

III-5 バンド幅合成ソフトウェア (KOMB)

近藤 哲朗* 国森 裕生*

(昭和59年7月3日受理)

1. はじめに

バンド幅合成ソフトウェア (KOMB) は, K-3 型 VLBI 相関・一次処理システムで最終段に位置し, 相関出力データ (KROSS 出力) から, 観測量としての遅延時間 (τ_{obs}) および遅延時間変化率 ($\dot{\tau}_{obs}$) を求めるソフトウェアである。

KOMB にはもう一つの大きな機能がある。それは α および β テープと呼ばれる相関・一次処理結果の保存に用いる磁気テープの作成機能である。

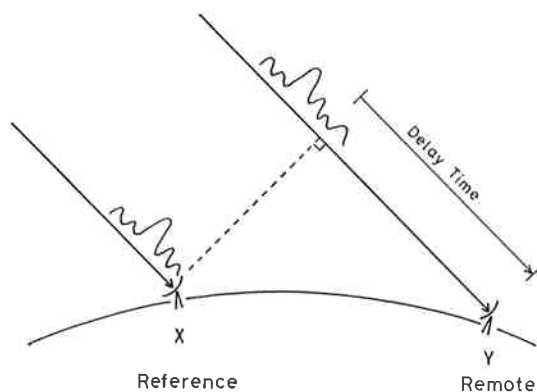
τ_{obs} および $\dot{\tau}_{obs}$ を求める計算は粗決定サーチと呼ぶ部分と精決定サーチと呼ぶ部分の二つに大きく分けられる。粗決定サーチは 10 nsec 程度の遅延時間分解能で τ_{obs} を求め, 相関処理がうまくいったかどうかの判定に用いられる。粗決定サーチの結果, 相関が検出されなかったり, 相関のピークが相関器の相関窓 (8 bit ラゲ=2 μ sec) の中央から大きくずれている場合は, 相関器に与える予測値を変更して相関処理をやり直す。バンド幅合成とは τ_{obs} を 0.1 nsec 以下の分解能で求める精決定サーチ時に用いる手法である。K-3 型 VLBI 相関・一次処理システムでバンド幅合成まで行って求められた遅延時間と米国の Mark-III VLBI 相関・一次処理システムで同様に求められた遅延時間とは 0.04 nsec 以内の差で一致した。これは基線長推定の場合の VLBI の目標精度約 3 cm (0.1 nsec) に比べて十分に小さい値である。

本論では, 2. で観測量としての遅延時間および遅延時間変化率を求めるアルゴリズムの原理について述べ, 3. ではソフトウェアの構成, 運用について述べる。ここで α , β テープの概要についても述べる (詳細は IV-8 データ相互変換ソフトウェアで述べられる)。さらに 4. では実際に処理した結果を示す。

2. 遅延時間と遅延時間変化率の求め方

2.1 VLBI 観測で得られる遅延時間と遅延時間変化率の定義

VLBI 観測で得られる遅延時間とは参照とする局 (以下 X 局) に到達した波面が, もう一つの局 (以下 Y 局)



第1図 遅延時間の定義。参照とする局 (X局) に対する Y局への信号の到達遅れを正に定義する。

にどれだけ遅れて到達するかを表すものであり, X局に対する Y局の到達遅れを正に定義する (第1図)。すなわち, それぞれの局での受信信号を $x(t)$, $y(t)$ とすると $y(t) = x(t - \tau_{obs})$ と表せる。また, 観測される遅延時間は次式で表される⁽¹⁾。

$$\tau_{obs} = \tau_g + \tau_p + \tau_i + \tau_e \quad \dots\dots(1)$$

ここで τ_g , τ_p , τ_i および τ_e はそれぞれ幾何学遅延, 伝搬遅延, 局内遅延および時刻同期誤差である。 $\tau_g + \tau_p$ の部分が実際の波面の到達時間差としての遅延を表す。遅延時間変化率は τ_{obs} の時間微分として定義され,

$$\dot{\tau}_{obs} = \frac{d\tau_{obs}}{dt} \quad \dots\dots(2)$$

である。

実際の VLBI 観測では各局それぞれ独立な原子時計を持ち, それぞれの局の時刻ラベルと共に電波源からの信号がデータレコーダに記録される。再生相関処理によって得られる遅延時間は, ある波面が X局に到達した時の X局のテープ上に書かれている時刻を T_x , その同じ波面が Y局に到達した時の Y局のテープ上に書かれている時刻を T_y とすると,

$$\tau_{obs} = T_y - T_x \quad \dots\dots(3)$$

と表せる。また遅延時間変化率を求める際の微分演算子としての時間は X局の時計の刻みが用いられる。これは相関処理の際の基準となる時刻ラベルとして X局の時刻ラベルが用いられるためである。

遅延時間の変化が全くない場合は観測される遅延時間

* 鹿島支所 第三宇宙通信研究室

の参照時刻（注目している波面がX局に到達した時のX局の時刻ラベル）としてどこをとっても良いが、一般には $t \neq 0$ であり、遅延時間は刻々と変化する。そこで観測量としての τ, t にエポックが必要となる。この参照に用いる時刻を PRT (Processing Reference Time) と呼ぶ。VLBI 観測では、1 観測につき数十秒から数百秒の積分を行うが、その観測時間のほぼ中央に PRT を定める。したがってX局の時計で PRT にX局を通過した波面が、Y局を通過した時のY局の時計の時刻を T'_y とすると、

$$\tau_{obs} = T'_y - \text{PRT} \quad \dots\dots(4)$$

で、その観測での遅延時間が表される。相関処理は、相関器に τ, t までの予測値を与えて行われるが KO MB は相関生データを用いて予測値との残差を τ, t までのサーチを行って求める。すなわち τ の残差の時間に対する一次傾斜までのサーチを行い、PRT における τ_{obs} および t_{obs} を求めている。

2.2 VLBI における最尤推定と相互相関

VLBI 観測データの一次処理には相互相関が用いられるが、相互相関法により遅延および遅延時間変化率を求める方法が、いわゆる最尤推定法による遅延および遅延時間変化率の推定となっている。

最尤推定法というのは推定量を見つけるための一般的方法である。今、確率変数 (X_1, X_2, \dots, X_n) の条件付同時確率分布を

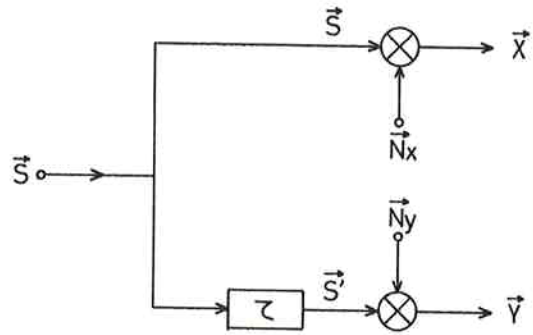
$$P_\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \dots\dots(5)$$

とする。ここで θ は未知母数である。すなわち(5)式は母数の値が θ のときの標本 (x_1, x_2, \dots, x_n) の得られる確率を表している。ここで、標本値 (x_1, x_2, \dots, x_n) を固定して、これを θ の関数と考えた場合の $P_\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を θ の尤度関数 (likelihood function) とよび $L(\theta)$ で表す。すなわち、

$$L(\theta) = P_\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \dots\dots(6)$$

である。この尤度関数値を最大にする θ の値 $\hat{\theta}$ を θ の推定量とする方法を最尤推定法と呼ぶ。つまり現実に行われた標本値 (x_1, x_2, \dots, x_n) をもとに、この標本値が得られる確率が最も大きくなるような θ の値を真の θ と考えようということである。

VLBI 観測では確率変数として各局での受信電圧 $\{x(t), y(t)\}$ 、未知母数として遅延時間 τ を考えた最尤推定法問題と考えることができる。つまり、 τ を色々と変化させて $x(t), y(t)$ を得る確率が最大となる τ を推定することになるが、このことから相互相関係数が最大となる τ を求めることが、最尤推定となることが想像される。Whitney⁽²⁾は第2図に示される VLBI 等価信号モデルを用いて、VLBI 観測データ一次処理におけ



第2図 VLBI 等価信号モデル

る最尤推定は相互相関係数が最大となる τ および t を求めることと等価であることを、周波数領域および時間領域での議論の二つの方法で示している。ここでは Whitney の方法に沿って周波数領域での議論を簡単に紹介する。

信号は N 個の複素周波数成分を持ち、その実部と虚部は独立なガウス分布に従いすべての成分は互いに独立とする。

$$\vec{S} = (S_1, \dots, S_j, \dots, S_N) \quad 1 \leq j \leq N \quad \dots\dots(7)$$

$$\langle S_i \cdot S_j \rangle = 0 \quad i \neq j$$

ここで $\langle \rangle$ はアンサンブル平均 (= 時間平均) を表す。それぞれの局で独立なガウス雑音加わるから、結局受信信号は、

$$\vec{X} = \vec{S} + \vec{N}_x \quad \dots\dots(8)$$

$$\vec{Y} = \vec{S}' + \vec{N}_y \quad \dots\dots(9)$$

S' は、 S に対して τ だけ遅延のある信号だから、

$$\vec{S}' = \vec{S} e^{-i\omega\tau} \quad \dots\dots(10)$$

ここで ω は角周波数である。最尤推定は $L(\tau) = P_\tau(\vec{X}, \vec{Y})$ を最大化する τ を求めることである。 $L(\tau)$ の表式を求める準備として $P(\vec{S}, \vec{N}_x, \vec{N}_y)$ を求める。それぞれ独立なガウス雑音であるから同時確率分布は、

$$P(\vec{S}, \vec{N}_x, \vec{N}_y) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{2\pi\sigma_{sj}^2} \cdot \exp\left\{-\frac{|S_j|^2}{2\sigma_{sj}^2}\right\} \cdot \frac{1}{2\pi\sigma_{nxj}^2} \exp\left\{-\frac{|N_{xj}|^2}{2\sigma_{nxj}^2}\right\} \cdot \frac{1}{2\pi\sigma_{nyj}^2} \exp\left\{-\frac{|N_{yj}|^2}{2\sigma_{nyj}^2}\right\} \quad \dots\dots(11)$$

ここで j は周波数成分を表し、 σ はそれぞれのガウス分布の分散を表す (実部と虚部は同じ分散とする)。 (8), (9), (10)式および(11)式より $P_\tau(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{S})$ を求めると、

$$P_\tau(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{S}) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{(2\pi)^3 \sigma_{sj}^2 \sigma_{nxj}^2 \sigma_{nyj}^2} \cdot \exp\left\{-\frac{|S_j|^2}{2\sigma_{sj}^2}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{|X_j - S_j|^2}{2\sigma_{nxj}^2}\right\}$$

$$\cdot \exp \left\{ -\frac{|Y_j - S_j e^{-i\omega_j \tau}|^2}{2\sigma_{nyj}^2} \right\} \quad \dots\dots(12)$$

ここで

$$|X_j - S_j|^2 = |X_j|^2 + |S_j|^2 - 2\text{Re}\{S_j \cdot X_j^*\}$$

(*は複素共役を表わす)

および

$$|X_j - S_j e^{-i\omega_j \tau}|^2 = |Y_j|^2 + |S_j|^2 - 2\text{Re}\{Y_j^* \cdot S_j e^{-i\omega_j \tau}\}$$

であるから結局(12)式は、

$$P_\tau(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{S}) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{(2\pi)^2 \sigma_{sj}^2 \sigma_{nxj}^2 \sigma_{nyj}^2} \cdot \exp \left\{ -\frac{|X_j|^2}{2\sigma_{nxj}^2} - \frac{|Y_j|^2}{2\sigma_{nyj}^2} \right\} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(|S_j|^2 \sigma_{nxj}^2 \sigma_{nyj}^2 + \sigma_{sj}^2 \sigma_{nyj}^2 + \sigma_{sj}^2 \sigma_{nxj}^2)}{\sigma_{sj}^2 \sigma_{nxj}^2 \sigma_{nyj}^2} \right] + \text{Re} \left\{ S_j \left(\frac{X_j^*}{\sigma_{nxj}^2} + \frac{Y_j^* e^{-i\omega_j \tau}}{\sigma_{nyj}^2} \right) \right\} \quad \dots\dots(13)$$

となる。ここで

$$\sigma_j = \frac{\sigma_{sj}^2 \sigma_{nxj}^2 \sigma_{nyj}^2}{\sigma_{nxi}^2 \sigma_{nyi}^2 + \sigma_{sj}^2 \sigma_{nyj}^2 + \sigma_{sj}^2 \sigma_{nxj}^2} \quad \dots\dots(14)$$

$$Z_j = \frac{X_j^* \sigma_j^2}{\sigma_{nxj}^2} + \frac{Y_j^* e^{-i\omega_j \tau} \cdot \sigma_j^2}{\sigma_{nyj}^2} \quad \dots\dots(15)$$

とおき、(13)式をSについて積分し $P_\tau(\vec{X}, \vec{Y})$ を得る。すなわち、

$$P_\tau(\vec{X}, \vec{Y}) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\tau(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{S}) d\vec{S} = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^N \frac{1}{(2\pi)^3 \sigma_{sj}^2 \sigma_{nxj}^2 \sigma_{nyj}^2} \cdot \exp \left\{ -\frac{|X_j|^2}{2\sigma_{nxj}^2} - \frac{|Y_j|^2}{2\sigma_{nyj}^2} \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{|S_j|^2}{2\sigma_j^2} + \frac{\text{Re}[S_j Z_j]}{\sigma_j^2} \right\} d\vec{S} \quad \dots\dots(16)$$

ここで

$$-|S_j|^2 + \text{Re}[S_j Z_j] = -[|S_j - Z_j|^2 - |Z_j|^2]$$

を用いて(16)式の積分を行うと、最終的に

$$P_\tau(\vec{X}, \vec{Y}) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{(2\pi)^2 \sigma_{sj}^2 \sigma_{nxj}^2 \sigma_{nyj}^2} \cdot \exp \left\{ -\frac{|X_j|^2}{2\sigma_{nxj}^2} - \frac{|Y_j|^2}{2\sigma_{nyj}^2} + \frac{|Z_j|^2}{2\sigma_j^2} \right\} \quad \dots\dots(17)$$

を得る。今、 $L(\tau)$ を最大化する τ の推定量 $\hat{\tau}$ を $\hat{\tau} = \text{Arg Max}_\tau \{L(\tau)\} = \text{Arg Max}_\tau \{P_\tau(\vec{X}, \vec{Y})\}$

と表すと、 $\hat{\tau}$ は(17)式を最大化する τ である。さらに(15)

式の右辺中 τ に依存するのは $|Z_j|^2$ の項のみであるから、(17)式を最大化する τ は $\tau|Z_j|^2$ を最大化する τ と等価である。つまり、

$$\text{Arg Max}_\tau \{P_\tau(\vec{X}, \vec{Y})\} = \text{Arg Max}_\tau \{|Z_j|^2\}$$

(18)式より

$$|Z_j|^2 = \frac{\sigma_j^4}{\sigma_{nxj}^2} |X_j^*|^2 + \frac{\sigma_j^4}{\sigma_{nyj}^2} |Y_j^* e^{-i\omega_j \tau}|^2 + \frac{2\sigma_j^4}{\sigma_{nxj}^2 \sigma_{nyj}^2} \text{Re}\{X_j Y_j^* e^{-i\omega_j \tau}\} \quad \dots\dots(18)$$

と表されるが、(18)式の第2項は $|Y_j^* e^{-i\omega_j \tau}| = |Y_j|$ と τ に依存しないから(18)式中 τ に依存するのは第3項のみである。したがって $P_\tau(\vec{X}, \vec{Y})$ を最大化する τ は、

$$\text{Arg Max}_\tau \left[\prod_{j=1}^N \frac{\sigma_j^2}{(2\pi)^2 \sigma_{sj}^2 \sigma_{nxj}^2 \sigma_{nyj}^2} \exp \left\{ \frac{2\sigma_j^4}{\sigma_{nxj}^2 \sigma_{nyj}^2} \text{Re}(X_j Y_j^* e^{-i\omega_j \tau}) \right\} \right]$$

と等価であり、 σ が j に依存しない場合は結局、

$$\hat{\tau} = \text{Arg Max}_\tau \left\{ \sum_{j=1}^N \text{Re}[X_j Y_j^* e^{-i\omega_j \tau}] \right\} \quad \dots\dots(19)$$

となる。ここで一般の場合、受信信号は周波数変換を行い、適当な周波数帯に変換されるが、その場合は、

$$\vec{S}' = \vec{S} e^{-i(\omega\tau + \phi)}$$

と、局部発振器同志の位相差が ϕ 加わるが、この場合(19)式は下式のように τ, ϕ についての式となる。

$$\hat{\tau}, \hat{\phi} = \text{Arg Max}_{\tau, \phi} \left\{ \sum_{j=1}^N \text{Re}[X_j Y_j^* e^{-i(\omega_j \tau + \phi)}] \right\} \quad \dots\dots(20)$$

(20)式は $\hat{\tau}$ に関しては次式と等価である。

$$\hat{\tau} = \text{Arg Max}_\tau \left| \sum_{j=1}^N [X_j Y_j^* e^{-i\omega_j \tau}] \right| \quad \dots\dots(21)$$

$\hat{\phi}$ は(20)式の $| \cdot |$ の中の $\hat{\tau}$ における複素数の位相として求められる。(20)式の $| \cdot |$ の中は相互相関の定義式そのものであり、 τ の最尤推定値は相互相関係数を最大化する τ と等価であることを示している。遅延時間変化率を入れても同様の議論が成り立ち、 $\tau, \hat{\tau}$ および ϕ の最尤推定値は、

$$\hat{\tau}, \hat{\tau}, \hat{\phi} = \text{Arg Max}_{\tau, \hat{\tau}, \phi} \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N \text{Re}[X_j Y_j^* e^{-i(\omega_j(\tau + \tau k) + \phi)}] \right\} \quad \dots\dots(22)$$

で与えられる。ここで k は時間方向のインデックスである。(22)式は $\tau, \hat{\tau}$ に関しては次式と等価である。すなわち、

$$\hat{\tau}, \hat{t} = \text{Arg Max}_{\tau, t} \left| \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N X_j Y_j^* e^{-i\omega_j(\tau + \tau_k)} \right| \quad \dots\dots(23)$$

であり、 $\hat{\phi}$ は(23)式中、右辺の | | の中の τ, t における位相として求められる。

2.3 相互相関関数

2. で VLBI 観測データ一次処理における τ および t の最尤推定は相互相関係数を最大化する τ および t と等価であることを示した。ここでは白色雑音受信時の相互相関関数を求め、その性質を述べる。さらに相関器でフリンジストップングという操作を施した後の相関関数にもふれる。

2.2 で述べたように、X 局での受信信号を $x(t)$ 、Y 局での受信信号を $y(t)$ とすると、相互相関関数 $R_{xy}(\tau)$ は

$$R_{xy}(\tau) = \langle x(t) \cdot y(t-\tau) \rangle \quad \dots\dots(24)$$

である。 $R_{xy}(\tau)$ とクロススペクトルは互いにフーリエ変換の関係にあるから、クロススペクトルの逆フーリエ変換として $R_{xy}(\tau)$ が求められる。

まず周波数変換をしないで受信信号直接の相互相関関数を求める。クロススペクトルを $S_{xy}(\omega)$ とすると、(8)、(9)式を複素数表示した $X(\omega)$ 、 $Y(\omega)$ を用いて、

$$\begin{aligned} S_{xy}(\omega) &= X(\omega) Y^*(\omega) \\ &= S(\omega) S'^*(\omega) + S(\omega) N_y^*(\omega) \\ &\quad + N_x(\omega) S'^*(\omega) + N_x(\omega) N_y^*(\omega) \quad \dots\dots(25) \end{aligned}$$

である。ここで S 、 N_x 、 N_y はそれぞれ統計的に独立なガウス雑音であるから右辺の第2項以降は0とみなせる。さらに S と S' は(10)式の関係があるから、結局、

$$S_{xy}(\omega) = |S(\omega)|^2 e^{i\omega\tau_0} \quad \dots\dots(26)$$

となる。ここではX局、Y局間の信号遅延を τ_0 としている。したがって ω_0 から $\omega_0 + \omega_B$ の帯域の白色雑音を受信した場合の規格化相互相関関数は、

$$\begin{aligned} r_{xy}(\tau) &= \frac{\int S_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega}{\int |X(\omega)| d\omega \cdot \int |Y(\omega)| d\omega} \\ &= \rho_0 \cos \{ (\omega_0 + \pi B) (\tau + \tau_0) \} \frac{\sin \pi B (\tau + \tau_0)}{\pi B (\tau + \tau_0)} \quad \dots\dots(27) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{T_{ax} T_{ay}}{(T_{ax} + T_{nx})(T_{ay} + T_{ny})}}, \quad B = \frac{\omega_B}{2\pi}$$

であり、 T_{ax} 、 T_{nx} 、 T_{ay} および T_{ny} はそれぞれX局、Y局での電波源信号のアンテナ受信温度およびシステム雑音温度である。

実際の VLBI 観測では受信信号はビデオ帯域に変換された後、相互相関処理が行われる。そこでビデオ帯域に

変換された信号の相互相関関数を求める。X局、Y局それぞれにおいて角周波数 ω_x 、 ω_y で位相が ϕ_x 、 ϕ_y である局部発振器で周波数変換された後のスペクトル（ビデオスペクトル）を $X_v(\omega)$ 、 $Y_v(\omega)$ とすると、

$$X_v(\omega) = X(\omega + \omega_x) e^{-i\phi_x} + X(\omega - \omega_x) e^{i\phi_x} \quad \dots\dots(28)$$

$$Y_v(\omega) = Y(\omega + \omega_y) e^{-i\phi_y} + Y(\omega - \omega_y) e^{i\phi_y} \quad \dots\dots(29)$$

と表される。(28)、(29)式の右辺は第1項が USB（上側波帯）、第2項は LSB（下側波帯）を表す。以下の議論では USB のみを扱うが LSB および両側波帯を用いても同様の議論が成り立つ。ビデオ帯でのクロススペクトルを $S_{xy}^v(\omega)$ とすると、

$$\begin{aligned} S_{xy}^v(\omega) &= [X(\omega + \omega_x) e^{-i\phi_x}] [Y(\omega + \omega_y) e^{-i\phi_y}]^* \\ &= S(\omega + \omega_x) S'^*(\omega + \omega_y) e^{i(\phi_y - \phi_x)} \\ &\approx |S(\omega + \omega_x)|^2 e^{i\omega\tau_0} \cdot e^{i(\phi_y - \phi_x)} \cdot e^{i(\omega_y - \omega_x)t} \quad \dots\dots(30) \end{aligned}$$

である。ただし、 $|\omega_y - \omega_x| \ll 1$ のもとで、

$$S^*(\omega + \omega_y) \approx S^*(\omega + \omega_x) e^{i(\omega_y - \omega_x)t}$$

と表せることを用いている。さらに、

$$\theta = \phi_y - \phi_x + (\omega_y - \omega_x)t$$

$$\omega' = \omega + \omega_x$$

$$\omega_0 = \omega_x$$

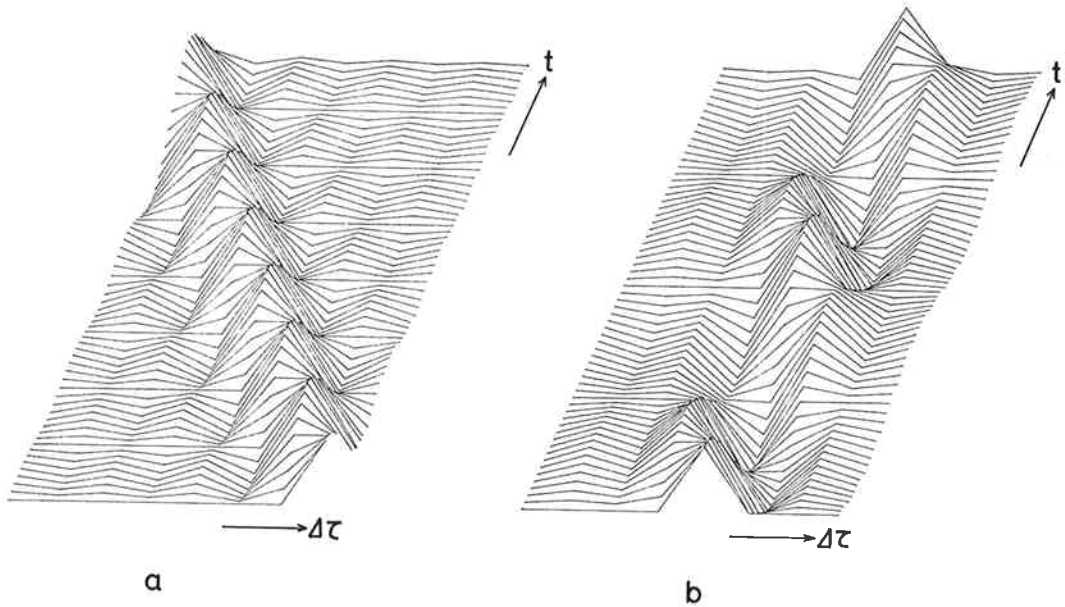
とおくと、

$$S_{xy}^v(\omega) = |S(\omega')|^2 e^{i\theta} \cdot e^{i\omega_0\tau_0} \cdot e^{i\omega\tau_0} \quad \dots\dots(31)$$

となる。したがってビデオ帯で0から ω_B の白色雑音受信時の規格化相互相関関数は次式で表される。

$$\begin{aligned} r_{xy}^v(\tau) &= \frac{\int S_{xy}^v(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega}{\int |X_v(\omega)| d\omega \cdot \int |Y_v(\omega)| d\omega} \\ &= \rho_0 \cos \{ \theta + \omega_0\tau_0 + \pi B (\tau + \tau_0) \} \cdot \\ &\quad \frac{\sin \pi B (\tau + \tau_0)}{\pi B (\tau + \tau_0)} \quad \dots\dots(32) \end{aligned}$$

(32)式で $\omega_0\tau_0$ の項がフリンジ位相と呼ばれ相関関数の形に関与し、 $\pi B (\tau + \tau_0)$ の項は相関関数の時間軸方向の平行移動を表す（それぞれの効果を第3図に示す）。さて、(27)式と(32)式の違いは τ_0 を $\tau_0 + \Delta\tau_0$ と変化させた場合明らかとなる。(27)式は τ_0 の変化は τ のみで吸収できること、すなわち、相関器での遅延量変化 (delay tracking) だけで、相関関数の形を保てることを意味しているが、(32)式では \cos の中に $\omega_0\Delta\tau_0$ という位相項が現れ、相関器での遅延量変化以外に $\omega_0\Delta\tau_0$ つまりフリンジ位相回転の補正 (フリンジストップング) を行わなければ相関関数の形が変化してしまうことを意味している。第3図からも明らかのように相関関数の形が τ_0 の変化とともに変化すると、積分により相関関数のピークが0になってしまう。その為 K-3 相関器では遅延の補正と同時に



第3図 相互相関関数における予測遅延時間変化の効果とフリンジ回転の効果。図は横軸に8ビットの遅延時間を取り奥行き方向に時間軸をとっている。aは8ビットの予測遅延の変化があった場合の相関関数の変化を示し、bは2回転のフリンジ回転があった場合の相関関数の変化を示す。

にフリンジストップングも行いつつ相関処理を行う（詳細は本特集号の III-2 に述べられている）。相関器でのフリンジストップングはX局時系列に cos および sin 関数を乗ずることによって行われている。2.4以降の議論への準備として、相関器から出力される相互相関関数の cos 成分と sin 成分と実際のフリンジストップング後の相関関数との関係を求めておく。

実際の議論に入る前に定性的にフリンジストップングを説明する。遅延変化率が正ということは、Y局への信号はドップラーシフトによりX局の信号より周波数が下がって受信されることを意味している。したがってX局の受信信号も同様に下げてから相互相関を行わなければならない。この受信信号の周波数を下げる（遅延変化率が負の場合は上げる）操作がフリンジストップングである。相関器内部では cos 関数および sin 関数と受信信号をミキシングすることにより周波数変換を行っている。さて、cos 関数および sin 関数を乗じられた後の時系列を $x_r(t)$ および $x_i(t)$ とし、それらのフーリエ変換を $X_r(\omega)$, $X_i(\omega)$ とすると、

$$x_r(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_f t + \phi_0) \quad \dots\dots(33)$$

$$x_i(t) = x(t) \cdot \sin(\omega_f t + \phi_0) \quad \dots\dots(34)$$

$$X_r(\omega) = \frac{1}{2} [e^{i\phi_0} X(\omega - \omega_f) + e^{-i\phi_0} X(\omega + \omega_f)] \quad \dots\dots(35)$$

$$X_i(\omega) = \frac{1}{2} [e^{i\phi_0} X(\omega - \omega_f) - e^{-i\phi_0} X(\omega + \omega_f)] \quad \dots\dots(36)$$

である。ここで ω_f はフリンジストップングを行う角周波数、 ϕ_0 はフリンジ初期位相である。相関器では、 $x_r(t)$, $x_i(t)$ とY局時系列 $y(t)$ との相互相関がとられる。すなわち、

$$R_r(\tau) = \langle x_r(t) \cdot y(t - \tau) \rangle \quad \dots\dots(37)$$

$$R_i(\tau) = \langle x_i(t) \cdot y(t - \tau) \rangle \quad \dots\dots(38)$$

で、それぞれ相関器からの cos 成分出力および sin 成分出力が表される。相互スペクトルの逆フーリエ変換として $R_r(\tau)$ および $R_i(\tau)$ を求めると、

$$R_r(\tau) = \int [X_r(\omega) \cdot Y^*(\omega)] e^{i\omega\tau} d\omega / 2\pi = \frac{1}{2} U(\tau) + \frac{1}{2} L(\tau) \quad \dots\dots(39)$$

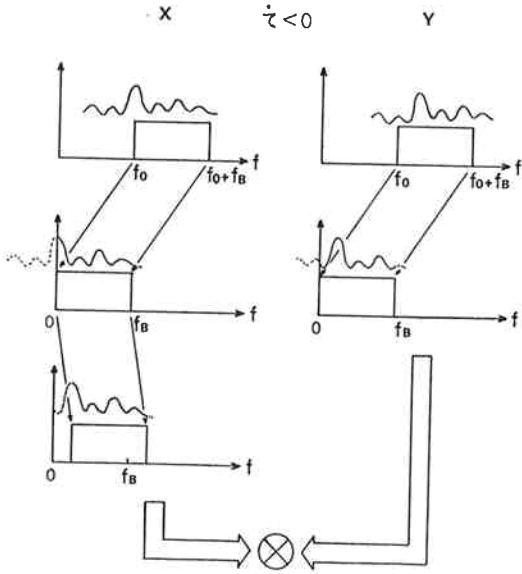
$$R_i(\tau) = \int [X_i(\omega) \cdot Y^*(\omega)] e^{i\omega\tau} d\omega / 2\pi = -\frac{i}{2} U(\tau) + \frac{i}{2} L(\tau) \quad \dots\dots(40)$$

となる。ただし、

$$U(\tau) = \int [X(\omega - \omega_f) e^{i\phi} \cdot Y^*(\omega)] e^{i\omega\tau} d\omega / 2\pi \quad \dots\dots(41)$$

$$L(\tau) = \int [X(\omega + \omega_f) e^{-i\phi} \cdot Y^*(\omega)] e^{i\omega\tau} d\omega / 2\pi \quad \dots\dots(42)$$

である。(41)式はX局の受信信号を ω_f だけ高い方へずらした信号とY局の信号との相互相関を意味し、(42)式はX局の受信信号を ω_f だけ低い方へずらした信号とY局の信号との相互相関を意味している(第4図)。つまり、 $U(\tau)$ は遅延変化率が負の場合の処理に相当し、 $L(\tau)$ は遅延変化率が正の場合に相当している。(39)、(40)式を U , L について解き次式を得る。

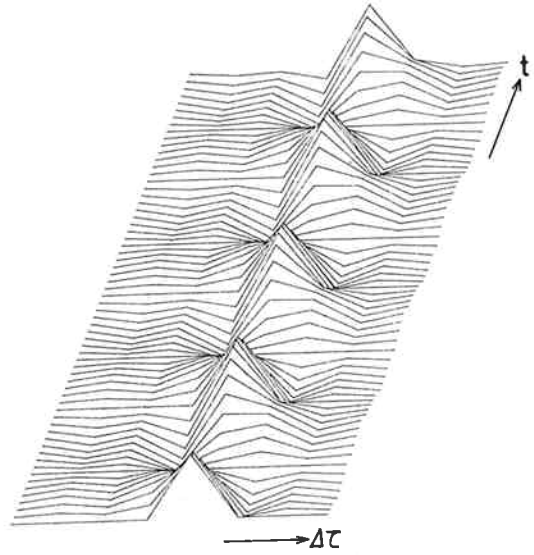


第4図 フリンジストップの定性的理解。図は遅延変化率が負の場合を示している。この場合 Y 局で受信される信号スペクトルはドップラーシフトのため、高い方にずれている。したがって、同一のローカル周波数でビデオ帯域に周波数変換された信号のスペクトルは XY 局で周波数方向にずれているため、そのまま相互相関をとっては相関がでない。そこで X 局のビデオ信号をドップラーシフトに相当する分だけ周波数を上げて相関をとる。

$$U(\tau) = R_r(\tau) + iR_i(\tau) \quad \dots\dots(43)$$

$$L(\tau) = R_r(\tau) - iR_i(\tau) \quad \dots\dots(44)$$

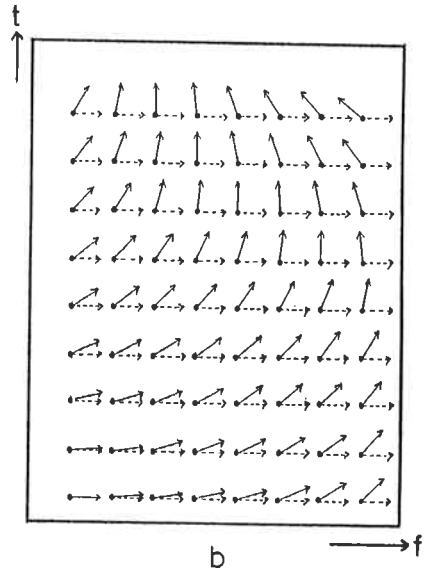
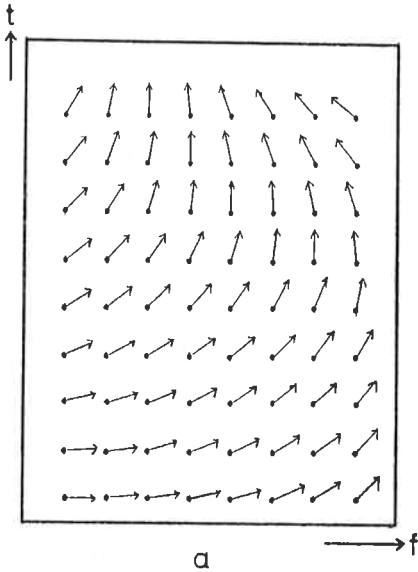
したがって、フリンジストップ後の相互相関関数は



第5図 フリンジストップ後の相互相関関数・第3図に見られるフリンジ位相回転が全体にならされている。

$$R(\tau) = R_r(\tau) \pm iR_i(\tau) \quad \dots\dots(45)$$

で与えられる。ただし複号の+は $t < 0$ の場合であり、- は $t > 0$ の場合である。(45)式は相関器で行うフリンジストップが正の回転のみでも、cos 成分出力と sin 成分出力の結合符号を考慮するのみで正負両回転のフリンジストップが実現できることを意味している。第5図にフリンジストップを行った相関関数列を示す。



第6図 $\Delta\tau$, Δt の効果。a : $\Delta\tau$ は周波数軸方向に位相回転を起こし、 Δt は時間軸方向に位相回転を起こす。
b : $\Delta\tau$, Δt を補正すると点線で示されるベクトルのようにすべて同じ方向を向けることができる。

2.4 遅延残差および遅延変化率残差の求め方

K-3 相関器では τ , t および $\dot{\tau}$ までの予測値が与えられて相関処理が行われる。ここでは相関処理結果から予測値と真の遅延時間および遅延変化率との残差 ($\Delta\tau$ および $\Delta\dot{\tau}$) を求める方法を述べる。

相関器から出力される相互相関関数をフーリエ変換したクロススペクトルを用いて $\Delta\tau$ および $\Delta\dot{\tau}$ の求め方の原理を説明する。第6図aはクロススペクトルをベクトル表示で示しているが、 $\Delta\tau$ の効果は周波数領域での位相回転となり、 $\Delta\dot{\tau}$ は時間軸領域での位相回転効果となる。この周波数領域および時間軸領域で回転しているベクトルに $\Delta\tau$, $\Delta\dot{\tau}$ の補正を行うと、第6図bのように、すべてのベクトルを同じ方向に向けることができ、この時、周波数方向および時間軸方向に積分して得られる相関強度が最大となる (2.2 で述べた相関強度が最大となる $\Delta\tau$ と $\Delta\dot{\tau}$ と一致する)。

KOMB での $\Delta\tau$ と $\Delta\dot{\tau}$ のサーチは2段階に分かれる。まず $\Delta\tau$ の効果としてビデオ帯域内のみを考えた $\Delta\tau$ と $\Delta\dot{\tau}$ のサーチが行われるが、これを粗決定サーチまたは ($\Delta\dot{\tau}$ のサーチはフリンジレートの残差を求める操作となるので) フリンジサーチと呼ぶ。粗決定サーチは相関処理結果の判定に用いる。粗決定サーチの結果、相関が検出されなかったり、相関のピークが相関器の相関ラグウインドー (8 bit ラグ=2 μ sec) の中央から大きくずれていた場合は、相関器に与える予測値 (主に時刻同期誤差) を変更し、相関処理をやり直し相関器の相関ラグウインドーのほぼ中央に相関強度の最大点がくるようにする。粗決定サーチで得られる遅延時間の分解能は 10 nsec 程度であるが、粗決定サーチで得た $\Delta\tau$ と $\Delta\dot{\tau}$ をもとに遅延時間を 0.1 nsec 以下の分解能で求める精決定サーチを行う。精決定サーチでは $\Delta\tau$ の補正をビデオ帯域内のみにとどまらず、周波数 ch 間の補正も行い等価的に広帯域な信号を処理したのと同程度の遅延時間分解能を得る (バンド幅合成)⁽⁵⁾。

2.4.1 粗決定サーチ

相関器からは PP (Parameter period の略で相関器での積分時間の単位である) ごとに、

- ① 相関積分カウント値、
- ② 積分関与ビットカウント値、および
- ③ 位相較正信号 (PCAL 信号) 位相検出相関カウント値が出力される。①は 8 bit ラグの相互相関積分カウント値で cos 成分および sin 成分がある (これをそれぞれ $a_r(n, k, d)$ および $a_i(n, k, d)$ とする。ただし n , k および d はそれぞれ周波数 ch, PP 番号および bit ラグを示すインデックスである)。②は①の相関積分に関与したビット数のカウント値でやはり cos 成分と sin

成分がある (これをそれぞれ $A_r(n, k)$, $A_i(n, k)$ とする)。③はバンド幅合成処理を行う際の周波数 ch ごとの位相較正の為に注入されている PCAL (phase calibration) 信号の位相⁽⁴⁾を検出するための積分カウント値であり、X局、Y局独立にそれぞれ cos 成分および sin 成分が出力される (これをそれぞれ $P_{xr}(n, k)$, $P_{xi}(n, k)$, $P_{yr}(n, k)$ および $P_{yi}(n, k)$ とする)。

①は②を用いて、また③は PP 中の全ビット数 (N_{pp}) を用いて規格化を行う。規格化後の複素相互相関関数を $R(n, k, d)$ とすると、

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[R(n, k, d)] &= (2a_r(n, k, d) - A_r(n, k)) / A_r(n, k) \\ \operatorname{Im}[R(n, k, d)] &= -(2a_i(n, k, d) - A_i(n, k)) / A_i(n, k) \end{aligned}$$

となる。虚部の一の符号は 2.3 で述べた相関器で行うフリンジストップングを正回転のみとした場合の複素相互相関関数の関係から導かれる。規格化後の PCAL 位相検出相関カウント値の X 局の cos 成分および sin 成分をそれぞれ $Q_{xr}(n, k)$ および $Q_{xi}(n, k)$ とすると、

$$\begin{aligned} Q_{xr}(n, k) &= (2 \cdot P_{xr}(n, k) - N_{pp}) / N_{pp} \\ Q_{xi}(n, k) &= -(2 \cdot P_{xi}(n, k) - N_{pp}) / N_{pp} \end{aligned}$$

で与えられる。これから、X局の PCAL 信号の位相 $\phi_{nx}(k)$ は、

$$\phi_{nx}(k) = \tan^{-1} \left\{ \frac{Q_{xi}(n, k)}{Q_{xr}(n, k)} \right\}$$

で求められる。Y局の PCAL 信号の位相 $\phi_{ny}(k)$ も同様に求められる。こうして求められた PCAL 位相は後で述べる精決定サーチ時に用いられる。

さて、相互相関処理で得られる相関強度を真の相関強度にするために、さらに、1 bit サンプリングによる損失補正、フリンジストップングによるバイアス補正および部分ビット補正による損失補正を行う⁽⁵⁾。

1 bit サンプリング補正は次式で行う⁽⁶⁾。

$$\rho_0 = \sin \left\{ \frac{\pi}{2} \rho_c \right\}$$

ここで、 ρ_c は 1 bit サンプリングされた信号の相関係数で ρ_0 は真の相関係数である。

相関器でフリンジストップングに用いる関数は sin 関数を -1 , 0 , $+1$ の 3 レベルで近似したものである。このフリンジストップング関数は、振幅 1 の sin 関数と比べて、基本波成分で $4/\pi \cdot \cos(\pi/8) (=1.176)$ 倍のバイアスがあるために、相関強度にバイアスが生じる。さらに積分期間の 1/4 の期間で積分が抑制されるために 4/3 倍のバイアスが生じる。これらのバイアス分を補正するのがフリンジストップングによるバイアス補正である。

部分ビット補正による損失補正の説明の前に部分ビット補正を説明する。相関器での予測遅延変化の追跡はビ

ット単位の離散的値でしか行えない。そのために相関強度が減少するがその減少をできるだけ少なくするのが部分ビット補正である。完全に補正するためには周波数領域で行わなければならないが、K-3 相関器では、ビデオ帯域の中央の周波数でフリンジストップピングを行い、1 ビットの遅延変化が生じるたびにフリンジ位相を 90° ジャンプする方法で時系列上で部分ビット補正を行っている（詳細は本特集号 III-2 で述べられている）。この方法による部分ビット補正を行った場合、相関強度の減少は 3.4% (=π²/288) におさえられる（補正なしの場合は 13.7% (=π²/72) の損失がある）。この損失分を相関強度に補正し真の相関強度に戻す。これが部分ビット補正による損失補正である。

これらの補正をまとめると、補正後の複素相互相関関数を $r(n, k, d)$ とし、

$$r(n, k, d) = \sin [C \cdot R(n, k, d)]$$

で表される。ただし、

$$C = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4 \cos \frac{\pi}{8}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{288}}$$

である。ここで相関強度が十分 1 より小さい場合（通常の VLBI 観測ではこの条件を満たす）は、

$$r(n, k, d) \approx C \cdot R(n, k, d)$$

と近似できる。 $r(n, k, d)$ を d に関してフーリエ変換してビデオクロススペクトルを得る。

$$r(n, k, d) \Leftrightarrow S_0(j, k, n)$$

ただし \Leftrightarrow はフーリエ変換を表し j はビデオ帯域内の周波数を示すインデックスである。フーリエ変換は 16 点で行う。したがって、クロススペクトルはビデオ帯域を 8 等分した各点 ($j=0 \sim 8$) での値が得られる。さらに、相関関数のオフセットおよびビデオ帯域端での特性劣化の影響をとりのぞくために周波数成分が 0 ($j=0$) および ω_B ($j=8$) での $S_0(j, k, n)$ の値を 0 とおく。こうして得られる $S_0(j, k, n)$ を用いて次式で示される関数 $F(n, \Delta\tau, \Delta t)$ を定義する。

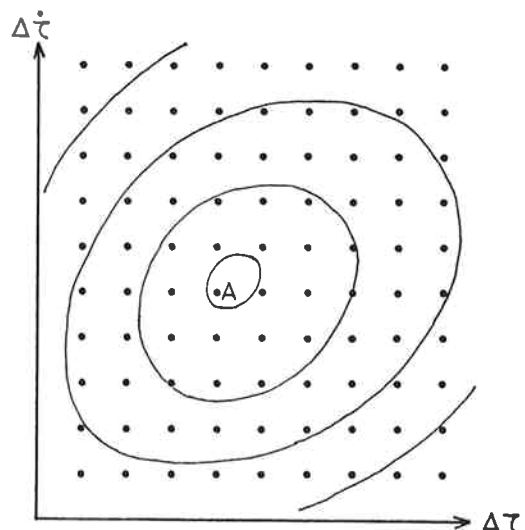
$$F(n, \Delta\tau, \Delta t) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{1}{7} \sum_{j=1}^7 S_0(j, k, n) \exp(-i\omega_j^n \Delta\tau) \right\} \exp(-i\omega_0^n \Delta t) \quad \dots\dots(46)$$

ここで ω_j^n はビデオ帯域内の角周波数、 ω_0^n は n ch の RF 角周波数、 $\Delta\tau$ 、 Δt はサーチする遅延時間残差および遅延時間変化率残差であり、 Δt は k の間隔すなわち 1 PP の時間を表す。(46) 式はビデオクロススペクトルに対して、ビデオ帯域内では $\Delta\tau$ による位相回転の補正、時間軸方向には Δt によるフリンジ位相回転の補正を行いつつ積分を行う式である。 $F(n, \Delta\tau, \Delta t)$ の絶対値を周波数 ch に対して積分した関数

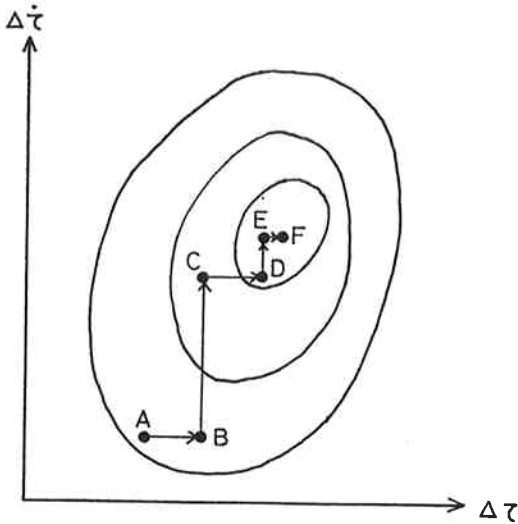
$$F(\Delta\tau, \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |F(n, \Delta\tau, \Delta t)| \quad \dots\dots(47)$$

で粗決定サーチ関数 $F(\Delta\tau, \Delta t)$ を定義すると、 $F(\Delta\tau, \Delta t)$ を最大化する $\Delta\tau$ 、 Δt を求める作業が粗決定サーチである。(46) 式は $\Delta\tau$ および $\omega_0^n \Delta t$ に関して 2 次元フーリエ変換の式となっている。したがって高速フーリエ変換 (FFT) が粗決定サーチ関数の計算に使用できる。こうして得られる Δt はフリンジレート残差 $\omega_0^n \Delta t$ から求められるので正確な意味では位相遅延変化率である。

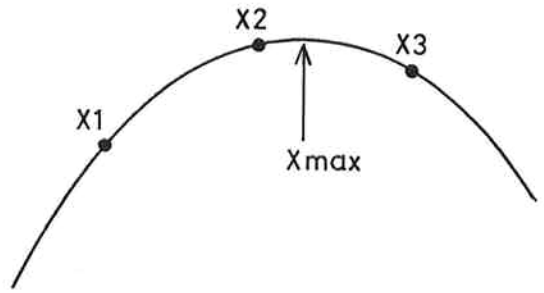
(47) 式の最大値のサーチは以下の手順で行う。まずビデオクロススペクトルを 2 次元 FFT を行うことにより第 7 図に示されるような $\Delta\tau$ 、 Δt の離散的な値での $F(\Delta\tau, \Delta t)$ が得られる。ここで周波数 ch 方向に積分するときには、 Δt 領域に変換してから積分しなくてはならない。これは時間軸方向のフーリエ変換で得られるのは先にも述べたようにフリンジレート残差であるためである。最大値のサーチは、まず格子点としての最大値（第 7 図の A 点）を求めることから始まる。こうして得られた $\Delta\tau$ 、 Δt を出発点として第 8 図に示される山登り法でより真の値に近い $\Delta\tau$ 、 Δt の推定値に至る。第 8 図 A 点を出発点とし、まず $\Delta\tau$ 方向のサーチを行い、その方向で最大値となる B 点に至る。ひきつづき Δt 方向にサーチを行い C 点に至る。このように $\Delta\tau$ 、 Δt 方向交互にサーチを行い最終的に頂上 F 点に至るが、 $\Delta\tau$ および Δt 方向のそれぞれの方向での最大値は放物線近似を用いて求めている（第 9 図）。この場合の粗決定サーチ関数の計算は FFT が使えないので (46) 式を定義式通りに計算しなくてはならない。したがって、この山登りに要する回数が少



第 7 図 粗決定サーチ関数のサーチ・その 1。格子点としての最大値をとる A 点を求める。



第8図 粗決定サーチ関数のサーチ・その2。第7図のA点を出発点としてまず $\Delta\tau$ 方向の前後の3点を用いて放物線近似(第9図)を行いB点に至る。次に Δt 方向に同様に前後の3点を用いてC点に至る。交互にサーチを繰り返して最大の関数値をとるF点に至る。



第9図 放物線近似。3点 X1, X2, X3を通る放物線の最大値として Xmax を求める。

$$D_s(n, k) = \frac{1}{7} \sum_{j=1}^7 S_v(j, k, n) \exp\{-i(\omega_j^0 \Delta\tau_s + \omega_n^0 \Delta t_s \Delta t_k)\} \quad \dots\dots(48)$$

$D_s(n, k)$ は(48)式からもわかるように粗決定残差を補正した相関関数となっている。この $D_s(n, k)$ を用いて精決定サーチ関数を次式で定義する。

$$D(\Delta\tau, \Delta t) = \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^N \left[\sum_{n=1}^K D_s(n, k) \exp\{-i(\omega_n^0 \Delta\tau + \Delta\phi_n)\} \right] \exp\{-i(\omega_n^0 \Delta t)\} \quad \dots\dots(49)$$

ない程、計算時間の短縮になるが、実際の処理では $\Delta\tau$, Δt 方向それぞれ3回の山登りが必要精度内に収束している。第10図に実際の粗決定サーチ関数例を示す。

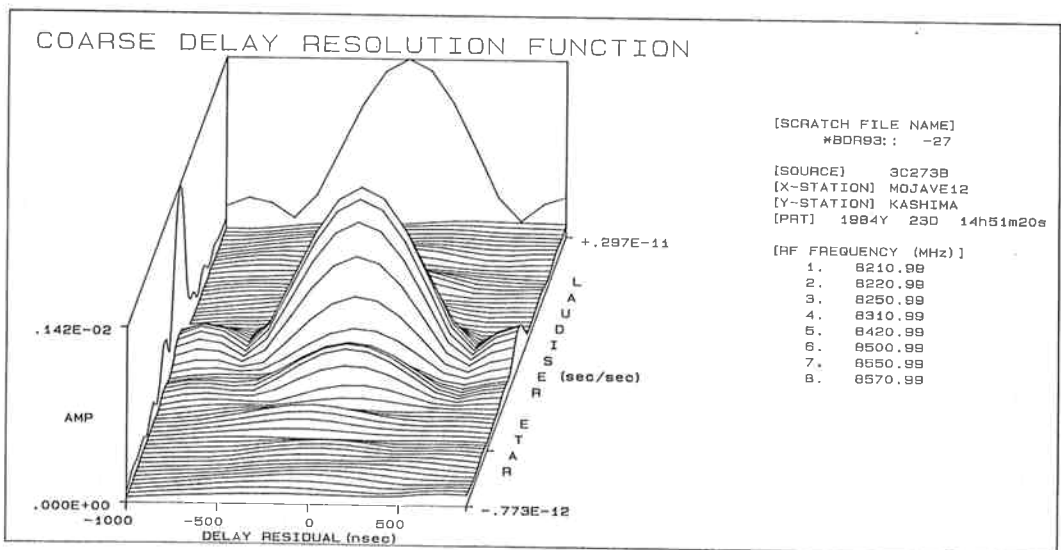
2.4.2 精決定サーチ

粗決定サーチで得た残差を $\Delta\tau_s$, Δt_s とする。まず精決定サーチに先立ち、 $\Delta\tau_s$, Δt_s を用いて次式で定義される $D_s(n, k)$ を計算する。

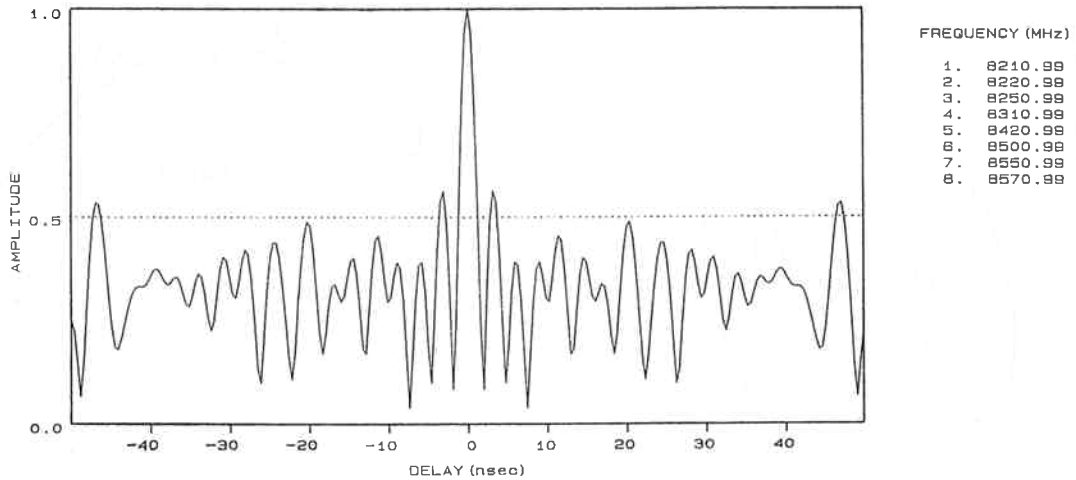
ここで、

$$\Delta\phi_n = \phi_{nx} - \phi_{ny}$$

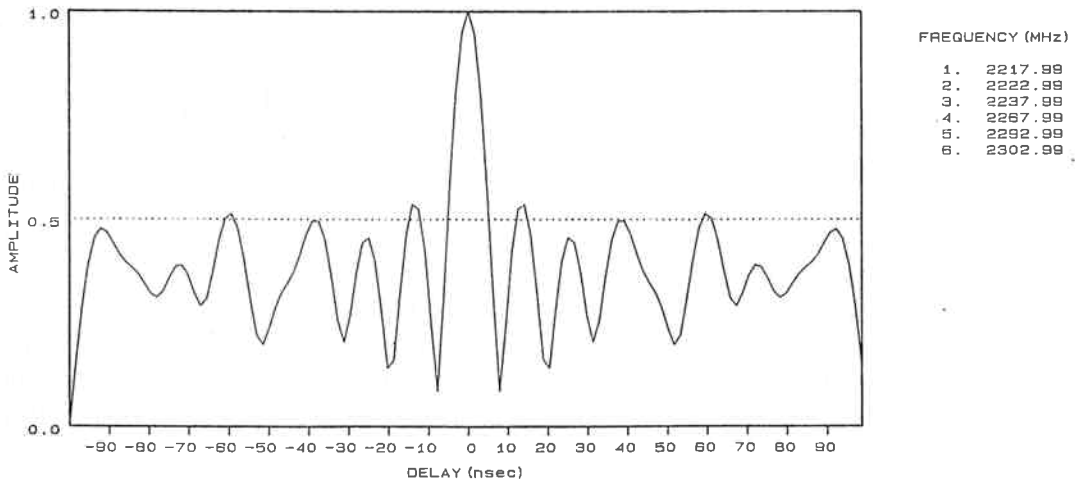
である。ただし ϕ_{nx} , ϕ_{ny} はそれぞれX局, Y局での nch の PCAL 位相の平均値である。(49)式の []の中がバンド幅合成を表す(第11図に実際の VLBI 観測に用い



第10図 粗決定サーチ関数例。横軸に遅延残差、奥行き方向に遅延変化率残差、縦軸に相関強度をとっている。図は鹿島-モハービ基線とられた Xバンドデータ(8ch)の粗決定サーチ関数である。



a



b

第11図 バンド幅合成関数。a. Xバンド (8 ch)。b. Sバンド (6 ch)。

られているXバンド8chおよびSバンド6chのバンド幅合成関数例を示す)。この周波数chの組み合わせは色々考えられるが、第11図に示される関数のサイドローブレベルが一番低くなる組み合わせ⁽⁴⁾が実際のVLBI観測に用いられている。

(49式は粗決定サーチ関数同様に2次元フーリエ変換の式となっているためFFTが使用できる。実際にバンド幅合成をFFTで行うには受信周波数chの最小周波数を ω_0^s として(49式)の[]内を次式のように変形してFFTを行う。

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D_s(n, k) \exp\{-i(\omega_0^s \Delta\tau + \phi_n)\}$$

$$= \exp(-i\omega_0^s \Delta\tau) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \{D_s(n, k) \exp(-i\phi_n)\} \right]$$

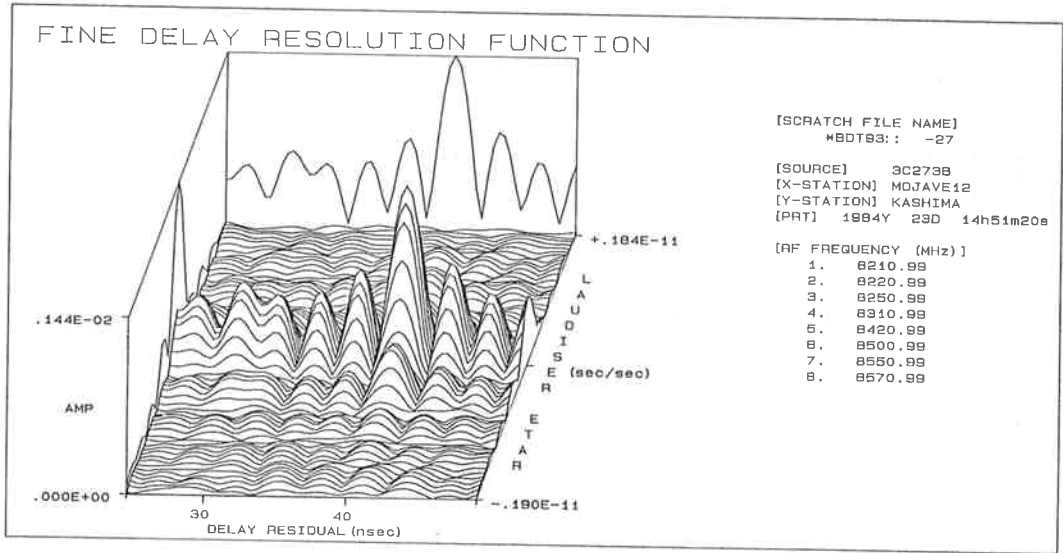
$$\exp\{-i(\omega_0^s - \omega_0^l) \Delta\tau\} \quad \dots\dots(50)$$

(50式の[]内をFFTで計算し、位相項 $i\omega_0^l \Delta\tau$ は後で補正する。 $D(\Delta\tau, \Delta t)$ の絶対値が最大となる $\Delta\tau, \Delta t$ を求めるのが精決定サーチである。最大値のサーチ方法は粗決定サーチの場合と同じ方法である。すなわち、2次元FFTにより離散的な値での $D(\Delta\tau, \Delta t)$ を計算し、その格子点としての最大値を出発点として山登り法を適用する。精決定サーチで得た $\Delta\tau, \Delta t$ をそれぞれ $\Delta\tau_m, \Delta t_m$ とすると最終的な遅延残差および遅延変化率残差の観測値は次式で計算される。

$$\Delta\tau_{obs} = \Delta\tau_m + l \cdot \tau_{am} \quad \dots\dots(51)$$

$$(l=0, \pm 1, \pm 2, \dots\dots)$$

$$\Delta\tau_{obs} = \Delta\tau_s + \Delta\tau_m$$



第12図 精決定サーチ関数例。データは第10図と同じ。

+(X局 XPCAL レート-Y局 PCAL レート)

ここで t_{am} は受信周波数 ch の間隔周波数の最小値の逆数でバンド幅合成処理の際に生じる $\Delta\tau$ 方向へのパターンの繰り返し周期 (ambiguity) である。PCAL レートとはそれぞれの局で ch 間の位相を校正するために注入されている PCAL 信号の位相のドリフトレートを遅延時間変化率になおしたものである。PCAL 位相のドリフトはシステムの温度変化等によりシステム内での遅延時間が変化することによって生じる。相関強度の観測値は、

$$\rho_{obs} = |D(\Delta\tau_m, \Delta\dot{\tau}_m)| \quad \dots\dots(53)$$

で計算され、フリッジ位相の観測値は、 $D(\Delta\tau_m, \Delta\dot{\tau}_m)$ の位相となる。第12図に実際の精決定サーチ関数例を示す。

2.4.3 推定した遅延時間および遅延時間変化率の誤差

遅延時間および遅延時間変化率の観測値の誤差解析は Whitney により詳しく行われているので、ここではその結果だけを述べる⁽²⁾。

粗決定サーチで得た遅延時間の誤差は次式で与えられる。

$$\sigma_{\Delta\tau_s} = \frac{\sqrt{12}}{\omega_B \cdot \text{SNR}} \quad \dots\dots(54)$$

ここで

ω_B : 角周波数で表したビデオ帯域

$$\text{SNR} = \frac{2}{\pi} \rho_{obs} \sqrt{A}$$

A : 処理に用いた全ビット数=2NTB

N : 処理 ch 数

T : 積分時間

$$B = \omega_B / 2\pi$$

である。精決定サーチで得た遅延時間の誤差は次式で与えられる。

$$\sigma_{\Delta\tau_m} = \frac{1}{\Delta\omega_{rms} \cdot \text{SNR}} \quad \dots\dots(55)$$

ただし、

$$\Delta\omega_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\omega_0^n - \bar{\omega})^2}$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \omega_0^n$$

ω_0^n : n ch の RF 角周波数

である。遅延変化率の誤差は次式で計算される。

$$\sigma_{\Delta\dot{\tau}_{obs}} = \sqrt{\frac{12}{\bar{\omega}^2}} \cdot \frac{1}{T \cdot \text{SNR}} \quad \dots\dots(56)$$

ただし、

$$\bar{\omega}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \omega_0^{n^2}$$

である。

3. バンド幅合成ソフトウェア (KOMB) の概要

KOMB には大きく分けて二つの機能がある。一つはバンド幅合成処理を行い VLBI 観測データの一次処理結果である遅延時間、遅延時間変化率、フリッジ位相および相関強度等を求める機能であり、もう一つは処理結果