ、バラクタ、ステップリカバリダイオードを非直線素子とする通倍器のそれぞれについて、AM-PM 変換係数を測定している。そして、C 級動作トランジスタ増幅器を变形した 25 MHz-125 MHz 通倍器を試作し、良好な結果を得ている<sup>(22)</sup>。

通倍器の温度等による長期の位相変動は、文献<sup>(28)</sup>、<sup>(29)</sup>で検討されている。

## 5. ま と め

周波数と時間の精密計測はほとんどの場合周波数安定度の測定に還元される。ここでは周波数領域、時間領域における比較的良好に利用されている周波数安定度測定法について述べた。また、信号処理によって発生する付加雑音の例として増幅器、周波数通倍器をとりあげ、位相雑音の発生機構を簡単に説明し、低雑音化に必要と思われる文献を紹介した。

周波数安定度測定では、実際に測定している量は何であるかということをはっきりと、測定原理についてはなるべくわかりやすいように書いたつもりである。また、これらの測定法は主として周波数標準の安定度を測定するために開発されてきたものなので、扱っている周波数は 5 MHz が中心となっているが、DBM 等の構成要素を変更すれば同じ測定法を他の周波数帯にも容易に拡張できよう。

原子周波数標準器をはじめとする高確度、高安定信号源は通信、測地、航法、物理現象の解明等広い分野において利用されているが、周波数・時間の精密計測法はこれら高確度、高安定信号源の開発、維持、利用に欠かせぬ重要な技術であり今後その重要性は増すものと思われる。

最後に、本報告をまとめるにあたり有益な討論をしていただいた当研究所の吉村室長、安田部長、佐藤係長に感謝いたします。

## 参 考 文 献

(1) 安田, 松田; “周波数安定度の測定”, 電気学会技術報告(Ⅱ部) 第 41 号, 周波数安定度とその測定, pp. 54-120, 昭 51-2.

(2) Cutler, L. S. and Searle, C. L.; “Some aspects of the theory and measurement of frequency fluctuation in frequency standards”, Proc. IEEE, **54**, 2, pp. 136-154, Feb. 1966.  
 (3) Shoaf, J. H., Halford, D. and Risely, A. S.; “Frequency stability specification and measurement: high frequency and microwave signals”, NBS Tech. Note 632, Jan. 1973.  
 (4) Gardner, F. M., Phaselock Techniques, John Wiley & Sons, Inc. New York 1966.  
 (5) Walls, F. L. and Stein, S. R.; “Servo techniques in oscillators and measurement systems”, NBS Tech. Note 692, Dec. 1976.  
 (6) Andersen, S. G. and Nesheim, J. K.; “Phase noise of various frequency doublers”, IEEE Trans. Instrum. Meas., **IM-22**, 2, pp. 185-188, June 1973.  
 (7) Kartaschoff, P., Frequency and time, Academic Press, New York, 1978.  
 (8) Walls, F. L., Stein, S. R., Gray, J. E. and Glaze, D. J.; “Design considerations in state-of-the-art signal processing and phase noise measurement systems”, Proc. 30th Annu. Symp. Frequency Control, pp. 269-274, June 1976.  
 (9) Brendel, R., Marianneau, G. and Uebersfeld, J.; “Phase and amplitude modulation effects in a phase detector using an incorrectly balanced mixer”, IEEE Trans. Instrum. Meas., **IM-26**, 2, pp. 98-102, June 1977.  
 (10) 森川, 吉村; “システム位相雑音測定に及ぼす信号源雑音の影響”, 電波季, **23**, 122, pp. 1-8, March 1977.  
 (11) Meyer, D. G.; “A test set for the accurate measurement of phase noise on high-quality signal sources”, IEEE Trans. Instrum. Meas., **IM-19**, 4, pp. 215-227, Nov. 1970.  
 (12) 河野; “エレクトロニク・カウンタの基礎”, (電子雑誌) エレクトロニクス, 昭 54 年 7 月号付録.  
 (13) How, D. A., Allan, D. W. and Barnes, J. A.; “Properties of signal sources and measurement methods”, Proc. 35th Annu. Symp. Frequency Control, pp. A1-A44, May 1981.  
 (14) Allan, D. W.; “The measurement of frequency and frequency stability of precision oscillators”, NBS Tech. Note 669, May 1975.  
 (15) Allan, D. W. and Daams, H.; “Picosecond

time difference measurement system”, Proc. 29th Annu. Symp. Frequency Control, pp. 404-411, May 1975.  
 (16) Allan D. W.; “Report on NBS dual mixer time difference system (DMTD) built for time-domain measurements associated with phase 1 of GPS” NBSIR 75-827, Jan. 1976.  
 (17) 安田, 小宮山, 梅津; “ゼロビート法による周波数安定度の測定”, 昭 49 中国支部学連大, 講演番号 42115.  
 (18) Leeson, D. B.; “A simple model of feedback oscillator noise spectrum”, Proc. IEEE, **54**, pp. 329-330, Feb. 1966.  
 (19) Sauvage, G.; “Phase noise in oscillators: A mathematical analysis of Leeson's model”, IEEE Trans. Instrum. Meas. **IM-26**, 4, pp. 408-410, Dec. 1977.  
 (20) 小宮山, 安田; “高安定信号源とフリッカ位相雑音”, 信学論(B), 60-B, 3, pp. 197-204, 昭 52-03.  
 (21) Glaze, D. J.; “Improvements in atomic cesium beam frequency standards at the National Bureau of Standards” IEEE Trans. Instrum. Meas. **IM-19**, 3, pp. 156-160, Aug. 1970.  
 (22) Marchi, A. D., Godone, A. and Bava, E.; “Phase-coherent synthesis and precision frequency measurements in the far infrared”, IEEE Trans. Instrum. Meas. **IM-30**, 2, pp. 132-138, June 1981.  
 (23) Blerkom, R. V. and Anema, J.; “Consideration

for the short term stability of frequency multipliers”, IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. **AES-2**, 1, pp. 36-47, Jan. 1966.  
 (24) Walls, F. L. and Marchi, A. D.; “RF spectrum of a signal after frequency multiplication: Measurement and Comparison with a simple calculation”, IEEE Trans. Instrum. Meas. **IM-24**, 3, pp. 210-217, Sept. 1975.  
 (25) Halford, D., Wainwright, A. E. and Barnes, J. A.; “Flicker noise of phase in RF amplifiers and frequency multipliers: characterization, cause, and cure”, Proc. 22nd Annu. Symp. Frequency Control, pp. 340-341, 1968.  
 (26) Baugh, R.; “Low noise frequency multiplication”, Proc. 26th Annu. Symp. Frequency Control, pp. 50-54, 1972.  
 (27) Bava, E., Bava, G. P., Marchi, A. D. and Godone, A.; “Measurement of static AM-PM conversion in frequency multipliers”, IEEE Trans. Instrum. Meas. **IM-26**, 1, pp. 33-38, March 1977.  
 (28) Saburi, Y., Yasuda, Y. and Harada, K.; “Phase variations in the frequency multipliers”, J. Radio Res. Labs., **10**, 48, pp. 137-175, Mar. 1963.  
 (29) 吉村, 宇都宮; “可変容量ダイオードを用いた周波数通倍器の位相変動の改善”, 信学誌, **50**, 3, pp. 409-415, 昭 42-03.

### 3. 周波数・時間計測における相対論効果

佐分利 義 和\*

#### 1. ま え が き

原子時計の性能は、正確さではセシウム・ビーム標準器により  $1 \times 10^{-13}$  以上、一方、短期安定度としては、水素メーザにより  $10^{-15}$  台に達し、今後の新方式標準器、例えばイオン・ストレージ形あるいはレーザー光によるポンピング及び光検出のビーム標準器では、更に2けた程度の向上も予測されている。

一方、原子時計の利用も各種科学分野に広まり、世界各地はもとより、航空機、更に衛星搭載へと、使用条件が空間的に広がり、かつ静止から運動を伴うようになった。更に、これらの利用においては、時計間の精密同期を 1 ns 又はそれ以上の精度でとりたいという要望もでてきている。

このように高精度かつ広域での時間計測が必要となってきた現在では、空間全域にわたって通用する時間、すなわち、絶対時間という古典的概念あるいは近似では済まされないことになった。時間と空間を含めた四次元座標の時空の考え方による相対性理論の効果を単に概念としてではなく実用面で考慮し、補正しなくては、測定に矛盾を生ずることになる。

幸い、地球近傍での重力場は弱く、かつ対象とする速度も遅いので、重力ポテンシャル効果、二次ドップラ効果及び回転効果の三つについて、現状では十分な精度で補正することができる。以下、これらの効果に必要な概念、補正式及び実験結果の概要を述べることにする。

#### 2. 相対論効果の概念

1905年アインシュタインが“運動物体の電気力学”と題した論文、すなわち、特殊相対論を示したことにより、空間的に離れた2点での事象の同時性は座標系、すなわち、観測者によって異なる相対的なものであることが明らかにされた。このことは慣性座標系、すなわち、外力のない等速直線運動の場合について述べられたが、その後1916年には重力場の導入、したがって加速度運動も含めて一般化され、いわゆる一般相対性理論が示されて四次元時空の概念が確立され、絶対時間(長さも同じく)の概念は否定されたわけである。

相対論は物理的思想の性格からいっても、更にそこで

\*総合研究官

使われる数学からいってもかなり複雑なものであり、これらを本稿で示すことは、種々の面から不可能なことである。一般相対性理論が示されて以来、理論の訂正もほとんどなく60数年を経過しており、この間に多くの参考書、また、相対論効果には、いわゆる常識が通用しないことがあるため、数え切れぬ解説書、更に最近の宇宙への関心の広がりのためにSF的なものも多く見られる。したがって、深く知りたい方はこれらを参考していただくことにして、ここでは極めて簡単に時間、周波数計測に関係する事柄の初歩的なものを述べておきたい。

#### 2.1 特殊相対論効果

まず、特殊相対論においては、二つの公理、すなわち、(1)物理法則はどの慣性座標系においても同じ形に書かれる(相対性の原理)、(2)光速は光源の運動に無関係である(光速不変)が基本になっており、時間と空間とを一体化して扱う座標変換、すなわち、ローレンツ変換が導入されている。これは、一つの出来事を二つの系で観測した場合の観測値を結び付ける関係式である。いま簡単な例として、ある二つの系、S及びS'系があり、それぞれの四次元座標を  $(x, y, z, t)$  及び  $(x', y', z', t')$ 、空間座標は直角座標で、時刻  $t=t'=0$  では両座標原点は一致し、かつ対応する各軸は平行しているものとする。ここで、S'系がx方向にS系に対して速度vの等速直線運動をしているとすると、一つの出来事を二つの系から見た座標は次式で関係づけられる。まず、S系の座標からS'系への変換として、

$$\left. \begin{aligned} x' &= (x - vt) / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \\ y' &= y, \quad z' = z, \\ t' &= (t - vx/c^2) / \sqrt{1 - (v/c)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

の公式が、逆にS'系の座標からS系への変換としては、

$$\left. \begin{aligned} x &= (x' + vt') / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \\ y &= y', \quad z' = z, \\ t &= (t' + vx'/c^2) / \sqrt{1 - (v/c)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

となる。これらがローレンツ変換であり、運動方向の座標と同時に、時間の座標も変換されることが示されている。このような変換のために、以下の例のように日常の経験にはないようなことが現れることになる。

(1) 同時性 : 二つの地点での出来事の同時性、あるいは2地点に置かれた時計の同時刻の判定には、アイ

### 3. 周波数・時間計測における相対論効果

佐分利 義 和\*

#### 1. ま え が き

原子時計の性能は、正確さではセシウム・ビーム標準器により  $1 \times 10^{-13}$  以上、一方、短期安定度としては、水素メーザにより  $10^{-15}$  台に達し、今後の新方式標準器、例えばイオン・ストレージ形あるいはレーザー光によるポンピング及び光検出のビーム標準器では、更に2けた程度の向上も予測されている。

一方、原子時計の利用も各種科学分野に広まり、世界各地はもとより、航空機、更に衛星搭載へと、使用条件が空間的に広がり、かつ静止から運動を伴うようになった。更に、これらの利用においては、時計間の精密同期を 1 ns 又はそれ以上の精度でとりたいという要望もでてきている。

このように高精度かつ広域での時間計測が必要となってきた現在では、空間全域にわたって通用する時間、すなわち、絶対時間という古典的概念あるいは近似では済まされないことになった。時間と空間を含めた四次元座標の時空の考え方による相対性理論の効果を単に概念としてではなく実用面で考慮し、補正しなくては、測定に矛盾を生ずることになる。

幸い、地球近傍での重力場は弱く、かつ対象とする速度も遅いので、重力ポテンシャル効果、二次ドップラ効果及び回転効果の三つについて、現状では十分な精度で補正することができる。以下、これらの効果に必要な概念、補正式及び実験結果の概要を述べることにする。

#### 2. 相対論効果の概念

1905年アインシュタインが“運動物体の電気力学”と題した論文、すなわち、特殊相対論を示したことにより、空間的に離れた2点での事象の同時性は座標系、すなわち、観測者によって異なる相対的なものであることが明らかにされた。このことは慣性座標系、すなわち、外力のない等速直線運動の場合について述べられたが、その後1916年には重力場の導入、したがって加速度運動も含めて一般化され、いわゆる一般相対性理論が示されて四次元時空の概念が確立され、絶対時間（長さも同じく）の概念は否定されたわけである。

相対論は物理的思想の性格からいっても、更にそこで

\*総合研究官

使われる数学からいってもかなり複雑なものであり、これらを本稿で示すことは、種々の面から不可能なことである。一般相対性理論が示されて以来、理論の訂正もほとんどなく60数年を経過しており、この間に多くの参考書、また、相対論効果には、いわゆる常識が通用しないことがあるため、数え切れぬ解説書、更に最近の宇宙への関心の広がりのためにSF的なものも多く見られる。したがって、深く知りたい方はこれらを参考していただくことにして、ここでは極めて簡単に時間、周波数計測に関する事柄の初歩的なものを述べておきたい。

#### 2.1 特殊相対論効果

まず、特殊相対論においては、二つの公理、すなわち、(1)物理法則はどの慣性座標系においても同じ形に書かれる（相対性の原理）、(2)光速は光源の運動に無関係である（光速不変）が基本になっており、時間と空間とを一体化して扱う座標変換、すなわち、ローレンツ変換が導入されている。これは、一つの出来事を二つの系で観測した場合の観測値を結び付ける関係式である。いま簡単な例として、ある二つの系、S及びS'系があり、それぞれの四次元座標を  $(x, y, z, t)$  及び  $(x', y', z', t')$ 、空間座標は直角座標で、時刻  $t=t'=0$  では両座標原点は一致し、かつ対応する各軸は平行しているものとする。ここで、S'系がx方向にS系に対して速度vの等速直線運動をしているとすると、一つの出来事を二つの系から見た座標は次式で関係づけられる。まず、S系の座標からS'系への変換として、

$$\left. \begin{aligned} x' &= (x - vt) / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \\ y' &= y, \quad z' = z, \\ t' &= (t - vx/c^2) / \sqrt{1 - (v/c)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

の公式が、逆にS'系の座標からS系への変換としては、

$$\left. \begin{aligned} x &= (x' + vt') / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \\ y &= y, \quad z' = z, \\ t &= (t' + vx'/c^2) / \sqrt{1 - (v/c)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

となる。これらがローレンツ変換であり、運動方向の座標と同時に、時間の座標も変換されることが示されている。このような変換のために、以下の例のように日常の経験にはないようなことが現れることになる。

(1) 同時性 : 二つの地点での出来事の同時性、あるいは2地点に置かれた時計の同時刻の判定には、アイ

ンシュタインは光パルスを用いた測定を想定している。

上述の S' 系で二つの出来事が座標 (x', y', z', t') 及び (x'', y'', z'', t'') でそれぞれ起こったとすると、もし t'\_1 = t'\_2 = t' ならば二つの出来事は S' 系では同時である。しかし、これを S 系に静止している観測者から見ると、ローレンツ変換によって、

$$t_1 = (t' + vx'_1/c^2) / \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

$$t_2 = (t' + vx'_2/c^2) / \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

となり、その差は、

$$t_2 - t_1 = v(x'_2 - x'_1) / c^2 \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad \dots\dots(3)$$

となり、一般には t\_2 - t\_1 ≠ 0 で S 系では同時ではないことが明らかであり、同時性は座標を指定してのみ意味のあることがわかる。

(2) 運動時計の遅れ

S' 系の同一の場所 x'\_1 = x'\_2 = x' において二つの出来事がそれぞれ t'\_1, t'\_2 に起こった場合、S' 系の時間間隔は t'\_2 - t'\_1 となるが、これを S 系から見た場合、ローレンツ変換式によって、

$$t_2 - t_1 = (t'_2 - t'_1) / \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad \dots\dots(4)$$

となる。このことは、観測者から見て v なる速度で運動している時計は遅れることを示している。

(3) ドップラ効果

S 系での波動の位相が次式で、すなわち

$$\exp i(-\omega t + k_x x + k_y y + k_z z)$$

で示される時、これを S' 系で見ると、t 及び x にローレンツ変換を行い、次式となる。

$$\exp i \left[ \left\{ (-\omega + k_x v) / \sqrt{1 - (v/c)^2} \right\} t' + \left\{ (k_x - \omega v/c^2) / \sqrt{1 - (v/c)^2} \right\} x' + k_y y' + k_z z' \right]$$

この式から S' 系における角周波数 ω' は、

$$\omega' = (\omega - k_x v) / \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

となる。波数ベクトルを単位ベクトル n を用いて表すと、k = (ω/c)n となるので、S 系に対する S' 系の速度を v とおくと、一般式として次式が得られる。

$$\omega' = \omega \cdot \frac{1 - \frac{n \cdot v}{c}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \omega \cdot \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \dots\dots(2)$$

ここで θ は電磁波の進行方向と S' 系の運動方向の成す角で、方向が一致する場合には、縦ドップラ効果、

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad \dots\dots(6)$$

また、方向が直交する場合には、横ドップラ効果、

$$\omega' = \omega \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \dots\dots(7)$$

を生ずることになる。以上が周波数、時間計測に現れる特殊相対性理論の効果の主なものであり、このほか運動方向への長さの短縮なども同様に導かれるが、ここでは

省略する。

以上の説明で、時間は三つの空間座標とともに座標的な役割をし、座標系のとり方によって変化する相対的なものであることを示したが、これはある物体の運動を記述するために用いた座標系に結び付いた時間という意味で座標時 (coordinate time) と呼ばれる。しかし、物体に対して静止している座標系に結び付いた時間、言い換えると理想時計があり、これがたとえ運動しているとしても、その時計の示す時間があり、これを固有時 (proper time) と呼ぶ。この固有時は、物体内で起こるすべての物理過程が従うべき時間であって、どの座標系から観測したものであるかには関係のない不変量である。

前述の例と同じく、ある物体が座標系 S から見て v なる速度で x 方向に等速直線運動をしている場合に、この物体が静止しているような座標系 S' を考えると S' の座標時は物体の固有時と同じになる。いま、二つの出来事がこの物体に起こった場合を考え、それを S 座標で (x\_1, t\_1), (x\_2, t\_2) とすると、固有時 (τ) と S 座標の座標時 (t) の関係は既に述べたように次式で示される。

$$\tau_2 - \tau_1 = \sqrt{1 - (v/c)^2} \cdot (t_2 - t_1)$$

この式に、v = (x\_2 - x\_1) / (t\_2 - t\_1) の関係式を代入すると次式の表現が得られる。

$$(\tau_2 - \tau_1)^2 = (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 / c^2 \quad \dots\dots(8)$$

いま、座標系 S からの観測の代わりに、S に対して x 方向に u なる速度で動く座標系 S'' (t'', x'') からの観測を行うこととする。この場合 x\_1, x\_2 及び t\_1, t\_2 を(2)式の変換式を用いて x\_1'', x\_2'' 及び t\_1'', t\_2'' で表し、これを(8)式の右辺に代入すると、

$$(\tau_2 - \tau_1)^2 = (t_2'' - t_1'')^2 - (x_2'' - x_1'')^2 / c^2 \quad \dots\dots(9)$$

が得られ、固有時の間隔は、座標系を変えても、同一の式で表されることが示される。

以上の関係から、座標時の二つの時刻 t\_1 及び t\_2 の間に経過する物体の固有時の間隔は、物体が等速直線運動をしていない場合でも、次の積分で求めることができる。

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - (v/c)^2} dt \quad \dots\dots(10)$$

また、(8)式及び(9)式から推定できるように、微分形式で一般的に示すと、

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad \dots\dots(11)$$

又は、

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad \dots\dots(12)$$

の関係式が導かれる。(12)式は四次元時空での計量 (メトリック) を表す式と呼ばれ、ds は四次元距離の微分量

ということになる。

例えば、ある座標系で見て、v なる速度で運動している理想時計の固有時 (τ) と座標時 (t) の関係は、

$$(vdt)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

の関係を用いて代入すると、

$$d\tau = \sqrt{1 - (v/c)^2} \cdot dt \quad \dots\dots(13)$$

が得られ、(10)式あるいは(4)式と同一の結果を得る。

特殊相対論によって、上述のもの以外に、速度の合成、運動する座標系から星を観測する場合の光行差、更に質量、エネルギーといった量などについて新しい重要な概念が導かれるわけであるが、ここでは省略する。

2.2 一般相対論効果

前項では外力の働かない場合、すなわち、慣性系のみが取り扱われ、また、重力の問題も含まれていない。一般相対論では、(1)物理法則は慣性系のみでなく、いかなる座標系に対しても同じ形式をもつという一般相対性の原理、次に(2)重力と加速度による見掛けの力とは、すべての物理現象に対して同じ効果であるという等価原理を基本としている。等価原理によって、例えば自由落下するエレベータ内で見られるように、ある物体の近傍での重力は局所的に打ち消すことができるので、その物体の従うべき物理法則は特殊相対論により知ることができ、これに一般相対性原理により一般的な座標変換をすると重力場にある場合の物理法則が得られることになる。

重力場を含む四次元時空での2点間の距離の微分量は(11)式を一般化した次式で与えられる。

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = \sum_{i,k=0}^3 g_{ik} dx_i dx_k \quad \dots\dots(14)$$

ここで、x\_0, x\_1, x\_2, x\_3 が四次元座標で(12)式の ct, x, y, z にそれぞれ対応する。係数 g\_{ik} については、(12)式の場合、g\_{00} = -1, g\_{11} = g\_{22} = g\_{33} = 1 で、ほかはすべて零という特殊の場合と考えることができるが、一般には、g\_{ik} = g\_{ki} の条件のみが許され、したがって10個の独立成分となり、かつ、場所によって変化するものとなる。これら10個の g\_{ik} によって重力ポテンシャルが示されているわけで、物質の分布状態によって、g\_{ik} の従うべき制約があり、これがアインシュタインの重力法則で、難解な連立偏微分方程式である。

(12)及び、(14)式は四次元時空の幾何学的概念を示しており、慣性系に対応するものは平坦な空間であり、一方、重力場を含む非慣性系の場合は、曲率をもつ非ユークリッド空間的なものになり、曲線座標の導入が必要となる。g\_{ik} の勾配が場所によって、どのような割合で変化するかが曲率に関するということ、真の重力と一定加速度の場合の見分けがつくわけで、このことが等価原理による重力の打ち消しが局所的であるということの理由

でもある。

等価原理が慣性質量と重力質量の等しいことを意味していることと、エネルギー E は E/c^2 の慣性質量をもつということとを考えると、光も重力によって曲がること、重力ポテンシャルの低いところでは光の見掛けの速度は遅くなることなどが推論される。このことによつて、慣性系を取り扱う特殊相対論のように、光信号を用いて同時性や長さの測定を行う方法はそのままでは誤差を含み使用できないことになり、重力場とそこでの運動方程式によって理論的な補正をする必要がでてくる。

アインシュタインの重力方程式の完全解は数少ないが、その中で、質量 M が球対称分布をしている場合の解は有名な Schwarzschild の解と呼ばれ、地球近傍での原子時計を取り扱う場合に適用できる。

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -[1 + (2U/c^2)] c^2 dt^2 + [1 + (2U/c^2)]^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \cos^2 \theta \cdot d\phi^2) \quad \dots\dots(15)$$

又は、

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -(1 + 2U/c^2) c^2 dt^2 + (1 + 2U/c^2)^{-1} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad \dots\dots(15')$$

ここでは、球座標 (r, θ, φ) が用いられ、r は質量 M の中心からの距離、θ は赤道面からの緯度方向、φ は経度方向の角度であり、U は -GM/r で重力ポテンシャル、G は万有引力 (重力) 定数である。

この式で示されるように、g\_{ik} が距離 r、すなわち、場所によって変化するようになり、慣性系とは異なるとなる。(15)式の時空内での粒子の運動を計算すると、例えば光が太陽の近傍を通過する場合には、太陽側に屈折し、最も近づいた距離を R とするとき、ずれの角度 (δ) は δ = 4GM\_S / Rc^2 となり、太陽表面をかすめる光では約 1.75 秒角となり、VLBI の観測では考慮しなければならない。また同様に、太陽の周りの遊星の楕円軌道は、近日点が1周ごとに移動するという結果が得られ、古くから観測されていた太陽に最も近い水星の近日点移動の説明が与えられる。(15)式で r = 2GM\_S / c^2 では特異性が現われ、更にブラック・ホールといった現象も想定されるようになる。

ある点に静止している時計の場合、(15)式において、dr = dθ = dφ = 0 とおけるので、直ちに次式が得られる。

$$d\tau = [1 + (2U/c^2)]^{1/2} dt \approx (1 - GM/rc^2) dt \quad \dots\dots(16)$$

すなわち、質量 M の近傍では、時計の示す固有時 τ は座標時 t に比較して遅れることになり、無限遠で座標時と等しくなることがわかる。太陽の重力ポテンシャルによるシフトは太陽及び地球表面でそれぞれ約 10^-6 及



び  $10^{-8}$  である。この効果は、スペクトル線のレッド・シフトとしても同様に生ずる。

更に、重力ポテンシャル  $U$  の空間を速度  $v$  で運動する時計については次式が得られ、地球近傍での原子時計への基本式として使用される。

$$d\tau \approx [1 + (2U/c^2) - (v/c)^2]^{-1/2} dt \quad \dots\dots(17)$$

$$\approx [1 - (GM/rc^2) - (v^2/2c^2)] dt \quad \dots\dots(18)$$

3. 地球近傍での相対論効果

我々が地球近傍で時間計測を行う場合、太陽、地球、月などの重力場の中での地球の公転及び自転運動を考慮したうえで、時計の運動による効果を考えなければならぬ。また、後述のように通常の測定は地球の自転運動によって、回転座標系上で行われているという点に気をつける必要がある。以下、主なものについて概要を述べてみたい。

3.1 太陽の影響

地球近傍の天体の影響としては、質量の大きさから太陽の重力ポテンシャルによる効果が最も大きく、(15)式で地球の公転楕円運動を考慮すると、太陽の中心に原点をもつ座標系の座標時  $t$  と、地球の位置にある原子時計の刻む固有時の関係は次式で示される<sup>(1)~(3)</sup>。

$$dt = (1 + 1.48119 \times 10^{-8} + 3.3079 \times 10^{-10} \cos f) d\tau \quad \dots\dots(19)$$

ここで、 $f$  は真近点離角で地球の公転楕円軌道の長軸に対して太陽と地球とを結ぶ動径の成す角である。この式の右辺括弧内の第2項は太陽の重力ポテンシャル内での地球の運動による平均的な固有時の遅れを示し、第3項は楕円運動に基づく平均からのずれに対応する年周変動を示している。

年周項を積分すると、時計の読みの変動が得られ、地球の固有時は座標時に対し春には1.7ミリ秒遅れ、秋には1.7ミリ秒進むことになる。月、木星によっても同様な効果が起こるが、その程度は約3けた小さい。

これらの効果は、地球近傍の全時計に共通のものであり、重力波、パルサーなどの特殊な精密天文観測などを除き一般には考慮する必要がないし、実際の測定は不可能である。

以上の取扱いは、厳密には地球の質量中心の運動についてであり、例えば地球上に固定された時計でも真夜中のもとの、正午の位置では地球の直径だけ太陽からの距離に差があり、自転運動を考えると日周変化の可能性もある。しかしながら、太陽による重力ポテンシャルの変化分と公転運動に伴う遠心力の変化(軌道速度による二次ドップラ効果とも考えられる)はほぼ打ち消しあうので、日周変化は現状では考慮しなくてよいことが示され

ている<sup>(4)</sup>。このことは、近似的には次のように理解できる。すなわち、重力ポテンシャル効果による差は、

$$\Delta f_p / f_p = (GM_S/c^2) [(R-r)^{-1} - (R+r)^{-1}] = 2M_S G r / c^2 (R^2 - r^2) \quad \dots\dots(20)$$

で示され、ここで  $G$ : 重力定数、 $M_S$ : 太陽質量、 $R$ : 地球の公転軌道の半径、 $r$ : 地球の半径であり、 $8 \times 10^{-13}$  の周波数差となる。

一方、軌道速度の差によるシフトは、

$$\Delta f_v / f_v = [(R-r)^2 - (R+r)^2] \omega_0^2 / 2c^2 = -2Rr\omega_0^2 / c^2$$

で示され、ここで  $\omega_0$ : 公転の角速度である。しかし、ニュートン力学による近似、すなわち、 $R\omega^2 = M_S G / R^2$  を上式に代入すると次式が得られる。

$$\Delta f_v / f_v = \Delta(v^2) / 2c^2 = -2M_S G r / c^2 R^2 \quad \dots\dots(21)$$

(20) と (21) 式とを比較し、 $r = 6.3 \times 10^8$  cm に対し  $R = 1.5 \times 10^{13}$  cm 程度であることを考慮すると、ほぼ完全に重力効果と遠心力効果の変動分が打ち消しあっていることがわかる。より厳密な取扱いは noon-midnight 効果として文献(4)の付録に述べられているが、地球の質量中心では重力と遠心力とが打ち消されていることを考えて、全ポテンシャル ( $U$ ) の展開を行い、その変化分の一次項のみを取り出して影響を見ることもできる<sup>(5)</sup>。

$$\Delta U = -\frac{3}{2} \frac{GM_S}{R^3} r^2 \cos^2 \omega t \quad \dots\dots(22)$$

したがって、 $\Delta U/c^2$  が周波数変化量であるから、

$$\Delta f / f = -\frac{3}{2} \frac{GM_S r^2}{c^2 R^3} \cos^2 \omega t \quad \dots\dots(23)$$

となる。ここで  $\omega$  は地球の自転角速度であり、変動の振幅は太陽によるものは  $-2.69 \times 10^{-17}$ 、月によるものは  $-5.85 \times 10^{-17}$  となる。潮汐力によるこの日周効果は、現在の精度では無視できる量であるが、将来は考慮すべきものの一つとなる。

地球の公転及び自転運動に関連して、例えば公転面に対する自転軸の  $23.5^\circ$  の傾きの効果として、地上の原子時計の固有時の間には緯度の差による季節変化<sup>(6)</sup>があるとか、また、ジオイドからの高さや緯度との複合効果による差異<sup>(7)</sup>があるとの論文も発表されたが、これらは解析の過程で誤りのあることが指摘されている。

以上のように、地球上の原子時計に対する太陽の影響は、現在の精度ではすべての原子時計に共通のものとして取り扱われるので、原子時計間の比較、測定には考慮する必要がないことになる。しかしながら、天文観測や VLBI 観測などで、太陽を原点とする座標、すなわち、日心座標を使用した座標時を取り扱う必要がある場合には注意しなければならない。詳しい解析は文献(8)に述べられており、例えば VLBI 観測での二つのアンテナに

波面が到達する時間差、すなわち、原子時計の固有時によって測定される geometric delay を coordinate time delay に変換する際には、近似的に公転速度で走っている慣性系での測定となるので、特殊相対論での同時性を考慮した補正、すなわち、光行差の日周変動を補正すべきことを示している。

3.2 地球上の静止時計

前項 3.1 で述べたように、地球近傍での原子時計相互の比較には、太陽の影響は共通のオフセットとして考慮する必要がないので、地球の重力ポテンシャル及び自転運動のみを取り扱えばよい。(15)又は(15')式を用いて、地心を原点とする座標時と固有時の関係を求めることができるが、実際の測定は地球に固定した座標系、すなわち、自転角速度 ( $\omega$ ) で回転する回転座標系の表現が便利なが多い。このためには、(15)式では、

$$x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t$$

$$y' = y \cos \omega t - x \sin \omega t$$

$$z' = z$$

の変換を、また、式(15')では、

$$\phi' = \phi - \omega t$$

の変換を行い、記号のダッシュを取り去ると次式となる。

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -(1 + 2U_T/c^2) c^2 dt^2 + (1 + 2U_T/c^2)^{-1} (dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2\omega(xdy - ydx) dt \quad \dots\dots(24)$$

又は、

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -(1 + 2U_T/c^2) c^2 dt^2 + (1 + 2U_T/c^2)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi^2) + 2\omega r^2 \cos^2 \theta d\phi dt \quad \dots\dots(24')$$

ここで、 $U_T$  は回転系での全重力ポテンシャルで

$$U_T = U - \frac{1}{2} r^2 \omega^2 \cos^2 \theta \quad \dots\dots(25)$$

であり、右辺第2項が回転による遠心力の成分を示している。(24)、(24')式のそれぞれの最後の項は、回転座標系に特有のものである。

地球上に静止している時計の固有時と地心を原点とする座標時との関係は、(24)式において  $dx = dy = dz = 0$  として、次式が得られる。

$$d\tau = (1 + U_T/c^2) dt \quad \dots\dots(26)$$

(16)式と対比すると、 $U$  が  $U_T$  となり回転効果が変わっており、地表近傍では地球の重力ポテンシャルにより、約  $7 \times 10^{-10}$  の固有時の遅れとなることが示される。

地表付近で異なる地点に静止している時計の間の相対論効果による周波数差は、 $U_T$  の差を  $\Delta U_T$  とすると、

$$\Delta f / f = \Delta U_T / c^2$$

となる。 $U_T$  の勾配が重力加速度 ( $g$ ) であることから、

海水面からの高さ  $h$  にある時計と、海水面に静止している時計との周波数差は次のようになる。

$$\Delta f / f = g(\theta) h / c^2 \quad \dots\dots(27)$$

ここで、 $g(\theta) = 9.7803 + 0.0519 \sin^2 \theta$  ( $m/s^2$ )、 $\theta$  は緯度である。この  $g(\theta)$  には地球の偏平度が考慮されており、例えば、緯度  $40^\circ$  では、高さ 1 km 当たり、周波数は  $+1.09 \times 10^{-13}$  高くなることになる。重力異常のために、ジオイドの分布は回転楕円体による計算値からの偏差が場所によって、最大約 -100 m から +85 m の範囲であるので、世界的分布図(例えば理科年表)によって確かめることが必要である。

3.3 地表近傍で運動する時計

対地速度  $v$  で運動する時計の固有時  $\tau$  と地心座標による座標時  $t$  との関係は、(24')式において、

$$(1) \quad dr^2 \text{ の係数, } (1 + 2U_T/c^2)^{-1} \text{ はほぼ } 1 \text{ に近い,}$$

$$(2) \quad (v dt)^2 = dr^2 + (rd\theta)^2 + (r \cos \theta d\phi)^2$$

とおくと、近似的に次式が得られる。

$$d\tau = \left(1 + U_T/c^2 - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt - \frac{\omega}{c^2} r^2 \cos^2 \theta \cdot d\phi \quad \dots\dots(28)$$

又は、

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + U_T/c^2 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{\omega}{c^2} r \cdot \cos \theta \cdot v_E \quad \dots\dots(29)$$

ここで、 $v_E$  は速度  $v$  の東方向の成分である。

(28)式を運動通路に沿って積分すると、運動期間中に固有時の経過する時間  $\tau$  と座標時  $t$  との関係が求まる。

$$\tau = \int_{path} (1 + U_T/c^2 - v^2/2c^2) dt - \frac{\omega}{c^2} \int_{path} r^2 \cos^2 \theta d\phi \quad \dots\dots(30)$$

この式で、右辺第1項の積分のうち、括弧内の第2項は、(26)式と同じく地球上での全重力ポテンシャルによる効果、また、第3項は速度に対する二次ドップラ効果である。右辺第2項の積分は回転座標系に特有の項であり、運動の向きに依存する。

海水面に静止している時計に対して、高さ  $h$ 、対地速度  $v$  で運動する時計のずれ  $\Delta\tau$  は、(30)、(27)式によって、次式となり地表近傍での測定に適用できる。

$$\Delta\tau = \int_{path} \left(\frac{g(\theta)h}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt - \frac{\omega}{c^2} \int_{path} r^2 \cos^2 \theta d\phi \quad \dots\dots(31)$$

右辺第2項の積分を含む回転効果は、

$$\Delta\tau_r = -\frac{\omega}{c^2} \int_{path} r^2 \cos^2 \theta d\phi = -\frac{2\omega A_E}{c^2} \quad \dots\dots(32)$$

と表せる。ここで、 $A_E$  は運動時計の位置ベクトル  $\vec{r}$  の赤道面への投影が、運動経路に従って描く面積であり、東向きの場合を正にとる。この効果は次に述べる電波による時計比較にも同様に現れる。

同様に、(29)式より、運動する時計の周波数は海水面に静止している時計の周波数に対して、次式の差を生ずることがわかる。

$$\Delta f/f = \frac{g(\theta)h}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{c^2} \omega r \cos \theta \cdot v_E \quad \dots\dots(33)$$

例えば、緯度  $40^\circ$  を高度  $9 \text{ km}$  で、対地速度  $270 \text{ m/s}$  で東へ飛行する時計の周波数は、

$$\Delta f/f = 9.82 \times 10^{-13} - 4.06 \times 10^{-13} - 10.71 \times 10^{-13} = -4.95 \times 10^{-13}$$

海水面の時計の周波数より低くなることわかる。

地表付近での2地点での回転による遠心力の効果も含めた全重力ポテンシャルの差  $\Delta U_T$  に、(27)式のように近似的に  $g(\theta)h$  を用いることは、航空機あるいは地表上では十分の近似であるが、高さ  $h$  が  $50 \text{ km}$  以上、すなわち、人工衛星を取り扱うような場合には地球形状の球からのずれを考慮した次式を用いるのがよい。

$$\Delta U_T = -GM_e \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a_1} \right) - \frac{1}{2} \omega^2 (r^2 \sin^2 \theta' - a_1^2) + \frac{J_2 GM_e}{2a_1} \left[ 1 + \left( \frac{a_1}{r} \right)^3 (3 \cos^2 \theta' - 1) \right] \quad \dots\dots(34)$$

ここで、 $r$  は地心からの距離、 $\theta'$  は余緯度、その他の定数は、(34)式に直接出てこないものも含めて、参考のため以下に示しておく。

$G$ : 重力定数  $6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg/s}^2$

$M_e$ : 地球の質量  $5.9742 \times 10^{24} \text{ kg}$

$M_s$ : 太陽の質量  $1.9891 \times 10^{30} \text{ kg}$

$a_1$ : 地球の赤道半径  $6.38814 \times 10^6 \text{ m}$

$\omega$ : 地球の自転角速度  $7.2971 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$

$J_2$ : 地球の四重極モーメント係数  $+1.083 \times 10^{-3}$

$c$ : 光速  $299\,792\,458 \text{ m/s}$

$g(\theta)$ : 重力加速度(ジオイド)

$9.7803 + 0.0519 \sin^2 \theta \text{ m/s}^2$

$2\omega/c^2$ : 回転効果の係数  $1.6227 \times 10^{-6} \text{ ns/km}^2$

### 3.4 電波による時計比較への効果

光、電波の真空中の伝搬に対しては、例えば(12)式のなかで、光速  $c$  で進むことを考えれば、

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = v^2 dt^2 = c^2 dt^2$$

の条件から、 $ds^2 = d\tau^2 = 0$  ということが明らかである。

しかしながら、地球上での測定のように回転座標系に変換して見ると、(12)式は次式になる。

$$ds^2 = -[1 - \omega^2(x^2 + y^2)]c^2 dt^2 + 2\omega(xdy - ydx)dt + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \dots\dots(35)$$

この式で、電波の伝搬に対する上述の条件から左辺は零となるから、 $dt$  についての二次式が得られるので、地球の近傍については十分なりたつ近似、 $\omega^2(x^2 + y^2) \ll c^2$  を入れると、 $dt$  について次式の解が得られる<sup>(9)</sup>。

$$dt = \left[ 1 + \frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{2c^2} \right] \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{c} + \frac{\omega}{c^2} (xdy - ydx) \quad \dots\dots(36)$$

この式を伝搬経路に沿って積分すれば、伝搬に要する時間が求まる。右辺第1項は上述の近似を考慮すれば、経路全長を光速で割った通常の伝搬時間であるが、第2項が加わっている。この項の積分を  $\Delta t_r$  とすると、

$$\Delta t_r = \frac{\omega}{c^2} \int_{path} (xdy - ydx) = \pm \frac{2\omega}{c^2} A_E \quad \dots\dots(37)$$

ここで、 $A_E$  は光の経路の  $x-y$  面、すなわち、赤道面への投影と原点とが囲む面積であり、+符号は東向きの経路の場合で遅れとなり、-符号は西向きの場合で進みとなる。回転座標系上では、光の伝搬速度が方向によって異なって見えるわけで、回転円板上での光による実験が1914年にSagnacにより初めて行なわれたので、これをSagnac効果<sup>(10)</sup>と呼んでいる。赤道を1周するような経路の場合には  $0.2 \mu\text{s}$  に達し、静止衛星経由の大陸間通信では  $0.33 \mu\text{s}$  にもなるので、最近の運搬時計あるいは衛星による国際間の高精度比較ではこの項の補正を欠くことはできない。

以上、地球近傍で静止又は運動する時計への相対論効果及び電波による時計比較に現れる効果について述べたが、上述の補正を行えば少なくとも  $1 \text{ ns}$  又は  $1 \times 10^{-14}$  以上の精度で矛盾なく取り扱うことができる。移動衛星による時計比較など種々の具体例については、文献(1)を参照されたい。

## 4. 相対論効果の実験例

相対論効果の実験的検証は従来から太陽などの天体に関連したものも多く、現在でも例えば深宇宙探査用衛星の信号によって太陽の周りの時空のひずみの測定、VLBI観測による太陽近くでの電波の屈折など実験が続けられている。地球近傍での実験としても、高エネルギー物理の分野では特殊相対論効果は古くから実用的にも欠かせないものとして補正されているが、ここでは原子時計の高精度化に伴い可能となってきた実験を主に、時間・周波数分野に関係の深いものを紹介しておく。

### 4.1 二次ドップラ効果

原子時計では一次ドップラ効果は除去するよう工夫されているが、スペクトル観測のための電磁波は実験室の座標に固定されており、これに対して原子は一般に運動しているため、特殊相対論効果による横ドップラ効果によるシフトがあり、(7)式による補正が必要である。例えば、セシウム・ビーム原子時計では遷移にあずかる原子群の速度分布を実測又は計算により、また、水素メーザでは原子の蓄積されるバルブの温度から計算によって、それぞれ約  $5 \times 10^{-13}$  及び  $4 \times 10^{-11}$  のシフトを補正している。

### 4.2 地球の重力ポテンシャル

地表近傍で海水面からの高さ  $1 \text{ km}$  当たり  $1.091 \times 10^{-13}$  の周波数増加となることは、3.2において述べた。原子時計を山頂に運ぶ実験も試みられているが、相対論効果のシフト量と運搬可能な小形原子時計の安定度とが同程度であるため、あまり高精度の検証は得られていない。

最も有名、かつ最初の実験<sup>(12)</sup> は原子核の  $\gamma$  線での遷移周波数の観測で、地上  $22.6 \text{ m}$  の高さの差によるものである。 $\gamma$  線のように極めて高い周波数では、例えばガス状態の自由な原子核スペクトルは反跳のために自然幅より大きな周波数シフトを生じて観測が難しくなる。しかし、結晶格子の中で束縛された原子核を用いて反跳のない、強くかつ高分解能分光法が発見され、これをメスバウア効果と呼んでいる。重力ポテンシャルによるシフトの実験では約1%の精度が得られており、また、回転円板による遠心力の効果の実験<sup>(13)</sup> もなされている。

各国標準研究所のセシウム原子時計による原子時にも当然この効果が積算されていくわけで、ジオイドからの高さが  $1650 \text{ m}$  あるNBSの場合には、約  $1.8 \times 10^{-13}$  周波数が高いわけで、これを補正する必要がある。

### 4.3 運動する時計

#### a) 航空機による実験

国際時刻比較のために、原子時計をジェット機で運搬する方法が使用されてきているが、このような場合は(3)式を用いて、地表に静止している時計に対して運搬時計に補正すべき量を計算できる。

例えば、米国海軍天文台のあるワシントンからハワイを経由して東京までの飛行において、それぞれ大圏経路を高度  $1 \text{ 万 m}$ 、対地速度  $900 \text{ km/hour}$ 、全飛行時間を約  $15.5 \text{ 時間}$  として計算すると、重力ポテンシャルによる項は  $60.8 \text{ ns}$  の進み、二次ドップラの項は  $19.4 \text{ ns}$  の遅れ、回転効果の項は西向きのため  $45.7 \text{ ns}$  の進みとなるので、全体で  $87.1 \text{ ns}$  の進みとなる。逆に東京からワシントンへの帰路については、回転効果の符号が変わり

$45.7 \text{ ns}$  の遅れとなるので全体として  $4.3 \text{ ns}$  の遅れとなる。比較精度向上のために往復期間中の原子時計の歩度を補間する場合には、この効果を考慮する必要がある。

この種の初の実験<sup>(14)</sup> は1971年に4台の小形商用セシウムをジェット機により東回り及び西回りで世界一周して行なわれた。飛行中の時計の動きは相互比較により監視されたが、一般の航空路線を利用したため、精密なフライト・データが無く、精度よく理論値を求めることができなかった。しかし、測定結果は、地表に静止していた時計に対し、東回りの時計は  $59 \pm 10 \text{ ns}$  (計算値  $40 \pm 23 \text{ ns}$ ) の遅れ、西回りの時計は  $273 \pm 7 \text{ ns}$  (計算値  $275 \pm 21 \text{ ns}$ ) の進みとなり、原子時計を用いて初めて相対論効果を示すことができた。

より精密な実験<sup>(15)</sup> が1975年に米国で行われた。航空機は約15時間の周回飛行をし、その高度及び位置は地上からのCバンド及びKバンドのレーダで常時測定され、更に機上の原子時計と地上の原子時計はレーザ・パルスによって約  $0.3 \text{ ns}$  の精度で比較された。この場合、実測値は計算値と1.6%の一致をみた。

#### b) ロケットによる実験

1976年に水素メーザをロケットに搭載し、飛行中の周波数が地上のものと比較測定された<sup>(16)</sup>。この場合、ロケットの運動によって生ずる一次ドップラ周波数シフトが  $2 \times 10^{-5}$  に達するが、一方、相対論効果は最大で  $4 \times 10^{-10}$  であり、この種の検証実験の難しさがある。しかし、この実験では実時間で一次ドップラ効果を消去する方法がとられた。すなわち、搭載水素メーザの周波数を地上に送信するとともに、地上の水素メーザの周波数を基準としたSバンド信号をロケットに送信し、これを再び地上に送り返すことにより、一次ドップラ効果によるシフトを除いている。実験値は計算値と約  $2 \times 10^{-4}$  で一致し、時計を用いた実験としては最高の精度を示した。

### 4.4 電波による時計比較

地球上での電波による時刻比較には自転運動のためにサニヤック効果の補正の必要なことは、3.4に述べたとおりである。

電波によるこの効果の初の実験が、電波研究所が静止衛星ATS-1を用いて行った1975年の日米間時刻比較<sup>(17)</sup>で明確に示された。この比較システムはPNコードによるスペクトル拡散変調方式を使用し、理想に近いtwo way方式であり、その測定精度は  $1 \text{ ns}$ 、確度は  $10 \text{ ns}$  という高精度のものであった。サニヤック効果を示す第1の結果は、電波による測定値と同時に実施された運搬時計の測定値との一致の程度である。電波による生の測定値と運搬時計によるものとの差は  $0.39 \pm 0.2$

$\mu\text{s}$  であり、ここで  $0.2 \mu\text{s}$  は運搬時計の測定の不確かさである。しかし、電波による測定値にサニヤック効果の補正約  $330 \text{ ns}$  を行うと、その差は  $0.06 \pm 0.2 \mu\text{s}$  となり、良い一致が得られることである。より明確な第2の結果は、電波による測定値に振幅約  $2 \sim 3 \text{ ns}$  の半日周期的なゆるやかな変動が見られたことである。これは、静止衛星といえどもわずかの傾斜角と離心率のために、いわゆる8の字形の位置の変動があり、このため節式の面積  $A_E$  が変化して生ずるものである。観測値とこの計算値とは振幅及び位相の両面ともよく一致した。更に、この結果からみても3.1で述べた太陽の重力ポテンシャルによる日周変化は遠心力により打ち消されていることがわかる。

以上、地表付近での主な実験のみを述べたが、興味のある方はこれ以外のものも含めた総合的報告<sup>(15)</sup>を参照してほしい。

### 5. 国際的な取扱い

時間、周波数分野で相対論効果の取扱いについて、国際的かつ公式の討議が開始されたのは、原子標準による秒の再定義が具体的に提案され始めた1967年からであり、秒の定義諮問委員会 (CCDS) の各国メンバー機関に意見が求められた。この対策のために、我が国でも当時の日本学術会議国際度量衡研究連絡委員会時分科会において、討議がなされ、意見の統一が図られた。この意見には以下のことが述べられている<sup>(16)</sup>。

(1) Cs 遷移観測にあたり、特定の場所の指定を行えば、秒の定義はその場所における固有時に基づくことになり、指定しなければ個々の場所の固有時になる。

(2) 観測対象が適当な大きさの実験室内に限られた物理測定では固有時の採用で必要かつ十分であるが、対象が実験室外にある場合は一般相対論の補正を必要とする。

(3) 地球上又はその近傍にある原子時計は、天体由来する引力ポテンシャルの影響を受ける。その大きさの程度は次のとおりである。

太陽一定項	$+1.48 \times 10^{-8}$
太陽年周変化項	$\pm 3.3 \times 10^{-10}$
太陽最大日周変化項	$\pm 6 \times 10^{-13}$
地球一定項	$+7.0 \times 10^{-10}$
地球上の高度変化項	$-1.1 \times 10^{-13}/\text{km}$
木星一定項	$+10^{-12}$ のけた
月一定項	$+10^{-12} \sim 10^{-13}$ のけた
木星及び月変化項	$\pm 10^{-13}$ 以下

実際にはこれらの各項の幾つかの組合せとして求められ、また、遠隔の原子時計の相互比較のために必要欠く

べからざる補正は現在直ちに用いられる形では準備されていないと思われる。

以上のような意見が秒の定義諮問委員会に提出されているが、太陽最大日周変化項については3.1に述べたように公転の遠心力ポテンシャル効果による相殺が見落とされていた。

このような国際的討議の結果、秒の定義文には特定の場所の指定はしないことになった。これは、物理法則を求めるための実験室内の一般計測では、その場所の固有時を用いれば必要かつ十分であるということに基づいたもので、必要があれば相対性理論による補正を行えばよいという考え方である。

しかし、Cs 原子の遷移周波数で定めた秒間隔を積算する原子時や周波数標準について、各国標準研究所間で相互比較をしたり、世界的な統一基準を確立しようとする固有時のみの考え方では不十分となり、座標時的な概念の導入が必要となる。国際原子時 (TAI) の確立にあたり、1970年のCCDSはその規則の中に、TAIの刻む時間間隔は平均水準面 (ジオイド) において秒の定義によって示される時間単位に一致するように国際報時局 (BIH) が定めるものであると述べてある<sup>(19)</sup>。このことにより、空間的な基準面を与えたわけである。

国際原子時の高精度化、国際比較の精密化、4.に述べた原子時計による相対論効果の実験などによって、上述の国際原子時の定義及び遠隔地にある時計同士の相互比較に必要な相対論的補正について、より明確な定義をしておくべきであるという議論がでてきた。1980年のCCDS第9回会合において、TAIは座標時なのか、基準系は、座標変換に必要なモデルは、などの議論がなされ、CCDSとしての宣言<sup>(20)</sup>が作られた。これによると、

(1) TAIは回転ジオイド上で現示される秒の国際単位 (SI) 尺度であり、また、地心基準系で定義した座標時尺度である、

(2) 現状では、一般相対性理論の一次補正、すなわち、重力ポテンシャル差、速度差及び地球自転に対する補正を行うことによってジオイド近傍のいかなる固定点あるいは移動点にも十分な精度でTAIを拡大することができる。

と述べてあり、脚注として実用的に使用すべき運搬時計及び電波による時刻比較への補正式 (本文(1)式及び(2)式と同じ) が示してある。この宣言により、一応公式的な見解が示されたわけであるが、その表現についての厳密さの点で、1981年の国際天文連合 (IAU) では更に検討すべきだとしている。

一方、協定世界時 (UTC) の定義をはじめ、標準周波数及び報時に関する国際的取り決めを行っている国際無

線通信諮問委員会第7研究委員会 (CCIR SG.7) においても、1970年の第12回総会において始めて座標時系に関する研究プログラムが取り上げられ、重力ポテンシャルの影響のみを考慮した報告<sup>(21)</sup>が採択されている。1978年第13回総会においては、運搬時計及び電波による補正も含めて報告<sup>(22)</sup>が作成され、改訂がなされつつ現在に至っている。

### 6. ま と め

地表近傍での時間、周波数標準分野での測定においても相対論効果の補正が不可欠となっている現状から、また、従来なじみの薄い事柄でもあるので、これら効果のごく基礎的な物理的概念や実験例などについて述べた。アインシュタインの理論そのものの正確さまで議論されている時代ではあるが、実用上、その結論を解釈したり利用するときに過ちを犯さぬよう注意することが必要である。このようなことを避け、また将来、高次の補正を必要とすることを考え、より厳密な数学的取扱いについては専門書を参考にさせていただきたい。

### 参 考 文 献

- (1) Clemence, G.M.; "Planetary Distances According to General Relativity", *Astron. J.*, **67**, pp. 379—381, 1962.
- (2) Aoki, S.; "Note on Variability of the Time Standard due to the Relativistic Effect", *Astron. J.*, **69**, 3, pp. 221—223, 1964.
- (3) Clemence, G.M. and Szebeheley, V.; "Annual Variation of an Atomic Clock", *Astron. J.*, **72**, 10, pp. 1324—1326, 1967.
- (4) Hoffmann, B.; "Noon-Midnight Red Shift", *Phys. Rev.*, **121**, 1, pp. 337—342, 1961.
- (5) Reinhardt, V.; "Relativistic effects of the rotation of the earth on remote clock synchronization", *Proc. 6th PTTI*, pp. 395—424, 1974.
- (6) Sexl, R.U.; "Seasonal differences between clock rates", *Physics Letter*, **61 B**, 1, pp. 65—66, 1976.
- (7) Cannon, W.H. *et al.*; "Terrestrial Timekeeping and General Relativity—A Discovery", *Science*, **188**, 4186, pp. 317—388, 1975.
- (8) Thomas, J.B.; "Reformation of the relativistic

conversion between coordinate time and atomic time", *Astron. J.*, **80**, 5, pp. 405—411, 1975.

- (9) Saburi, Y.; "Observed time discontinuity of clock synchronization in rotating frame of the earth", *Jour. Radio Res. Labs.*, **23**, 112, pp. 255—265, 1966.
- (10) Post, E.J.; "Sagnac effect", *Rev. Mod. Phys.*, **39**, 2, pp. 475—493, 1967.
- (11) Ashby, N. and Allan, D.W.; "Practical implications of relativity for a global coordinate time scale", *Radio Sci.*, **14**, 4, pp. 649—669, 1979.
- (12) Pound, R.V. and Redka, G.A.; "Gravitational red-shift in nuclear resonance", *Phys. Rev. Lett.*, **3**, pp. 439—441, 1959.
- (13) Hay, H.J. *et al.*; "Measurement of the red shift in an accelerated system using the Mössbauer effect in Fe<sup>57</sup>", *Phys. Rev. Letter*, **4**, pp. 165—166, 1960.
- (14) Hafele, J.C. *et al.*; "Around-the-world atomic clock; observed relativistic time gain", *Science*, **177**, pp. 166—170, 1972.
- (15) Alley, C.O. "Relativity and clocks", *Proc. 33rd Freq. Control Symp.*, pp. 4—39, 1979.
- (16) Vessot, R.F.C.; "Relativity experiment with clocks", *Radio Science*, **14**, pp. 629—647, 1979.
- (17) Saburi, Y., Yamamoto, M. and Harada, K.; "High-precision time comparison via satellite and observed discrepancy of synchronization", *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **IM-25**, 4, pp. 473—477, 1976.
- (18) 秒の再定義に関する日本の意見, 時分科会資料, 38—2, 1967.
- (19) Mise en pratique du temps atomique international, Rapport au CIPM, 5<sup>e</sup> session CCDS, 1970.
- (20) Rapport du Comite Consultatif pour la Definition de la Seconde, 9<sup>e</sup> Session—1980, 時小委員会資料, 48—2, 1981.
- (21) The use of coordinate clocks and local standard (metric) clocks in a terrestrial coordinate time system, Rep. 439, CCIR, 1970.
- (22) Relativistic effects in a terrestrial coordinate time system, Rep. 439—2, CCIR, 1978.

