

K - 3型VLBIシステムで用いられている位相較正信号が
相関関数に与える影響について

鹿島支所第三宇宙通信研究室
近藤哲朗、雨谷 純

1. はじめに

測地及び時刻同期を主目的としたVLBI観測では、局内での遅延を補正するために位相較正信号（以下PCAL信号と呼ぶ）が各局毎にフロントエンド部から注入されている⁽¹⁾。PCAL信号が重畳した電波星からの信号は最終的に0～2MHzのビデオ帯域に変換された後、1ビットサンプリングされ、レコーダに記録される。PCAL信号は相関処理時に抽出され、相関関数の位相の補正に使用される。長基線ではPCAL信号同志の相互相関は無視できる。これは、相関処理の際に行われるフリンジストップング⁽²⁾と呼ばれる操作によりPCAL信号同志の可干渉性が失われるためである。もう少し詳しく説明すると、電波星からの信号は、地球が自転することによって生じるドップラーシフトを受けているためそのまま相関処理を行ったのでは電波星からの信号の相関を得ることができない。そのため、このドップラーシフトに相当する周波数だけ補正（これをフリンジストップングと呼ぶ）を行った後相関処理を行うことにより、電波星からの信号の相関を得ている⁽³⁾。逆に、この補正によって、ドップラーシフトを受けていないPCAL信号同志の可干渉性は失われる。そのため、長基線の場合はPCAL信号が相関関数に与える影響は無視して差し支えなかった。しかし、フリンジストップング操作を必要としない短基線（—局内遅延の精密較正などを目的としたゼロ基線長干渉計はその極端な例である—）では、PCAL信号同志の相関が強くなり現れてしまう。ラグ数を多く取った相関関数であれば、PCAL信号同志の相関を分離することが容易であるが、我々が用いている相関器ではラグ数が僅か8点であるため、PCAL信号（1周期が400点に相当）の分離は不可能である。しかし相関器では8点の相互相関関数を求めるのとは独立にPCAL信号を抽出し、その強度と位相を求める機能がある。この情報を用いることによって、相関関数からPCAL信号同志の相関関数を差し引くことが可能となった。その方法について報告する。

2. 相関器で検出するPCAL信号の強度と位相

帯域0～Bの雑音信号 {n(t)} を分散 σ^2 のガウス雑音とする。PCAL信号 {s(t)} を周期T、振幅(p-p) 2A、初期位相 θ の正弦(余弦)波とする。雑音の重畳したPCAL信号をv(t)とすると、

$$v(t) = s(t) + n(t) \quad (1)$$

と書ける(図1)。ただし、

$$s(t) = A \cos(2\pi f_p t + \theta) \quad (2)$$

ここで、 $f_p (=1/T)$ はPCAL信号の周波数である。

今、v(t)を周期Tで区切り、図2で示される

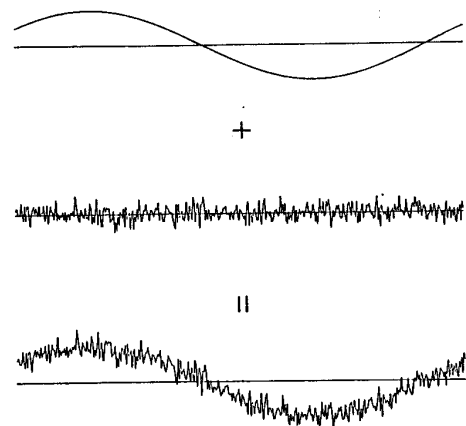


図1. 雑音信号とPCAL信号

ように、たてに並べて考えてみる。さらに時刻 t として、

$$kT \leq t < (k+1)T$$

$$: k = 0, 1, 2, \dots$$

なる t を考える。この t を固定して、周期番号方向 $\{k=0, 1, 2, \dots\}$ に $v(t)$ を見た場合、平均値が $s(t)$ 、分散 σ^2 で表わされるガウス分布雑音となっている。したがって、 $v(t)$ が時刻 t に $x \sim x + dx$ にある確率を $P(x|t) dx$ とすると、

$$P(x|t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-s(t))^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-A\cos(2\pi f_p t + \theta))^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (3)$$

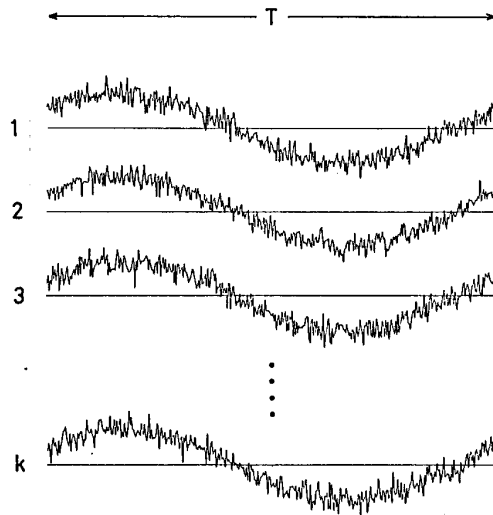


図2. 周期 T で分解した PCAL 信号

さて、 $v(t)$ を 1 bit サンプリングして得られる時系列を $g(t)$ とすると、

$$g(t) = \begin{cases} +1 & : v(t) \geq 0 \\ -1 & : v(t) < 0 \end{cases} \quad (4)$$

である。したがって 1 bit サンプリング後のデータが時刻 t で +1 を取る確率は $P(x|t)$ で x が正となる確率に等しい。これを $Q_+(t)$ とすると、

$$Q_+(t) = \int_0^{\infty} P(x|t) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-A\cos(2\pi f_p t + \theta))^2}{2\sigma^2}\right\} dx \quad (5)$$

ここで、 $(x - A\cos(2\pi f_p t + \theta)) / 2\sigma = z$ と変数変換を行うと、

$$Q_+(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z_0(t)}^{\infty} \exp\{-z^2\} dz \quad (6)$$

ただし、 $z_0(t) = \frac{A}{\sqrt{2}\sigma} \cos(2\pi f_p t + \theta)$ (7)

ここで、

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-s^2) ds$$

で定義される誤差関数を用いると、

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-s^2) ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-s^2) ds - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-s^2) ds$$

$$= 1 - \text{erf}(x)$$

であるから、

$$Q_+(t) = \frac{1}{2} (1 - \text{erf}(-z_0(t)))$$

$$= \frac{1}{2} (1 + \text{erf}(z_0(t))) \quad (8)$$

$$(\because \operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x))$$

したがって、1bit サンプリング後のデータが-1を取る確率を $Q_-(t)$ とすると、

$$Q_-(t) = 1 - Q_+(t) = \frac{1}{2} (1 - \operatorname{erf}(z_0(t))) \quad (9)$$

さて、相関器では $g(t)$ に対して、図3で示される関数 $R(t)$ 、 $I(t)$ をかけ算して、正になった部分のビット数をカウントしている。⁽²⁾ここでカウント値は必ず T の整数倍を単位とする積分時間で出力される。この積分時間を lT ($l = 1, 2, 3, \dots$)とするとカウント値は $g(t)R(t)$ または $g(t)I(t)$ を $0 \sim lT$ に亘って積分したときの期待値に等しくなる。この期待値をそれぞれ E_r 、 E_i とすると、

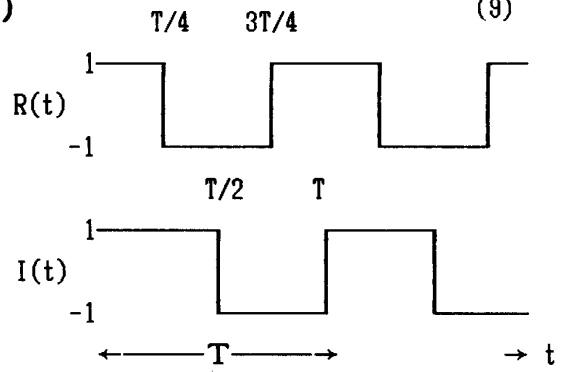


図3. PCAL検出に用いられる関数

$$E_r = l \left\{ \int_0^{T/4} Q_+(t) dt + \int_{T/4}^{3T/4} Q_-(t) dt + \int_{3T/4}^T Q_+(t) dt \right\} \quad (10)$$

(10)式に(8)、(9)式を代入し整理すると、

$$E_r = \frac{lT}{2} + \frac{l}{2} \left\{ \int_0^{T/4} \operatorname{erf}(z_0(t)) dt - \int_{T/4}^{3T/4} \operatorname{erf}(z_0(t)) dt + \int_{3T/4}^T \operatorname{erf}(z_0(t)) dt \right\}$$

実際に注入されているPCAL信号は $A/\sigma \ll 1$ が十分に成り立つ。したがって $z_0(t) \ll 1$ も十分に成り立っている。この場合は誤差関数は、

$$\operatorname{erf}(z_0(t)) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} z_0(t)$$

と近似できる。したがって、

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{lT}{2} + \frac{l}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{T/4} z_0(t) dt - \int_{T/4}^{3T/4} z_0(t) dt + \int_{3T/4}^T z_0(t) dt \right\} \\ &= \frac{lT}{2} + \frac{lA}{\sqrt{2}\pi\sigma} \left\{ \int_0^{T/4} \cos(2\pi f_p t + \theta) dt - \int_{T/4}^{3T/4} \cos(2\pi f_p t + \theta) dt + \int_{3T/4}^T \cos(2\pi f_p t + \theta) dt \right\} \end{aligned}$$

積分を実行すると結局、

$$E_r = \frac{lT}{2} + \frac{\sqrt{2}AlT}{\pi^{3/2}\sigma} \cos\theta \quad (11)$$

同様にして E_i を求めると、

$$\begin{aligned} E_i &= l \left\{ \int_0^{T/2} Q_+(t) dt + \int_{T/2}^T Q_-(t) dt \right\} \\ &= \frac{lT}{2} + \frac{\sqrt{2}AlT}{\pi^{3/2}\sigma} \sin\theta \end{aligned} \quad (12)$$

PCAL信号の強度を求めるために、PCAL信号が入っていないとした場合のカウント値つまり+1、-1の出現確率が同じである雑音信号の期待値 $lT/2$ で規格化を行っている。⁽³⁾したがって E_r 、 E_i の規格化カウント値をそれぞれ、 P_r 、 P_i とすると、

$$\begin{aligned}
P_r &= \frac{E_r - \varrho T / 2}{\varrho T / 2} = \frac{2\sqrt{2}A}{\pi^{3/2} \sigma} \cos \theta \\
P_i &= -\frac{E_i - \varrho T / 2}{\varrho T / 2} = \frac{2\sqrt{2}A}{\pi^{3/2} \sigma} \sin \theta
\end{aligned} \tag{13}$$

(13)式で規格化されたカウント値を用いてPCAL強度と位相は次式で得られる。

$$\text{PCAL強度} = (P_r^2 + P_i^2)^{1/2} = \frac{2\sqrt{2}A}{\pi^{3/2} \sigma} = 0.508 (A/\sigma) \tag{14}$$

$$\text{PCAL位相} = \arctan(P_i/P_r) \tag{15}$$

このような処理は2局(X局、Y局と呼ぶ)のデータに対して行われるが、PCAL検出に用いられる関数R(t)、I(t)はX局のフレームデータの先頭に同期した関数である。したがって、検出される位相はX局のフレームデータの先頭を基準とする位相である。

3. PCAL信号を含んだ雑音信号の相互相関関数

X局の信号をx(t)、Y局の信号をy(t)とし、それぞれ下式で表わす。

$$x(t) = A_{px} \cdot \cos(2\pi f_p t + \theta_{px}) + n_x(t) \tag{16}$$

$$y(t) = A_{py} \cdot \cos(2\pi f_p t + \theta_{py}) + n_y(t) \tag{17}$$

ここで、(16)(17)式の右辺第1項はPCAL信号を表わし、 $n_x(t), n_y(t)$ は分散 σ_x^2, σ_y^2 の帯域0~BHzのガウス分布雑音である。相互相関関数 $C_{xy}(\tau)$ は、

$$C_{xy}(\tau) = \frac{A_{px}A_{py}}{2} \cos\{2\pi f_p \tau + (\theta_{px} - \theta_{py})\} + \gamma_{xy}(\tau) \tag{18}$$

で計算される。ただし $\gamma_{xy}(\tau)$ は $n_x(t), n_y(t)$ の相互相関関数を表わす。規格化相互相関関数を $R_{xy}(\tau)$ とすると、

$$\begin{aligned}
R_{xy}(\tau) &= \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{yy}(0)}} \\
&= \frac{\frac{A_{px}A_{py}}{2} \cos\{2\pi f_p \tau + (\theta_{px} - \theta_{py})\} + \gamma_{xy}(\tau)}{\left(\frac{A_{px}^2}{2} + \sigma_x^2\right)^{1/2} \left(\frac{A_{py}^2}{2} + \sigma_y^2\right)^{1/2}}
\end{aligned} \tag{19}$$

VLBIで取り扱う信号では $A_{px}/\sigma_x \ll 1, A_{py}/\sigma_y \ll 1$ である。したがって、 $R_{xy}(\tau)$ は次式で近似できる。

$$R_{xy}(\tau) = \mu_{xy}(\tau) + \rho_{xy}(\tau) \tag{20}$$

ただし、

$$\mu_{xy}(\tau) = \frac{A_{px}A_{py}}{2\sigma_x\sigma_y} \cos\{2\pi f_p \tau + (\theta_{px} - \theta_{py})\} \tag{21}$$

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{\gamma_{xy}(\tau)}{\sigma_x\sigma_y} \tag{22}$$

であり、 $\mu_{xy}(\tau)$ は、PCAL信号の相互相関関数、 $\rho_{xy}(\tau)$ は雑音信号の相互相関関数を意味する。1ビットサンプリング後のデータの相互相関関数を $r_{xy}(\tau)$ とすると、 $R_{xy}(\tau) \ll 1$ の場合、証明は略すが、下式で表される。

$$r_{xy}(\tau) = \frac{2}{\pi} R_{xy}(\tau) \tag{23}$$

したがって、1bit サンプリング後 ($2/\pi$ の補正済) の相関係数から ρ を得るには(21)式で $\mu_{xy}(\tau)$ を計算し、差し引けばよい。

相関器で検出されるX局、Y局のPCAL信号強度を C_{px} 、 C_{py} とすると、(14)式から

$$C_{px} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \cdot \frac{A_{px}}{\sigma_x}, \quad C_{py} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \cdot \frac{A_{py}}{\sigma_y}$$

である。さらに相関器で検出されたPCAL信号の位相を ϕ_{px} 、 ϕ_{py} とすると、

$$\begin{aligned} \mu_{xy}(\tau) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{A_{px} A_{py}}{\sigma_x \sigma_y} \cos\{2\pi f_p \tau + (\phi_{px} - \phi_{py})\} \\ &= \frac{\pi^3}{16} C_{px} C_{py} \cos\{2\pi f_p \tau + (\phi_{px} - \phi_{py})\} \end{aligned} \quad (24)$$

相関器で検出されるPCAL位相はすでに述べたようにX局のフレームデータの先頭を基準とした位相である。通常の間関処理では8bit ラグの間関関数のうち、5bit 目を予測遅延と取り扱う。その補正を行い、また τ をbit ラグ単位 (lag) で表わすと、PCAL信号の周期は10kHz の場合400bitであるから、(24)式は次式のように書ける。

$$\begin{aligned} \mu_{xy}(\text{lag}) &= \frac{\pi^3}{16} C_{px} C_{py} \cos\{(\phi_{px} - \phi_{py}) + (\text{lag} - 4) \frac{2\pi}{400}\} \\ &= 1.938 \times C_{px} C_{py} \cos\{(\phi_{px} - \phi_{py}) + (\text{lag} - 4) \frac{2\pi}{400}\} \end{aligned} \quad (25)$$

したがって、規格化相関関数から(25)式を引き去れば、目的とする、雑音信号のみの相互相関関数を得ることができる。

4. おわりに

以上、フリンジストッピングを行わない相関処理において、PCAL信号同志の相互相関の影響を取り除く方法について述べてきた。本報告では触れなかったが、相関関数に悪影響をおよぼすものとして、PCAL信号の他にデータに含まれているヘッダ部分の影響がある。各局で記録されるデータには 20000ビット毎に時刻情報を得るために 160ビットのヘッダが付けられている。フリンジストッピングを行わない相関処理の場合にヘッダ部分同志の相互相関の影響が無視できなくなる。相関処理時にヘッダ部分を除いて相関処理する方法があるが、この方法を用いるとハードウェア上の制約から、データの半分しか利用できなくなる。現在、データを有効に利用するためにヘッダ部分を含んだ相関関数からヘッダ部分の影響を取り除く方法を検討中である。

参考文献

- (1) 今江理人、木内 等；”システム遅延時間校正装置”，電波季，30，特1，pp.109-113，1984
- (2) 杉本裕二、浜 真一；”相関処理装置”，電波季，30，特1，pp.163-175，1984.
- (3) 近藤哲朗、国森裕生；”バンド幅合成ソフトウェア (KOMB)”，電波季，30，特1，pp.199-216，1984.