

## IV-6 パラメータ推定ソフトウェア (KLEAR)

高橋 富士信\* 吉野 泰造\*

(昭和59年7月3日受理)

### 1. はじめに

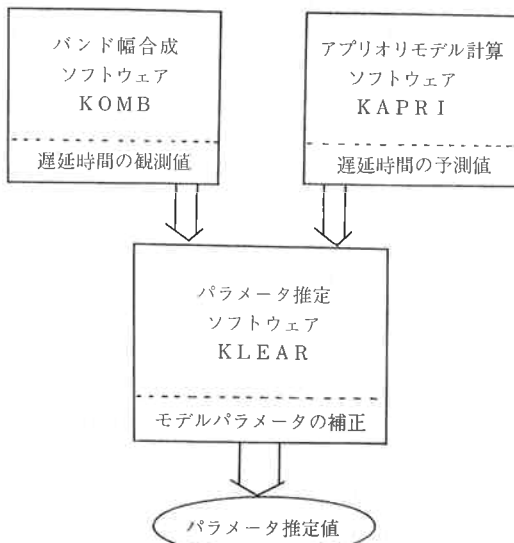
#### 1.1 パラメータ推定の目的

III-5 のバンド幅合成ソフトウェア (KOMB) によって求められた遅延時間と IV-5 のアプリオリモデル計算ソフトウェア (KAPRI) によって求められた遅延時間の差“O-C”は、仮定した物理モデルが不正確であることや遅延時間にはランダム誤差が含まれているために生ずるものである。パラメータ推定ソフトウェア KLEAR は、求められた多数個の“O-C”から、最小2乗法により、数個ないし十数個のモデルパラメータの補正値を推定するものである(第1図参照)。

#### 1.2 VLBI パラメータ推定プログラムの設計方針

現在のところ、VLBI のデータ解析において実績をもつものは、NASA/GSFC や NOAA/NGS において稼動している、SOLVE というソフトウェアのみである<sup>(1)</sup>。次いで今回完成した本論文で述べる KLEAR が、実績を蓄積し始めている。

KLEAR の設計にあたっては、特に米国における解析



第1図 高精度の遅延時間の観測値を出力する KOMB 及びアプリオリ値を計算する KAPRI とパラメータ推定用 KLEAR の関係図

との整合性を重視して、最小2乗法のアルゴリズムやマシソン・インタフェースについて、SOLVE と同一の方法を踏襲しているが、以下の点で独自性をもつよう設計されている。

- (1) K-3 ソフトウェアの最大の特徴である総合データベースシステム KASTL と一体的に設計され、データ管理の統一性、一貫性が保たれている。
- (2) 米国の Mark-III ではまだ実現されていない、章動や地球潮汐等の重要なパラメータの推定のための拡張性を有する。
- (3) SOLVE の逆行列法の代わりに、QR 分解法(2.3.2 参照)や特異値分解法<sup>(2)</sup>等のより優れた最小乗法のアルゴリズムを採用して、推定パラメータの独立性の自動検定、および自動選択を行って、推定精度・確度の向上を目指す。

国内外の各機関で、VLBI 観測値によるパラメータ推定のソフトウェアへの提案やアイデアが出始めているが、アイデアから、実際の道具へ発展させる過程にこそ、最も労力と時間を必要とするのであり、更には着実なる実績の積み上げも必要である。KLEAR は、実績の無い不確実な構成要素をできるだけ排除して、ソフトウェアとしての信頼性を高めると共に、実績のある使い易い手法のみをよく選択して完成された。これは、VLBI 観測データの解析が、極めて高い精度の演算を必要とする一方で、このための大規模のソフトウェアが誤動作をしたり、多くの問題を生じたりすることをできる限り排除したいためである。しかし一方で新しい試みを取り入れられる余地を残す工夫がなされている。

以下に、VLBI データ解析におけるパラメータ推定の原理を実用的に記述し、KLEAR の構造とその運用方法について述べる。

### 2. パラメータ推定の原理

#### 2.1 観測方程式

IV-5 のアプリオリモデル計算ソフトウェアによって厳密に与えられる遅延時間  $\tau$  の観測方程式は次式の構造を持っている。

$$\tau = -\frac{1}{c} [\text{PNSWB}] \cdot \mathbf{s} + A\tau_p + \sum_{k=1}^K \sum_{l=0}^L C_{kl} \cdot UT^l \dots (1)$$

\* 鹿島支所 第三宇宙通信研究室

ここで第1項は、基準慣性座標系における基線ベクトル（注）〔 〕内に相当）と星方向ベクトル  $\mathbf{s}$  の内積を光速で割算したもので幾何学的遅延量  $\tau_g$  と呼ばれる。詳細は、IV-5 に譲ることとして、第1項は、 $P$ : 歳差変換行列、 $N$ : 章動変換行列、 $S$ : 地球自転変換行列、 $W$ : 極運動変換行列から成ることに記述をとどめておく。

ここで注目すべき点は、複雑な変換行列が掛けられているにもかかわらず、基線ベクトル  $\mathbf{B}$  に対して  $\tau$  は完全に線型であることである。これは VLBI 観測量  $\tau$  の最大の特徴であり、他の人工衛星等を利用した測地での観測量が基線に対して非線型となる点と比べて、大きな長所である。この第1項には陽に示されていないが、基線ベクトル  $\mathbf{B}$  を地球の形状軸に対して結びつけるモデルが必要でありそれについては IV-5 において述べられている。

第2項は伝搬媒質による遅延を示し、大きく中性大気と電離大気成分に分けられる。

第3項は時計多項式と呼ばれ、両局の時計の相対変動を複数個連結した多次多項式である。

2.2 線型最小2乗法

2.2.1 概論<sup>(3)</sup>

$m$  個のパラメータ、 $n$  個の観測について次式が成立するものとする。

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{Y}} + \mathbf{y} \quad (\text{ランダム誤差 } \sigma) \quad \dots\dots(2)$$

ここで  $\mathbf{Y}$  は観測値ベクトル、 $\tilde{\mathbf{Y}}$  は計算値ベクトル、 $\sigma$  は誤差ベクトル、 $\mathbf{y}$  は O-C ベクトルとする。全て次元は  $n$  である。ここで

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) + \sigma, \quad \tilde{\mathbf{Y}} = f(\tilde{\mathbf{X}}) \quad \dots\dots(3)$$

とする。ここで  $\mathbf{X}$  は求めるべきパラメータベクトル、 $\tilde{\mathbf{X}}$  は  $\mathbf{X}$  のアプリオリパラメータを示すベクトルで、それぞれ次元は  $m$  である。アプリオリパラメータ  $\tilde{\mathbf{X}}$  が十分良い近似値であれば一般的に次式が成立する。

$$f(\mathbf{X}) = f(\tilde{\mathbf{X}}) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(\tilde{\mathbf{X}})}{\partial \tilde{X}_j} (X_j - \tilde{X}_j) \quad \dots\dots(4)$$

ここで  $\mathbf{x} = \mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}$ 、 $\mathbf{y} = \mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{Y}}$  と書き表せば、(4)式は

$$y_i = Y_i - \tilde{Y}_i = \sum_{j=1}^m A_{ij} x_j \quad \dots\dots(5)$$

となる。ここで  $A_{ij} = \partial f_i(\mathbf{X}) / \partial \tilde{X}_j$ 、 $\dots\dots(6)$

つまり  $A_{ij}$  は  $i$  番目の観測における  $f_i(\mathbf{X})$  の  $\tilde{X}_j$  に対する偏微分係数である。

次にそれぞれの観測  $i = 1 \sim n$  における観測誤差は互いに独立であるとする。すると観測値の誤差行列  $\Sigma_y$  は

$$\Sigma_y = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(7)$$

のごとく対角化されていると考えてよい。従って  $\Sigma_y$  の逆行列で与えられる観測の重み行列  $W$  は

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix} = \Sigma^{-1} \quad \dots\dots(8)$$

としてやはり対角化されている。この対角性は一基線における各観測データ間では成立しているとして良い。しかし多基線における同一時刻の観測データ間では、本質的にランダム誤差である星の相関強度に依存する S/N 誤差以外の付加性誤差では、 $\Sigma_y$  の対角性は必ずしも成立しない。しかし、ここでの議論は  $\Sigma_y$  は対角的であるとした。

ベクトル  $\mathbf{x}$  の最小2乗解を  $\hat{\mathbf{x}}$  とすれば、 $\hat{\mathbf{x}}$  は次式を満足する。

$$S(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^n [y_i - \sum A_{ij} \hat{x}_j]^2 / \sigma_i^2 \rightarrow \text{最小化} \quad \dots\dots(9)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{x}_j} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - \sum_{j=1}^m A_{ij} \hat{x}_j] A_{ij} / \sigma_i^2 = 0 \quad \dots\dots(10)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i A_{ij} / \sigma_i^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j'=1}^m A_{ij'} A_{ij} \hat{x}_{j'} / \sigma_i^2 = 0 \quad \dots\dots(10')$$

(10') 式を行列・ベクトル表現すれば次式となる。

$$A^T W \mathbf{y} = (A^T W A) \hat{\mathbf{x}} \quad \dots\dots(11)$$

(11) 式を正規方程式と呼ぶ。(11) 式の  $A^T W A \equiv B$  (正規行列) が正則つまり  $\det(B) \neq 0$  の時、 $B^{-1}$  が存在して、

$$\hat{\mathbf{x}} = B^{-1} A^T W \mathbf{y} \quad \dots\dots(12)$$

により最小2乗解が求められる。米国 Mark-III ソフトウェアの SOLVE は逆行列  $B^{-1}$  を直接計算して、(12) 式により  $\hat{\mathbf{x}}$  を求める方法を使用している。しかし、推定するパラメータ間に従属関係がある場合、逆行列法よりも、後述する QR 分解法や特異値分解法の方が優れている。

ところで、逆行列  $B^{-1}$  はパラメータの共分散行列  $\Sigma_x$  を与える。このことは次の様にして容易に証明できる。

$$\Sigma_x = \langle (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0) (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0)^T \rangle \quad \dots\dots(13)$$

$$= \langle [B^{-1} A^T W (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0)] [B^{-1} A^T W (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0)]^T \rangle \quad \dots\dots(14)$$

$$= B^{-1} A^T W \langle (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0) (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0)^T \rangle W A B^{-1} \quad \dots\dots(15)$$

$$= B^{-1} A^T W \Sigma_y W A B^{-1} \quad \dots\dots(15')$$

$$= B^{-1} A^T W A B^{-1} = B^{-1} \quad \dots\dots(16)$$

ここで  $\mathbf{x}^0$ 、 $\mathbf{y}^0$  はそれぞれ、パラメータ、観測値の真値 (不可知量) である。

また、この  $\Sigma_x$  (つまり  $B^{-1}$ ) からパラメータ間の相互相関行列  $R$  ( $R$  の成分を  $\rho_{jj'}$  で示す) を次式で計算

できる。

$$\rho_{jj'} = \frac{\langle (x_j - x_j^0)(x_{j'} - x_{j'}^0)^2 \rangle}{\sqrt{\langle (x_j - x_j^0)^2 \rangle \langle (x_{j'} - x_{j'}^0)^2 \rangle}} \quad \dots\dots(17)$$

$$= \frac{(\Sigma_x)_{jj'}}{[(\Sigma_x)_{jj}(\Sigma_x)_{j'j'}]} \quad \dots\dots(18)$$

ここに述べた、 $\Sigma_x$ , R の2つの行列は観測値  $y$  に依存しない正規共分散行列 B から計算できることに注意する必要がある。両行列とも観測のスケジュールと仮定した重み行列にのみ依存している。また共分散行列  $\Sigma_x$  の対角成分の平方根を、各パラメータの正規誤差 (formal error) と呼んでいる。正規誤差は、重み行列に含まれていない誤差を無視しているので、必ずしも、現実の残差によるパラメータの推定誤差とは一致しない。そこで、実際の観測値によるフィードバックにより現実的誤差を評価する必要がある。以下に述べるカイ2乗を利用した換算された誤差という手法は、米国のソフトウェア SOLVE において用いている簡便法であるが、KLEAR においてもこれを使用している。

2.2.2 誤差の換算<sup>(4)</sup>

最小2乗法で計算された推定値に対して必ず誤差分析が必要である。2.2.1 で述べたとおり、共分散行列は仮定した重み行列に直接依存するので、特に異なる手法による推定結果の誤差量の相互比較においては、現実合わない重み行列を使用したことによる誤差評価の誤りを避ける工夫が必要である。抜本的な方策は、2.6 のカイ2乗検定による再重み付けにおいて述べるが、もっと簡便な方法として、誤差の換算法 (スケールリング) がある。これは、共分散行列から求められた正規誤差  $\sigma_{formal}$  から、次式で与えられる  $\sigma_{scale}$  を求める方法である。

$$\sigma_{scale} = \sqrt{\text{カイ2乗} / \text{自由度}} \sigma_{formal} \quad \dots\dots(19)$$

この  $\sigma_{scale}$  を以下では換算誤差と呼ぶ。ここでカイ2乗  $\chi^2$  は、最小2乗推定後の現実の残差の平方  $(y_i - \hat{y}_i)^2$  と重み誤差  $\sigma_i^2$  の比の  $i$  による総和の統計量である。つまり

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sigma_i^2} \quad \dots\dots(20)$$

(19)式によって、誤差は現実の残差と結びつけられ、異なった手法間の相互の誤差の比較が可能となる。この推定パラメータの換算誤差に関連して、観測値の残差自身の統計量として次の2種の量がある。

(i) RSMS (Root-scaled-mean-square post-fit residual) は次式により定義される。

$$RSMS = \sqrt{\frac{\text{カイ2乗}}{n-m}} \quad \dots\dots(20')$$

つまりカイ2乗を自由度  $(n-m)$  で除した平方根である。最小2乗後の残差と重み付け誤差がバランスしておれば、カイ2乗は自由度に近似できるので、RSMS はほぼ1となる。このRSMSは、最小2乗法が重み付けの面で良い条件で行われたかどうかを知る指標として利用する。

(ii) RWMS (Root-weighted-mean-square post-fit residual)

$$RWMS = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\text{カイ2乗}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad \dots\dots(20'')$$

この量は、現実を得られた残差  $(y_i - \hat{y}_i)$  を重み付け2乗平均したものであり、残差の大きさの評価の統計量として便利なものである。残差の r. m. s. と略称することもある。VLBI で、0.1 ns の残差という場合、この量を指すことが多い。

2.2.3 最小2乗法の条件数

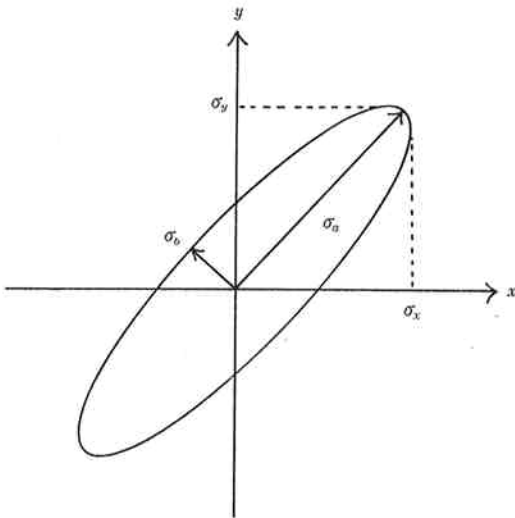
最小2乗法が良い条件で行われたかどうかは、正規行列 (または重みづけられたヤコビアン行列) のみより知ることができる。SOLVE では、この判別のためにパラメータ条件数という  $m$  個の指標を用いている<sup>(5)</sup>。パラメータ条件数は2.4で述べるスケールリングされた正規行列 (換算誤差の場合のスケールリングとは異なるので注意) の逆行列の対角成分である。SOLVE の運用では経験的にすべてのパラメータ条件数が50より小さい時に、最小2乗推定は成功したと見なしている。

この SOLVE の手法の根拠はそれ程明確ではないので、次に述べる新しい正規行列条件数を使うのがより優れている。

正規行列条件数 (以下、単に条件数と呼ぶ) とは、正規行列を固有値分解し、つまり対角化した時の、最大固有値と最小固有値の比の平方根をいう。これは、ヤコビアン行列を特異値分解した、各特異値の2乗の最大値と最小値の比と考えても良い。この固有値分解の意義は、2次形式で与えられる、多次元誤差楕円の最長主軸と最短主軸の長さの比を求めていることである。

SOLVE で用いているパラメータ条件数は、逆行列の対角成分を使用しており、第2図の  $\sigma_x, \sigma_y$  に相当する量であり<sup>(6)</sup>、相関の大きい場合には、不必要に観測誤差を過大評価したり、その従属性の根本原因を見落しやすい。

一方、正規行列条件数は、第2図の  $\sigma_u$  と  $\sigma_b$  の比に相当し、相関の大きい場合には、直ちに、その比が大きくなり、確実な判定をすることができる。但し、一般的に行列の対角成分の和 (Trace と称する) はその行列の



第2図 2次元誤差平面上での正規誤差  $\sigma_x, \sigma_y$  と主軸長  $\sigma_a, \sigma_b$  の大小関係

固有値の和に等しい。つまり、

$$\text{Trace}(B^{-1}) = \sum_{j=1}^m (\text{固有値})_j \quad \dots\dots(21)$$

従って Mark-III の手法においてパラメータ条件数を50以下にすることは、正の固有値の和である右辺の上限を束縛するので、全般的な外れというわけではない。

こうして求められた条件数は、(17)式により求められた相関係数表とともに計算機端末上に表示され、オペレータの判断材料とされる。SOLVE では、この様に会話的に手動でパラメータ選択をしており、この点について改善の余地がある。この機能についての具体例を3.1.4及び第8図において例示する。

### 2.3 逆行列法と QR 分解法

#### 2.3.1 逆行列法とその問題点

(11)式の  $B=A^TWA$  は、 $m \times m$  の対称行列である。Mark-III の SOLVE では、正規行列  $B$  の逆行列  $B^{-1}$  を強引に求めて、(12)式によりパラメータ推定値  $\hat{x}$  を求めている。しかし性質のよく判らない  $m$  個のパラメータについて、単に数値的に  $B^{-1}$  を計算することは2重の意味で問題である。

第1はランクの問題である。一基線の解析では2.5で述べるとおり、局位置と地球回転パラメータはほぼ100%の従属関係をもつ。また、時間区分された時計多項式係数間にも強い相関があり、時計パラメータの利用法は慎重な検討が必要である(2.4.5参照)。多基線解析においては更に複雑な従属関係が発生する。解析する立場からは、ランクを最大限とって、同時推定パラメータ数を増加させたい。しかし、逆行列法では、このための自動

的かつ効率的な手法を提供することは困難である。

第2には、(11)式よりわかるとおり、正規行列  $B$  はコピアン行列  $A$  を“2乗”したものとなっている。つまり  $B$  の各成分は、 $A$  の成分の“2乗”の次元をもっている。このことは、 $B^{-1}$  の計算において、各成分の必要桁数を倍増させ、有効桁落ちを引起しやすくなる。SOLVE では、(18)式で求めた相互相関係数  $\rho_{jj'}$  や前述のパラメータ条件数により、オペレータが、この桁落ちの発生の有無を判断する必要がある。つまり、SOLVE では、相関係数が1に近い時、そしてパラメータ条件数が異常に大きい値の時に、パラメータの選択をオペレータの判断でやり直している。しかし、これら2つの判断基準の境界値は厳密ではなく、既に7年以上にわたって積み上げてきた経験に頼って、問題を解決している現状である。

#### 2.3.2 QR 分解法の KLEAR への導入

パラメータの従属性の確実な自動判定の方法として、KLEAR では QR 分解法を採用できる。このためのサブソフトウェア QRLSQ が既に完成し、逆行列法と並用して使用されている。QRLSQ は修正グラムシュミット<sup>(6)</sup>の分解法を使用している。

ヤコビアン行列  $A$  を構成する  $m$  個の偏微分係数列ベクトルは、複雑な1次従属関係にある。このベクトル群を修正グラムシュミットの方法により、順次に直交化しつつ正規化することで、もとのヤコビアン行列を新しい正規直交行列  $Q$  と三角行列  $R$  に分解するプロセスを QR 分解と呼ぶ。つまり、 $P^{(1)} \dots P^{(m)}$  を任意の  $m$  個の一次独立なベクトルとし、これらから次の手順で新しい直交ベクトル群  $z^{(1)} \dots z^{(m)}$  が計算できる。

$$\left. \begin{aligned} z^{(1)} &= P^{(1)} \\ z^{(2)} &= P^{(2)} - (P^{(2)} \cdot z^{(1)})z^{(1)} \\ z^{(3)} &= P^{(3)} - (P^{(3)} \cdot z^{(1)})z^{(1)} - (P^{(3)} \cdot z^{(2)})z^{(2)} \\ &\vdots \\ &\dots\dots(22) \end{aligned} \right\}$$

更に、 $z^{(j)}$  から正規直交ベクトル群  $q^{(1)} \dots q^{(m)}$  が計算できる。

$$q^{(1)} = \frac{z^{(1)}}{|z^{(1)}|}; \dots; q^{(m)} = \frac{z^{(m)}}{|z^{(m)}|} \quad \dots\dots(22)'$$

この分解によって、ヤコビアン行列  $A$  は次式で与えられる。

$$A = QR = (q^{(1)} \dots q^{(m)}) \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{mm} \end{pmatrix} \quad \dots\dots(22)''$$

ここで、三角行列  $R$  の各成分は(22)式の内積項に対応している。このヤコビアン行列の QR 分解により、最小2乗法を  $B$  の逆行列を求めることなく解くことができる((27)式参照)。しかも、この際、次の様にして、逆行列法の2つの問題が解決できる。すなわち、

(1)  $m$  個のベクトル  $P^{(j)}$  の中から、独立性の高い順に

正規直交化してゆくと、あるパラメータ以降において(2)式の  $|z^{(j)}|$  が  $|P^{(j)}|$  に比して小さくなり、計算機の有効桁数以下となる  $j$  においてランク落ちの自動判定が可能となる。

(2) 後述する(20)式に示すように、ヤコビアン行列を“2乗”しないで、推定パラメータを計算できる。従って、計算機の有効桁数を有効に利用できる。

QR分解による最小2乗法の解法は以下の通りである。まず、重み付けされたヤコビアン行列  $W^{1/2}A$  を  $Q$  と  $R$  に分解する。

つまり、  

$$W^{1/2}A = QR \quad \dots\dots(23)$$

(23)式により、(11)式は次の様に変形できる。  

$$A^T W y = (A^T W A) \hat{x} \quad \dots\dots(11)$$

$$R^T Q^T W^{1/2} y = R^T Q^T Q R \hat{x} \quad \dots\dots(11)'$$

$$= R^T R \hat{x} \quad \dots\dots(24)$$

ここで  $z = Q^T W^{1/2} y$  とすれば、  

$$R^T z = R^T R \hat{x} \quad \dots\dots(25)$$

前述した QR分解時のランクの自動処理により、 $R$  は正則であるので  $(R^T)^{-1}$  を(25)式の両辺に掛けることができ、次式が得られる。

$$z = R \hat{x} \quad \dots\dots(26)$$

$R$  は上三角行列であるから、容易に  $R^{-1}$  が求められ結局

$$\hat{x} = R^{-1} z \quad \dots\dots(27)$$

として、最小2乗解  $\hat{x}$  を得ることが出来る。

また(23)式の様に QR分解されておれば、共分散行列  $\Sigma_{xx}$  も簡単に計算できる。

$$\Sigma_{xx} = B^{-1} = (A^T W A)^{-1} \quad \dots\dots(28)$$

$$= [R^T Q^T Q R]^{-1} = R^T (R^{-1})^T \quad \dots\dots(29)$$

$R^{-1}$  は上三角行列、 $(R^{-1})^T$  は下三角行列であり、これは共分散行列を LU分解の形に表示したことに等価である。(LU分解とは、上三角・下三角の2つの正方行列に分解することを言う。)

2.4 偏微分行列とパラメータの独立性

2.4.1 局位置偏微分係数

(1)式の第1項に含まれる基線ベクトル  $B$  は、基線両端の2局の位置ベクトル  $X_1$  および  $X_2$  の差である。この位置ベクトルの成分による  $\tau_g$  の偏微分が基線解析において主要な役目を果たす。

(1)式のうち、歳差行列  $P$  と章動行列  $N$  は星方向ベクトルに含めることができる。つまり元期における星方向ベクトルではなく、瞬時の星方向ベクトル  $s$  を用いることによって、幾何学遅延時間  $\tau_g$  は次式で与えられる<sup>(4)</sup>。

$$\tau_g = -\frac{1}{c} [S W B] \cdot s \quad \dots\dots(30)$$

ここで

$$\text{日周回転行列: } S = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ +\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots(31)$$

$$\text{極運動変換行列: } W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -w_x \\ 0 & 1 & w_y \\ w_x & -w_y & 1 \end{pmatrix} \dots\dots(32)$$

$$\theta = \text{GAST: グリニッジ視恒星時} \quad \dots\dots(33)$$

$(w_x, w_y)$ : 極運動2成分。

ここで、GAST は、地球の瞬時の回転角を示し、つまり UT1 を含んでいる。基線ベクトル  $B$  は主局位置ベクトルから副局位置ベクトルを差引いたものであるのので、(30)式における主局位置成分による  $\tau_g$  の偏微分係数は次式の様に求められる。

$$\partial \tau_g / \partial X = -\frac{1}{c} [S W \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}] \cdot s \quad \dots\dots(34)$$

$$= -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ w_x \end{pmatrix} \cdot s \doteq -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot s \quad \dots\dots(35)$$

同様にして

$$\partial \tau_g / \partial Y = -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ -w_y \end{pmatrix} \cdot s \doteq -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot s \quad \dots\dots(36)$$

$$\partial \tau_g / \partial Z = -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} -w_x \cos \theta + w_y \sin \theta \\ w_x \sin \theta + w_y \cos \theta \\ 1 \end{pmatrix} \cdot s$$

$$\doteq -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot s \quad \dots\dots(37)$$

ここで、(35)、(36)、(37)式の各近似等号は、 $w_x, w_y \ll 1$  において成立する。実際、極運動量は  $(10^{-5})\text{rad}$  のオーダーの量であり、この近似は十分に成立するので、以下の議論では近似式を利用する。

$\theta$  は全日周変数であるので、(35)、(36)、(37)の各近似式より、この3つの偏微分係数は、全日周成分において完備直交系を構成していることがわかる。つまり以下に述べる様な他の日周的偏微分係数は、常にこの3成分の線型結合で表現される。

副局位置成分による係数は、それぞれ主局によるものの符号を反転するだけで良い。

これらの局位置偏微分係数の大きな特徴は、微少な極運動を別として視恒星時  $\theta$  と星方向ベクトル  $s$  のみにより計算できることで、局位置には依存しないことである。つまり多基線同時観測の場合には、特定時刻の全基線における観測は全て同一の局位置偏微分係数を有する。これは多基線ヤコビアン行列の重要な性質であり、

更に詳しく後述する。

(35), (36), (37)の各式をまとめて次式の様にベクトル表現することができる。

$$\partial\tau_g/\partial\mathbf{X} \doteq -\frac{1}{c}R_3(\theta)\mathbf{s} \quad \dots\dots(38)$$

ここで

$$R_3(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(39)$$

であり、Z軸まわりに $\mathbf{s}$ を $+\theta$ だけ回転することを意味している。この(38)式は、局位置偏微分係数の幾何学的振舞いを知る上で有益なものである。

(38)式では光速 $c$ で割られているが、正規行列の条件数を改善するためには、ヤコビアン行列の列ベクトルのノルムを同程度にすべきであるので、実際の偏微分係数としては、(38)式に光速 $c$ を掛けて使用する。(これを偏微分列ベクトルのスケールングと呼ぶ。)

2.4.2 地球回転パラメータ偏微分行列

(30)式より地球回転パラメータ $w_x, w_y, UT1$ に関して次の偏微分係数が求められる。

$$\begin{aligned} \partial\tau_g/\partial w_x &= -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} -B_x \cos \theta \\ -B_x \sin \theta \\ B_x \end{pmatrix} \cdot \mathbf{s} \\ &\doteq -B_x \frac{\partial\tau_g}{\partial X} + B_x \frac{\partial\tau_g}{\partial Z} \quad \dots\dots(40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial\tau_g/\partial w_y &= -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} -B_y \sin \theta \\ B_y \cos \theta \\ -B_y \end{pmatrix} \cdot \mathbf{s} \\ &\doteq B_y \frac{\partial\tau_g}{\partial Y} - B_y \frac{\partial\tau_g}{\partial Z} \quad \dots\dots(41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial\tau_g/\partial(UTC-UT1) &= -\partial\tau_g/\partial\theta \\ &= -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} -B_x \sin \theta + B_y \cos \theta \\ -B_x \cos \theta - B_y \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(42) \end{aligned}$$

$$\doteq B_x \frac{\partial\tau_g}{\partial Y} - B_y \frac{\partial\tau_g}{\partial X} \quad \dots\dots(43)$$

(40), (41), (43)の各近似等号は $w_x, w_y \ll 1$ において成立する。局位置偏微分のところで述べたようにこの条件は十分に満足される。

この3成分は、更にまとめて、次式の様にベクトル表現が可能である。

$$\begin{aligned} \partial\tau_g/\partial\mathbf{R} &= \begin{pmatrix} \partial\tau_g/\partial w_y \\ \partial\tau_g/\partial w_x \\ -\partial\tau_g/\partial(UTC-UT1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \partial\tau_g/\partial\mathbf{X} \quad \dots\dots(44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \partial\tau_g/\partial\mathbf{X} \times \mathbf{B} \quad (\times \text{はベクトル積を示す。}) \\ &\dots\dots(45) \end{aligned}$$

つまり、地球回転偏微分ベクトルは局位置偏微分ベクトルと基線ベクトルのベクトル積で表される。(44)式は地球回転パラメータによる $\tau_g$ の偏微分係数 $\partial\tau_g/\partial\mathbf{R}$ が局位置偏微分係数 $\partial\tau_g/\partial\mathbf{X}$ に完全線型従属していることを示している。

実際のヤコビアン行列では、正規行列の条件数を改良するために、(44)式に光速を掛け事前予測の基線長 $B_0$ で割ってスケールングしている。

2.4.3 時計多項式偏微分係数

次式で与えられる通り、時計多項式の係数による偏微分係数は基本的には単純に求められる<sup>(6)</sup>。

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} \text{第 } l \text{ 番の時間区分における} \\ \text{第 } k \text{ 次項の偏微分係数} \end{array} \right\} \\ &= \begin{cases} 0 & (\text{時間区分が } l \text{ でない時}) \\ UT^k & (\text{ " } l \text{ である時}) \end{cases} \quad \dots\dots(46) \end{aligned}$$

ここで $UT$ は世界時である。(46)式そのままでは、 $k$ の各次数間で独立性が悪いので、次式の様にバイアスをかけて正規化して、正規行列条件数を改善する。

$$\left( \frac{UT - UTS_l}{UTE_l - UTS_l} \right)^k \quad \dots\dots(47)$$

ここで、 $UTE_l$ と $UTS_l$ は第 $l$ 番の時間区分の開始時刻と終了時刻を示す(第3図参照)。つまり時間区分の開始点で0、終了点で1となる様にスケールングしている。

2.4.4 大気・電離層偏微分係数

大気および電離層パラメータの推定とは、一般には天頂方向の遅延量を正確に求めることを言う。仰角方向 $EL$ での遅延が次の関数形で与えられたとする。

$$\tau_p(EL) = \tau_p(90^\circ) f(EL) \quad \dots\dots(48)$$

これは、遅延媒質が層状を成していることを仮定して導びかれる。求める偏微分係数は次式で与えられる。

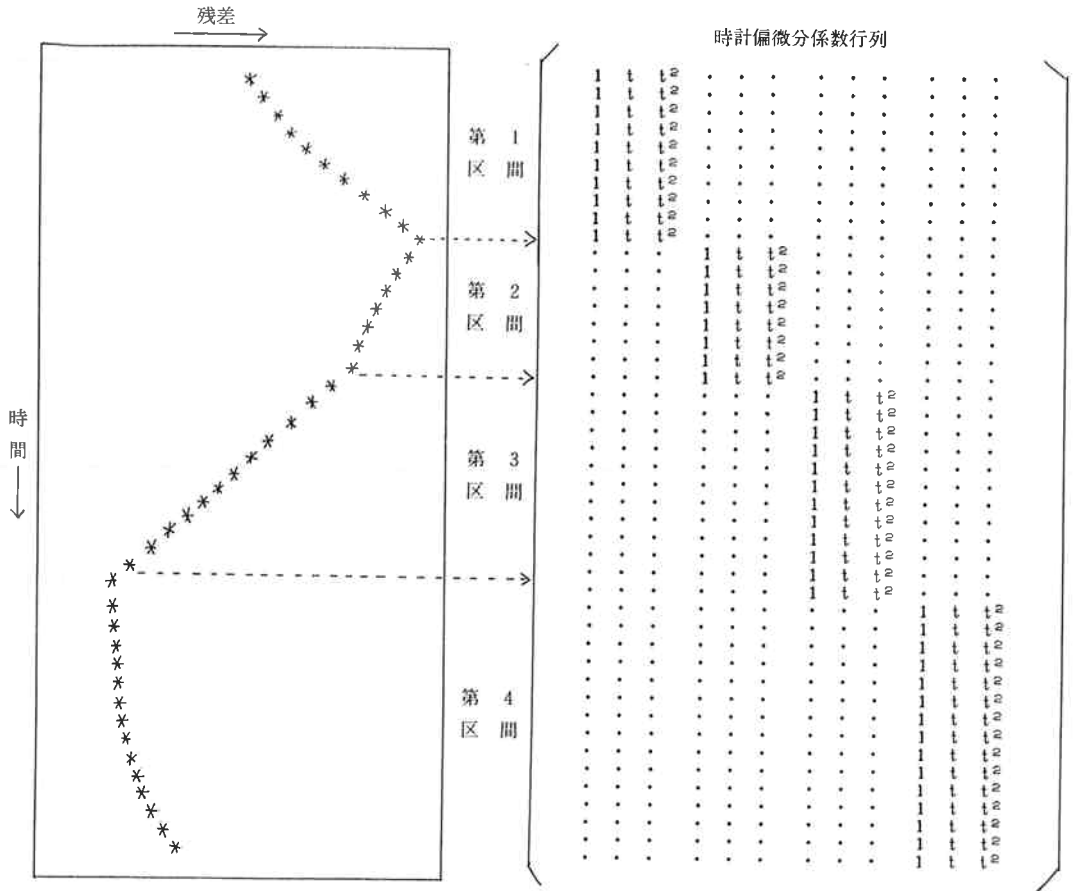
$$\frac{\partial\tau_p(EL)}{\partial\tau_p(90^\circ)} = f(EL) \quad \dots\dots(49)$$

$f(EL)$ は一般に無単位でかつ1~10程度の量であるためスケールングは特に必要がない。Mark-IIIグループにおいて使用されているChao<sup>(7)</sup>の中性大気モデルでは

$$f(EL) = \frac{1}{\sin EL + \frac{0.00143}{\tan EL + 0.0045}} \quad \dots\dots(50)$$

で与えられる。また電離層では、 $f_0F2$ 層の完全層状を仮定して次式が使用できる。

$$f(EL) = \frac{1}{\cos \left\{ \sin^{-1} \left( \frac{R_0}{R_0 + h_m} \cos EL \right) \right\}} \quad \dots\dots(51)$$



第3図 残差が4個の時計区間に区分される場合の時計偏微分係数行列の構造

ここで  $R_0$  は地球半径,  $h_m$  は F2 層の平均高度である。

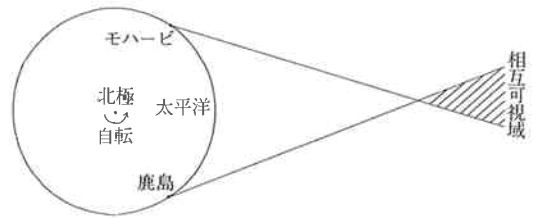
2.4.5 パラメータ間の相関

最初に局位置と時計パラメータ間の相関関係を分析する。VLBI ではあらゆる最小2乗解析において、時計パラメータの同時決定が必要である。これは相関方式測定法の宿命とも言える。前述のように(38)式

$$\partial\tau_g/\partial X \approx -\frac{1}{c} R_3(\theta)s \quad \dots\dots(38)$$

は、 $\partial\tau_g/\partial X$  が星方向ベクトルを GAST( $=\theta$ ) だけ、Z 軸に対して、時計方向に回転して得られることを意味する。ところが、大陸間基線の VLBI 観測においては、両局からの可視域 (第4図参照) は、地球の自転方向つまり、反時計方向の Z 軸まわりの座標変換  $R_3(-\theta)$  で表現できる。つまり(38)式は次式で近似できる。

$$\partial\tau_g/\partial X \approx -\frac{1}{c} R_3(+\theta)R_3(-\theta)\mathbf{1} = -\frac{1}{c}\mathbf{1} \quad \dots\dots(52)$$



第4図 太平洋横断基線における相互可視域の模式図

ここで  $\mathbf{1}$  はノルム1の固定ベクトルである。(52)式は、局位置偏微分係数が、大陸間基線においては、ほぼ一定になり易いことを示している。(40)式に示したとおり、時計の零次係数による偏微分係数は一定値1であることから、局位置偏微分係数との従属性を小さくする観測計画が、大陸間実験では特に求められる。

第1表に、1984年2月の第2回日米間システムレベル実験のスケジュールにおける共分散解析の結果を示す。x, y, z のみの結果と時計を加えた結果を比較すると、

第1表 第2回目システムレベル実験の観測スケジュールにおける共分散解析結果，時計パラメータのない時にはY成分が悪いが，時計パラメータを含めるとY成分が良くなっている。

推定パラメータの成分	条件	時計パラメータなし	時計パラメータあり	
			0 次のみ	0 次と 1 次
局位置 パラメータ	X	2.06cm	3.16cm	3.17cm
	Y	3.74cm	2.05cm	2.05cm
	Z	2.41cm	3.44 cm	3.44cm
時計 パラメータ	0 次	—	0.12 ns	0.13 ns
	1 次	—	—	0.07 ns/h

第2表 第2回目システムレベル実験におけるパラメータの相関係数表

パラメータ		局位置パラメータ			時計パラメータ		
		X	Y	Z	0 次	1 次	2 次
局位置 パラメータ	X	1	0.30	-0.86	0.85	0.28	-0.29
	Y	—	1	-0.33	0.39	0.11	-0.14
	Z	—	—	1	-0.84	-0.26	0.27
時計 パラメータ	0 次	—	—	—	1	-0.15	0.08
	2 次	—	—	—	—	1	-0.97
	1 次	—	—	—	—	—	1

Y 成分と X, Z 成分の比が逆転していることがわかる。観測計画の評価のための共分散解析では必ず時計も含めなければならないことがわかる。

地球回転パラメータと、局位置とが完全な従属関係にあることは既に述べた。従って大陸間基線では、地球回転パラメータと時計パラメータが相関をもつことは直ちに推察できる。実際、(45)式に(52)式を代入すれば次の近似式が得られる。

$$\partial\tau_g/\partial\mathbf{R} \approx -\frac{1}{c}\mathbf{1} \times \mathbf{B} \quad \dots\dots(45')$$

基線ベクトル  $\mathbf{B}$  は固定値であるので、 $\partial\tau_g/\partial\mathbf{R}$  は一定値化されやすいので、時計パラメータとの従属性が高い。

第2表に第2回システムレベル実験における相関係数表を示す。以上に述べた組合せ以外に、時計パラメータ間にも強い相関があることがわかる。

2'4.6 偏微分行列の合成

前述してきた、パラメータの独立性の検討は、1 基線による観測の場合の偏微分行列におけるものであった。しかし異なる日時の複数実験の合成や、多基線組合せ合成によって、より複雑な行列ができる。KLEAR はこう

した合成を可能にしている。

こうした合成は次に述べる新しい解析を可能にする。

- (1) 多基線化により、局位置と地球回転パラメータは一次独立となり、同時推定が可能となる。第5図(a)に4局6基線による観測に対応するヤコビアン行列を示す。明らかに、これら両者間の一次独立性がわかる。
- (2) 1 基線により、異なる日時で行った実験を合成したヤコビアン行列を第5図(b)に示す。この例の場合には、局位置変数は複数日にわたって同一であるが、地球回転パラメータは複数組に分けられる。異なる日時での実験ごとに、地球回転パラメータが変化してゆくためである。
- (3) 多基線・複数日も可能である。この場合、解析目的を鮮明にして、選択するパラメータを厳選しなければ、いたずらに最小2乗法を複雑にしてゆく恐れがあり注意が必要である。

第5図(a), (b)において、ヤコビアン行列の列ベクトルは大きく2つのグループに分けられる。基線や実験ごとに分離した「アーク構造」をもつ列ベクトルと、ヤコビアン行列全体に固定される「グローバルパラメータ」列ベクトルに分けられる。また時計パラメータは、第3図(b)に示した各局ごとの「アーク構造」をとる。



		第2局		第3局		第4局		汎変数		
1-2 基線	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
1-3 基線	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
1-4 基線	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
2-3 基線	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
2-4 基線	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
3-4 基線	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S

(a) 多基線を複合して解析する時のヤコビアン行列の構造の一例 (4局6基線を合成する場合)

		局位置	第1アーク	第2アーク	第3アーク	第4アーク				
第1実験	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
第2実験	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
第3実験	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
第4実験	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S
	X	Y	Z	A	B	C	D	W	U	S
	Y	X	Z	A	B	C	D	W	U	S

(b) 異なる日時の複数実験を解析する時のヤコビアン行列の構造の一例 (4実験を合成する場合)

第5図

合成する行列数の増大と共に、アーク構造をもつ列ベクトルに対応するパラメータ (アークパラメータ) の数は比例して増大する。従って、アークパラメータの推定精度は必ずしも向上しない。しかし、グローバルパラメータは、合成する行列数の増大により、推定精度が向上することが期待される。

2.5 誤差と残差

観測量  $\tau$  の真値 (不可知量) を  $\tau_i$ , 観測値を  $\tau_0$ , 事前計算値を  $\tau_c$ , 最小2乗推定に基づく値を  $\tau_e$  とすると、次の関係がある。

$$\text{真の誤差 } \varepsilon = \tau_0 - \tau_i \quad \dots\dots 53$$

$$\text{事前残差 } v_a = \tau_0 - \tau_c \quad \dots\dots 54$$

$$\text{事後残差 } v = \tau_0 - \tau_e \quad \dots\dots 55$$

VLBI の解析では、特に真の誤差  $\varepsilon$  と事後残差  $v$  (以下残差  $v$  と略す) の相違を明確にする必要がある。真の誤差の代表的なものは、S/N 誤差である。III-5 のバンド幅合成において、コヒーレンスから S/N 誤差を求める方法が述べられているが、観測システムの条件から、一意的にこの誤差を計算することができる。ところが一般に、最小2乗推定後の事後残差  $v$  は、S/N 誤差から予測される大きさの数倍となることが多い。この原因は十分に解明されていないが、基本的には事前計算値  $\tau_c$  や事後計算値  $\tau_e$  を計算するために使用した物理モデルと、推定されるパラメータに関する偏微分係数が正確でないためであろう。

統計学は、こうした場合に、2種の方法を提供してくれる。第1は、モデルの不十分さを当面受け入れ、現実の観測残差を、ヤコビアンの重み付けへ帰還させる手法である。

第2の方法は、モデルの不十分さを補償するために、適当な高次項を導入して残差を小さくするパラメータを推定する。この結果から逆に高次項に新しい物理的意味付けをする<sup>(3)</sup>。ここではこの手法については触れない。

第1の方法を KLEAR では採用したので、これについて検討しよう。真の分散  $\sigma^2$  は次式で定義できる。

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tau_{0i} - \tau_{i_i})^2 \quad \dots\dots 56$$

ここで  $n$  は観測点数を示す。ところが真値  $\tau_{i_i}$  は不可知量であるから、事前や事後の計算値  $\tau_c$  または  $\tau_e$  で代用する必要がある。事後残差の分散  $\sigma_v^2$  は次式で与えられる。

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tau_{0i} - \tau_{ei})^2 \quad \dots\dots 57$$

この式は次の様に展開できる。

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{n} \sum (\tau_{0i} - \tau_{li} + \tau_{li} - \tau_{ei})^2 \quad \dots\dots 58$$

$$= \frac{1}{n} \{ \sum \varepsilon_i^2 + 2 \sum \varepsilon_i (\tau_{li} - \tau_{ei}) + \sum (\tau_{li} - \tau_{ei})^2 \}$$

.....59

ここで  $\varepsilon_i$  のランダム性から、 $n$  が十分大きい時に、第2項は0と近似してよい。結局59式は

$$\sigma_0^2 = \sigma^2 + \frac{1}{n} \sum (\tau_{li} - \tau_{ei})^2 \quad \dots\dots(60)$$

この(60)式の右辺第2項は不可知量  $\tau_{li}$  を含むので、計算によって知ることは不可能である。多分これらの項は、観測星の仰角や地方時に対する未知の依存性を有しており、物理モデルを限りなく正確に改良すれば次第に追い込まれてゆくであろう。

しかし、現実のモデルは不正確さをまぬがれないので、KLEAR では SOLVE と同様の“再重み付け”の手法を採用する。

(60)式において、第2項を無視すると、

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{n} \sum \{\varepsilon_i^2 + (\tau_{li} - \tau_{ei})^2\} \quad \dots\dots(61)$$

である。 $\varepsilon_i$  は S/N 誤差  $\sigma_{S/N}^2$  とし、 $|\tau_{li} - \tau_{ei}| = \sigma_{add}$  として、特に  $\sigma_{add}$  は  $i$  に無関係の量とする。観測値  $\tau_{oi}$  が正規分布  $N(\tau_{ei}, (\sigma_{S/N}^2 + \sigma_{add}^2))$  に従う独立な確率変数であると仮定すると、規格化した平方和であるカイ2乗  $\chi^2$  は次式で与えられる。

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^n (\tau_{oi} - \tau_{ei})^2 / \{(\sigma_{S/N}^2 + \sigma_{add}^2)\} \quad \dots\dots(62)$$

$\chi^2$  は自由度  $n-m$  の  $\chi^2$  分布に従うが、 $n-m$  が大きくなると、 $\chi^2$  分布の両側棄却域の対称性が増して、中央値は自由度  $n-m$  で近似できる。つまり(62)式は自由度  $n-m$  に等しいと近似してよい。従って次式が得られる。

$$\frac{\sum_{i=1}^n (\tau_{oi} - \tau_{ei})^2}{(\sigma_{S/N}^2 + \sigma_{add}^2)} \doteq n-m \quad \dots\dots(63)$$

この(63)式から、ニュートン法で、 $\sigma_{add}$  を数値的に決定できる。この  $\sigma_{add}$  を S/N 誤差に付加して、重み付けヤコビアン行列をつくり、最小2乗解を得ることを再重み付けと称する。

この再重み付けと(19)式で述べた誤差の換算とは厳密に区別する必要がある。(19)式では、 $n$  個の観測全体の正規誤差  $\sigma_{formal}$  に対して、現実の残差による換算係数を掛けているが、重み付け自体は、S/N 誤差のみを使用している。一方(63)式の手法は、個々の観測について、一定項の分散を付加し、現実の残差を反映させて、最小2乗法をやり直している。そして再重み付け後に、若干の誤差の換算が必要になることも多く、両者は、併用して用いられるべきものである。

### 3. KLEAR の構成とその運用

以上述べてきた、VLBI による基線解析のアルゴリズムを実現するものが、解析ソフトウェア KLEAR である。

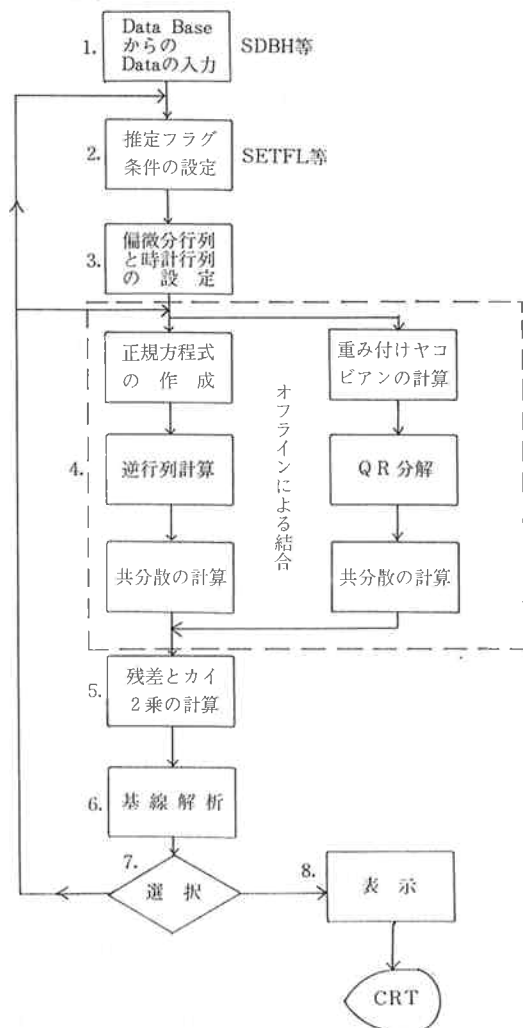
ここでは最初に KLEAR の構造を明らかにし、特に KLEAR の各部分が、以上に述べてきた手法をどの様に具体化しているかを説明し、次に KLEAR の運用実例を示す。

当然のことながら、KLEAR はまだまだ運用実績が少なく、長期的な運用経験が最も重要視される VLBI ソフトウェアとしての力量は未知である。

ここでは、現状での運用例を示し、これまでの運用から明らかとなった改良すべき点を最後にまとめて示す。

#### 3.1 KLEAR の構造

KLEAR の全体的構造を第6図に示す。米国側との解析結果の比較を容易にするために、米国側と共通する機能の部分については、SOLVE のプログラム名及び基本的なアルゴリズムをそのまま採用している。しかし、K-3ソフトウェアの最大の特徴である統一のデータベースや、標準的 OS の採用を実現するために、米国と共通



第6図 KLEAR の処理手順の流れ図

する機能の部分についても、プログラム自体は全面的に書き変えている。

米国側 SOLVE は、研究者が職人的作風で作りあげてきたものであるため、ソフトウェアシステムとしては、様々の問題点をもっている。特にソフトウェアの改良や改訂が作成した本人でなければ不可能に近い点は、重大な問題である。

KLEAR は効率や処理速度をある程度犠牲にしながらも、システムとしての標準化・体系化を意識して製作された。この経験は、今後の大型計算機上での解析ソフトウェアの製作において生かすものであろう。

第6図に示す様に、KLEAR は大きく8個の部分に分けられる。

第1は、データベース KASTL からデータを入力して中間ファイル上に利用しやすい型式に出力する機能をもつ部分であり、第2は、推定パラメータのフラグ管理のための対話的フラグ設定のための部分であり、第3は、偏微分行列と時計係数行列の設定を行う部分である。これらの機能は、KLEAR と SOLVE では基本的に同一である。第4の最小2乗推定を実行する部分については、まだ完全ではないが、米国方式の逆行列法と KLEAR 独自の QR 分解法のいずれかが選択できる。

SOLVE では、この部分は(1)正規方程式の作成、(2)逆行列の計算、(3)共分散の計算、の機能を果たす3部分に分かれている。

QR 分解方式では、(1)重み付けヤコビアン行列の作成、(2)QR 分解の実行、(3)共分散の計算、の3部分に分けられる。

第5の部分は、最小2乗法で得られたパラメータを使って、残差やカイ2乗を計算する。そして、この結果を使って、第6の部分で基線解析を行う。

以上が基本的な処理の流れであり、この処理を円滑かつ柔軟に行うために、第7の部分で対話的に手順の選択ができる。

最後の第8の部分は、計算結果のうち、特に最小2乗推定後の残差を、いろいろな手法で表示するためのものである。

以下に、各部の機能を詳述する。( )内は KLEAR (または SOLVE) におけるプログラム名である。

### 3.1.1 データベース・インタフェース (SDBH 他)

IV-2, VI-3, VI-4 において詳細に述べられている様に、K-3 データベースは、システム全体を統一的に取扱うことを可能にする日本独自のアイデアを盛り込んだものである。スキーマと呼ばれる目的別のファイル構造を有効に利用した一括取り込みの機能があり、KLEAR は必要とするデータを、アクセスキーを指定するだけ

で、ただちにデータベースより読み出すことができる。SOLVE では、必要なキーコードを必要数だけ繰り返し読み出しており、プログラムが煩雑なものになっている。

### 3.1.2 推定パラメータフラグの設定 (SETFL 他)

推定するパラメータは、大きく観測局固有のもの、局に依存しないものに分けられる。

#### (1) 局固有のパラメータ

- a. 局位置 XYZ 3成分
  - b. 時間区分された時計パラメータ
  - c. 中性大気天頂遅延
  - d. 電離大気天頂遅延 (QR 分解時のみ使用可)
- 以上のパラメータは局毎に独立に設定できる。

#### (2) 局に依存しないパラメータ

- a. 星位置 (赤経, 赤緯), 固有運動
- b. 地球回転パラメータ (極運動, UT 1)
- c. 章動・地球潮汐パラメータ (現在開発中)

以上の2種のパラメータは、推定する時に会話的にフラグを1と設定し、推定しない時に0を設定することで、自由に操作が可能である。第7図に KLEAR におけるフラグセットの一例を示す。

### 3.1.3 ヤコビアン行列の作成 (PROC)

3.1.2 においてセットされたフラグのうち、ON のものだけについて、偏微分行列と時計行列の設定をこの部分でおこなう。時計行列とは時計パラメータに関する偏微分行列である。作成したヤコビアン行列Aはしばしば

```

HAYSTACK PARAMETER FLAGS
X, Y, Z, XDOT, YDOT, ZDOT      0 0 0 0 0 0
AXIS OFFSET                      0
CLOCK POLYNOMIALS
80/10/21 22: 3                   1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 * * * *
80/10/21 13: 4                   1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 u * * * *
-----
ATOMOSPHERE PARAMETERS
60/10/21 22: 2                   1
-----
HRAS OBS PARAMETER FLAGS
X, Y, Z, XDOT, YDOT, ZDOT      1 1 1 0 0 0
AXIS OFFSET                      0
CLOCK POLYNOMIALS
80/10/21 22: 3                   1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 * * * *
80/10/21 13: 4                   1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 * * * *
-----
ATOMOSPHERE PARAMETERS
80/10/21 22: 2                   1
-----
STAR COORDINATE FLAGS
1642+690 RA, DEC, &PR, MOTION  0 0 0 0
20345 RA, DEC, &PR, MOTION     0 0 0 0
VR422201 RA, DEC, &PR, MOTION  0 0 0 0
04208 RA, DEC, &PR, MOTION     0 0 0 0
30484.3 RA, DEC, &PR, MOTION   0 0 0 0
2134+00 RA, DEC, &PR, MOTION  0 0 0 0
4067.05 RA, DEC, &PR, MOTION   0 0 0 0
0106+013 RA, DEC, &PR, MOTION  0 0 0 0
0235+164 RA, DEC, &PR, MOTION  0 0 0 0
NR0150 RA, DEC, &PR, MOTION    0 0 0 0
0562+390 RA, DEC, &PR, MOTION  0 0 0 0
01287 RA, DEC, &PR, MOTION     0 0 0 0
4039.25 RA, DEC, &PR, MOTION   0 0 0 0
30273B RA, DEC, &PR, MOTION    0 0 0 0
-----
POLAR MOTION AND UT1 PARAMETERS
80/10/21 22: 3 YWOB COEFFICIENTS 0 0 0 0
80/10/21 22: 3 YWOB COEFFICIENTS 0 0 0 0
80/10/21 22: 3 UT1 COEFFICIENTS  0 0 0 0
80/10/22 0: 0 XWOB COEFFICIENTS  0 0 0 0
80/10/22 0: 0 YWOB COEFFICIENTS  0 0 0 0
80/10/22 0: 0 UT1 COEFFICIENTS   0 0 0 0
    
```

第7図 パラメータ推定フラグを設定する画面の一例。上半分は局固有パラメータ、下半分は局に依存しないパラメータを示す。

巨大なメモリ空間を費すので、逆行列法では、ディスクファイル中に格納している。

QR 分解法の場合にはヤコビアン行列  $A$  を直接繰り返して使用するのに便利のようにメモリ空間を拡張して常駐させる方式とした。更に、この段階で正規方程式の条件数を改善するためにヤコビアン行列の列ベクトルに対してスケールリングをする。

また、重み行列  $W$  もここでは計算されている。

結局、次に例示する2種の行列がここで求められる。この例では、一基線による観測で、時計多項式は観測時間帯が3つに区分されていると仮定している。

$$A = \begin{pmatrix} \partial\tau^1/\partial X & \partial\tau^1/\partial Y & \partial\tau^1/\partial Z & 1 & UT & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial\tau^2/\partial X & \partial\tau^2/\partial Y & \partial\tau^2/\partial Z & 1 & UT & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 1 & UT \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & UT & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 1 & UT \\ \partial\tau^n/\partial X & \partial\tau^n/\partial Y & \partial\tau^n/\partial Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & UT \end{pmatrix} \quad \dots\dots(64)$$

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{pmatrix} \quad \dots\dots(65)$$

3.1.4 最小2乗法の計算

KLEAR では、最小乗の計算は、SOLVE で用いられている逆行列計算法と、まだ不完全であるが、QR 分解による方法とを使い分けることが可能である。従ってこの2つの手順を分けて説明する。

(1) 逆行列方式

a. 正規方程式の作成 (PROC 後半)

(64), (65)式で得られたヤコビアン行列  $A$  と重み行列  $W$  とから、次式に従って正規行列  $B$  を作成する。

$$B = A^T W A \quad \dots\dots(66)$$

しかし、 $A$  はディスクファイル中にあるので、(66)式をメモリ上のマトリックス演算とせず、ファイルを順に読みながら、 $B$  の各要素を順次加算する方式をとっている。つまり(66)式は次式の様に変形できるので、

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} w_{kk} \quad \dots\dots(67)$$

ここで、 $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $w_{ij}$  はそれぞれ  $A$ ,  $B$ ,  $W$  の  $(i,j)$  成分である。従って各  $b_{ij}$  に対して

$$b_{ij} = b_{ij} + a_{ki} a_{kj} w_{kk} \quad \dots\dots(68)$$

という加算を  $k=1 \sim n$  まで繰り返すことで、重み付けされた正規行列  $B$  を得ることができる。同様に正規方程式 (11') の左辺  $D = A^T W Y$  も計算することができる。

$$d_j = d_j + A_{kj} y_k w_{kk} \quad \dots\dots(69)$$

(68)式と(69)式により正規方程式が得られた。

b. 逆行列の計算 (NORML)

逆行列  $B^{-1}$  の計算はピボットリングを考慮したガウスジョルダン消去法を用いて行う。基本アルゴリズムは次の通りである。

```
input n, [bij]n×n
for k=1, 2, ...n :
  for j=1, 2, ...n :
    bkj = bkj / bkk
  next j
  bkk = bkk-1
for i=1, 2, ...n :
  if i≠k then
    for j=1, 2, ...n :
      bij = bij - bik · bkj
    next j
    bik = -bik · bkk
  end if
next i
next k
output [bij]n×n
.....(70)
```

これに更にピボットリングによる列の選択のアルゴリズムが付加されているが複雑になるので省略した。

c. 共分散の計算 (COVP)

以上によって求められた逆行列  $B^{-1}$  からまず相関行列(7)式を計算し、全要素の中から絶対値が1に近い順に、10個の要素のインデックスと相関係数を表示する。また、 $B^{-1}$  の対角成分はパラメータ条件数であるので、これを全て表示し、50以上のパラメータ条件数のものがあるかどうかをチェックできる様にしている。第8図にこの表示例を示している。

また、逆行列  $B^{-1}$  はヤコビアン行列を作成する段階で与えたスケールリング用の係数を補正することで共分散行列となる。共分散行列の対角成分は、各パラメータの正規誤差と呼ばれ、各パラメータ推定値のランダム誤差

THE TEN LARGEST ELEMENTS OF THE CORRELATION MATRIX

	I	J	VALUE
1.	7	6	-.9694
2.	5	4	-.9185
3.	4	2	-.9045
4.	5	2	-.8919
5.	3	1	-.7956
6.	5	1	-.6027
7.	8	2	-.5642
8.	8	3	-.5569
9.	8	5	-.5216
10.	4	1	.4700

PARAMETER	CONDITION	NUMBERS						
:	1	2	3	4	5	6	7	8
0 :	4	5	3	5	13	8	6	4

第8図 大きい方から10個の相関行列成分とパラメータ条件数の表示例

の目安を与える。

この共分散行列の計算には、実際の測定量  $y$  や  $O-C$  は全く関与していない。観測スケジュールと  $S/N$  誤差から決められた重み行列が使用されているのみである。この点については、2.2の概論において述べた。

以上で、逆行列方式の手順は終了し、3.1.5で述べる残差とカイ2乗の計算へ進む。

(2) QR 分解方式

a. 重みづけヤコビアン行列の作成

QR 分解方式では、HP/1000計算機の拡張メモリ機能(EMA)を使って、ヤコビアン行列  $A$  を常駐させているので、行列演算を直接実行できる。そして重みづけされたヤコビアン行列  $W^{1/2}A$  を計算する。 $W^{1/2}$  は次式で与えられる。

$$W^{1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{\sigma_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\sigma_n} \end{pmatrix} \quad \dots\dots(65)$$

ここで  $\sigma_i$  は  $i$  番目の観測における  $S/N$  誤差である。

以下では  $W^{1/2}A$  を再び  $A$  と表記することとする。

b. QR 分解部

修正グラムシュミットの方法で  $A$  を  $QR$  分解する。ただしピボットングとランク落ちの判定は以下に述べる基準で自動的に行うことがびきる。このアルゴリズムは次の通りである。

- (i) for  $j=1, 2, \dots, m$
- (ii)  $A$  の列ベクトル  $a_j$  から  $a_m$  のノルム順序を示すベクトル  $s$  を求める。
- (iii)  $j'=s_j$  とする ( $j'$  はノルムの大きい順を示す)
- (iv)  $R_{jj} = \|a_{j'}\|$  (対角成分の計算)
- (v)  $q_{j'} = a_{j'} / R_{jj}$  ( $j'$  列ベクトルの正規化)
- (vi) for  $k=j+1, \dots, m$  ( $j \neq m$ )
  - (vii)  $k' = s_k$  とする
  - (viii)  $R_{jk} = q_{j'}^T a_{k'}$
  - (ix)  $a_{k'} = a_{k'} - R_{jk} q_{j'}$
- (x) 手順おわり
- (xi) 手順おわり

このアルゴリズムにより、次の2つの課題が実現される。

- (1) 相互相関係数の小さい順に列ベクトルを選択することにより、上記の直交化のプロセスの中の(iii)式の引算の桁落ちを最小化できる。
- (2) 上記(ii)のノルムの順に選択してゆく列ベクトルについて、既に選択された列ベクトル群との直交性を検定し、独立成分が計算機の有効桁から見て無意味となる程度に小さくなった時、ランク落ちが生じたと判定する。

以上のプロセスにより  $W^{1/2}A$  は正規直交行列  $Q(q_1 \dots q_m)$  と三角行列  $R(m, m)$  に分解できる。但し以下の議論でのインディックス  $m$  はランクに等しいとし、ランク落ちによって可観測性が無いと判定される推定パラメータは推定しない。

(3) 共分散の計算

$W^{1/2}A$  が  $QR$  分解されれば、正規行列  $B$  は次式の様に变形できる。

$$B = A^T W A = R^T Q^T Q R = R^T R \quad \dots\dots(72)$$

従って、 $B^{-1}$  は  $R^{-1}$  が求められれば直ちに計算できる。 $R$  は三角行列であるから、逆代入法で容易に  $R^{-1}$  を求めることができる。つまり次式により逆行列  $B^{-1}$  が求められる。

$$B^{-1} = (R^T R)^{-1} = R^{-1} (R^{-1})^T \quad \dots\dots(73)$$

以下、逆行列法の場合と同様にスケールングを補正して共分散行列が求められる。

3.1.5 残差とカイ2乗の計算 (CRES, ADJUST)

以上の2つの方法により、最小2乗解が  $\hat{x}$  求められるので、これを用いて観測量の事後計算値  $\hat{y}$  が次式で求められる。

$$\hat{y} = A \hat{x} \quad \dots\dots(74)$$

SOLVE ではディスクファイル上の  $A$  を読みながら  $\hat{y}$  が計算されるが、QRSEP 法では、EMA に常駐している  $A$  を利用して高速で(74)が求められる。この  $\hat{y}$  と観測値  $y$  とから残差  $v$  やカイ2乗  $\chi^2$  が次式で求められる。

$$v = y - \hat{y} \quad \dots\dots(75)$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{\sigma_i^2} \quad \dots\dots(76)$$

また、(19), (20)', (20)'' 式等を用いれば、換算誤差や RSMS, RWMS 等を計算でき、オペレータに表示する。特にカイ2乗が自由度にほぼ等しいかどうかは正規方程式の条件の良否にとって重要である。

3.1.6 基線解析 (BASFE)

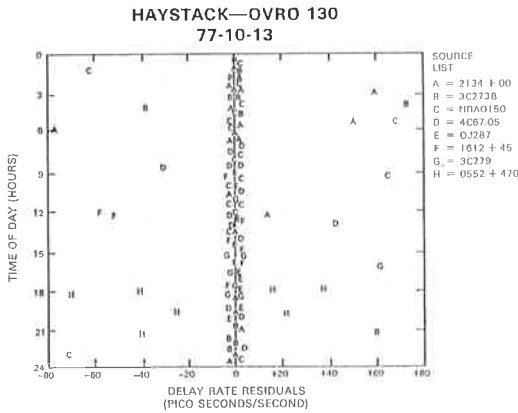
3.1.5 で求められた換算誤差は、推定パラメータ、例えば、局位置3成分の推定誤差である。求める基線ベクトルは、2つの局位置の差で与えられるので BASFE では、基線ベクトルとその推定誤差を直交座標系、極座標系、及び円柱座標系を用いて、局位置3成分の推定誤差をもとにして計算し表示する。

3.1.7 作業選択

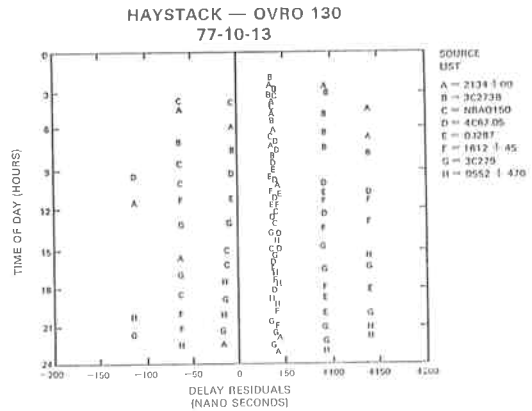
以上により、一通りの作業が完了し、オペレーターは次の動作を会話的に、計算機が表示する選択枝によって、自由に設定できる。特に2.5で説明した再重み付けの選択は重要な再試行作業である。

3.1.8 表示部

表示部の各機能については、3.2において実際例に基



第9図 遅延率残差(横軸)を時間(縦軸)に対してプロットしたもの。中央に分布しているデータは良好であるが、大きくはずれたデータは不良データとしてマークが付けられる。



第10図 遅延量残差(横軸)を時間(縦軸)に対してプロットしたもの。規則的な分布が見られる。

ついて説明する。

### 3.2 KLEAR の運用例

#### 3.2.1 不良データの除去

帯域幅再合成において、相関強度が小さく S/N が低い時には、相関ピークを誤ることがある。これを防ぐことは非常に困難であるので、KLEAR の中で除去をする。この除去は、遅延率の残差  $v_r$  を表示することで可能となる。第9図はこの一例で、図の中央に一列に並んだ多数のデータ群はほぼガウス分布をした“正常”なものと考えられ、この分布から求めた標準偏差の  $\sigma$  3 倍以上離れたデータは「不良」と考えて大きな誤りは無いと考えられる。これらには不良マークが付けられて、データベースに保管され、以下の最小2乗推定には使用しない。

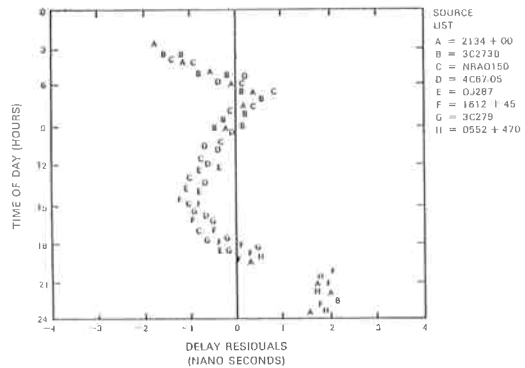
#### 3.2.2 遅延量の規則的の移動作業

S/N の良い観測においても周期的に繰り返し出現する別の相関強度のピークを捕えることがある。相関ピークの周期的間隔は、帯域幅合成における周波数間隔の最大公約数の逆数で与えられる。第11図に一例を示すが、非常に規則的に、遅延の残差プロット図に現れる。規則性が高いので、最も分布密度の高い列にシフトさせることは自動的にできる。このシフト量もデータベース上に記録される。

#### 3.2.3 時計多項式

以上のプロセスが終了すると、全部の星に共通する時計の2局間での相対的な動きが見えてくる。第11図は時計の動きの一例である。このままでは、時計差に邪魔されて、高精度の基線解析は実行できないので、時計の動きの屈曲点やジャンプ点を境界とする区分を行う。この区分化の数学的方法は2.4.3で述べている。しばしば時計の区分を数個以上に増加させる必要性が生じるが、こ

### HAYSTACK—OVRO 130 77-10-13



第11図 2局の時計の差が不規則に変動をしている場合の遅延量の残差プロット

れは時計パラメータ間の相関を強め、かつ自由度を急速に減少させるため、好ましいことではない。従って、特に多基線の場合には、時計の変動した局を発見し、時計の区分の総数を減少させ、推定すべきパラメータをむやみに増加させないようにする必要がある。

#### 3.2.4 較正

この段階で、電離層、ケーブル長、大気等の補正による較正を行う。既に残差が数ナノ秒程度になっているので、補正結果が適当かどうかの判定がしやすいのである。

#### 3.2.5 パラメータ推定

以上により、帯域幅合成における相関ピークの補正と両局の時計の相対的な動き、および伝搬媒質の影響などが補正された。そこで、いよいよ、求める基線ベクトルなどのパラメータのフラグを ON にして推定に入れることができる。

最小2乗推定後の残差や、相関係数表や種々の条件数の表示を見て、最小2乗が良い条件で行われたと判断した場合には、その結果の記録をとると共に、その推定処理の行われた諸条件をデータベースにセットする。

以上が1基線1実験の場合の解析手順である。これにより、比較的順調に残差の r.m.s. は0.1~0.2ナノ秒まで小さくなる。更に、多基線同時推定、多実験の複合推定等のより高度な手法を用いて、一層高い精度で基線ベクトルを求めることができる。

### 3.3 KLEAR の今後の改善点

計算機の能力不足や、解析の実績の少なさから KLEAR は次の問題点をもつ。

- (1) ディスク容量の不足により、複数実験の合成を実行できない。データ解析専用計算機または大型計算機が必要である。
- (2) KLEAR の中に QR 分解機能が完全に包含されていない。現在はオフラインで結合する必要がある。
- (3) データベースからのデータの読み出し速度が遅い。これは、計算機を相関処理、バンド幅合成、予測値計算そしてデータ解析のすべてに使用するために引き起されるデータベースへの干渉を防止することを最優先としたためである。
- (4) 章動や地球潮汐パラメータについての最小2乗推定に必要な偏微分係数等は用意されているが、推定フラグの設定が出来ていない。

今後こうした問題点を改良してゆく必要がある。

## 4. おわりに

電波研究所の VLBI 計画の中心課題は、日米共同実験による基線ベクトルの精密な測定である。従って、この KLEAR は、実験の最終的解析のためのソフトウェアとして、非常に重い責任をもっている。ところが KLEAR を理解し運用するためには、多くの手順が必要なことから敬遠される傾向がある。KLEAR の今後の発展にとって、使用実績を増大することが重要であると考えて、実用性の面から KLEAR を紹介する目的でこの論文を記述した。単に実用面とは言っても、解析結果の分析のためには、偏微分ベクトルの独立性の理論や、カイ2乗検定による誤差の分析の理論をある程度理解しておく必要があると判断し、多くの紙数をあてた。

KLEAR は2つの課題を負っている。第1は3.3で述

べた問題点を改善してゆくことであり、第2は、急速に改良され更新されてゆく米国の Mark-III 解析システムとの間の解析結果やアルゴリズムの相互比較と互換性の課題である。この2つの課題は相互に関連しており解決は容易ではないが、多く研究者による解析経験の増大の中で、解決の展望が得られると期待している。

この論文は実用的側面と問題点の指摘だけの意義に終るものではない。以下の重要な成果をもつ。

- (1) 史上初めての日米間の基線解析に使用した(V-1 参照)。
- (2) VLBI 解析にはじめて QR 分解法を導入した。
- (3) Mark-III SOLVE の誤差解析方法を分析した。

## 謝 辞

KLEAR を製作するにあたり、NASA/GSFC の C. Ma 博士、J. Ryan 博士、B. Schupler 博士そして T. Clark 博士の各氏から、必要な情報の提供、問題点の解決のための助言を幾度となく頂きました。また KLEAR は SOLVE を母体としている部分が多くあります。これらの各氏に深く感謝致します。

KLEAR の製作にあたった日本電子開発株式会社の方々に感謝致します。

## 参 考 文 献

- (1) Ryan, J.W., Ma, C., and Vandenberg, N. R.; "The Mark-III VLBI Data Analysis System", NASA X-945-80-25, 1980.
- (2) Forsythe, G. E., Malcolm, M. A., and Moler, C. B., 計算機のための数値計算法, 森正武, 訳, pp. 212-252, 科学技術出版社, 1978.
- (3) 中川徹・小柳義夫, 最小二乗法による実験データ解析, p. 29-p.53, 東京大学出版会, 1982.
- (4) Ma, C.,; "Very Long Baseline Interferometry Applied to Polar Motion, Relativity and Geodesy" NASA Technical Memorandum 79582, 1978
- (5) Ryan, J.W.,私信, 1982.
- (6) スミルノフ高等数学教程Ⅲ巻一部 p. 107-109, 共立出版, 1968.
- (7) Chao, C.C.; "A Preliminary Estimation of Tropospheric Effect", JPL Memo 391-129, 1970.

