

相関器で検出する位相較正 (PCAL) 信号の強度について

- - スペアナ (分解能帯域幅 f_{res}) で PCAL 信号をモニターし、バックグラウンドのノイズレベルより PCAL 信号が h dB 高く測定された場合、相関器で検出される PCAL 強度はどう表わせるか - -

T . KONDO

ビデオ帯域幅を 2 MHz とすると相関器で検出される PCAL 強度は次式で表わされる。

$$\text{PCAL 強度} = 0.05 \times \sqrt{f_{res}(\text{Hz})} \times 10^{h/20} \quad (\%)$$

- - 以下証明 - -

1 . スペアナで測定する PCAL 信号と雑音信号の比について

分解能帯域幅 f_{res} (Hz) で測定した雑音信号レベルを a dBm (図 1 参照) とすると全帯域を B した場合の雑音信号レベルは次式で表せる。

$$b = a + 10 \log (B/f_{res}) \quad (\text{dBm}) \quad (1)$$

PCAL 信号パワーは $(a + h)$ dBm であるから、PCAL 信号強度 (実効値) と雑音信号強度の比を PNR とすると、

$$\begin{aligned} (PNR)^2 &= a + h - b \quad (\text{dB}) \\ &= h - 10 \log (B/f_{res}) \end{aligned} \quad (2)$$

したがって PNR を真数で表現すると、

$$\begin{aligned} PNR &= 10^{\{(h/20) - \log(B/f_{res})^{1/2}\}} \\ &= (B/f_{res})^{-1/2} 10^{h/20} \end{aligned} \quad (3)$$

この PNR をスペアナで測定した PNR という意味で PNR_s と書くことにする。今、 $B = 2$ MHz とすると、

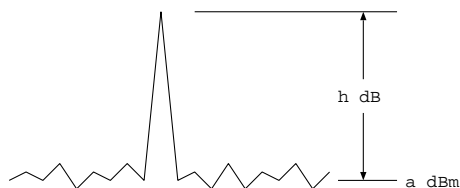


図 1:

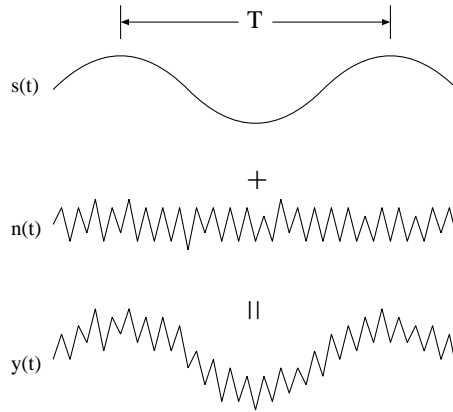


図 2:

$$PNR_S = 0.07 \times \sqrt{f_{res}} \cdot 10^{h/20} \quad (\%) \quad (4)$$

2. 相関器で検出する PCAL 信号強度と雑音信号の比

「前提：信号帯域は $0 \sim B$ (Hz) に十分制限されている。さらにサンプリングはナイキスト周波数 $2B$ で行われるとする。また受信器は理想的であり混変調等はないものとする。」

帯域 $0 \sim B$ の雑音信号 $\{n(t)\}$ を分散 σ^2 のガウス雑音とする。PCAL 信号 $\{s(t)\}$ を周期 T 、振幅 (p-p) $2A$ 、初期位相 θ の正弦 (余弦) 波とする。雑音の重畳した PCAL 信号を $y(t)$ とすると、

$$y(t) = s(t) + n(t) \quad (5)$$

と書ける (図 2)。ただし、

$$s(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta\right) \quad (6)$$

今、 $y(t)$ を周期 T で区切り、図 3 で示されるように、たてに並べて考えてみる。さらに時刻 T として、

$$kT \leq kt < (k+1)T$$

$$: k = 0, 1, 2, \dots$$

なる t を考える。この t を固定して周期番号方向 $\{k = 0, 1, 2, \dots\}$ に $y(t)$ を見た場合、平均値が $s(t)$ 、分散 σ^2 で表わされるガウス分布雑音となっている。したがって、 $y(t)$ が時刻 t に x という値をとる確率を $P(x|t)$ とすると、

$$\begin{aligned} P(x|t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - s(t))^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta\right))^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned} \quad (7)$$

さて、 $y(t)$ を 1 ビットサンプリングして得られる時系列を $g(t)$ とすると、

$$g(t) = \begin{cases} +1 & : y(t) \geq 0 \\ -1 & : y(t) < 0 \end{cases} \quad (8)$$

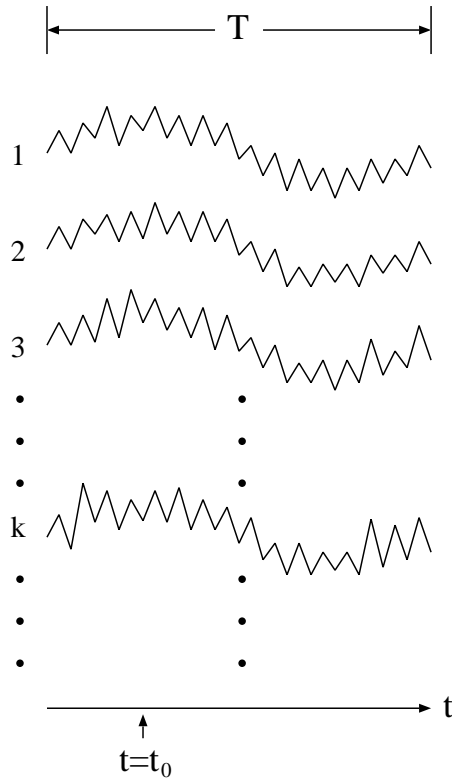


図 3:

である。したがって1ビットサンプリングのデータが時刻 t で +1 取る確率は $P(x|t)$ で x が正となる確率に等しい。これを $Q_+(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} Q_+(t) &= \int_0^{\infty} P(x|t) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\left(x - A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta\right)\right)^2 / 2\sigma^2\right\} dx \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $(x - A \cos(\frac{2\pi}{T}t + \theta)) / \sqrt{2}\sigma = z$ と変数変換を行うと、

$$Q_+(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z_0(t)}^{\infty} \exp(-z^2) dz \quad (10)$$

ただし、

$$z_0(t) = \frac{A}{\sqrt{2}\sigma} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta\right) \quad (11)$$

ここで、

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-s^2) ds$$

で定義される誤差関数を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-s^2) ds &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-s^2) ds - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-s^2) ds \\ &= 1 - \operatorname{erf}(x) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} Q_+(t) &= \frac{1}{2}(1 - \operatorname{erf}(-z_0(t))) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}(z_0(t))) \end{aligned} \quad (12)$$

$$(\because \operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x))$$

したがって、1ビットサンプリング後のデータが -1 を取る確率を $Q_-(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} Q_-(t) &= 1 - Q_+(t) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \operatorname{erf}(z_0(t))) \end{aligned} \quad (13)$$

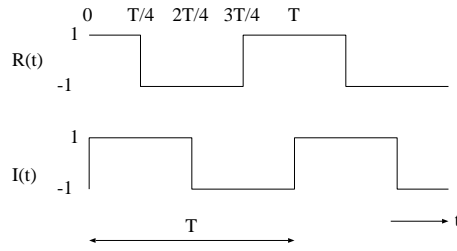


図 4:

さて、相関器では $g(t)$ に対して、図 4 で示される関数 $R(t)$ 、 $I(t)$ をかけ算して、正になった部分のビット数をカウントしている。ここでカウント値は必ず T の整数倍を単位とする積分時間で出力される。この積分時間を ℓT ($\ell = 1, 2, 3, \dots$) とするとカウント値は $g(t)R(t)$ または $g(t)I(t)$ を $0 \sim \ell T$ に亘って積分したときの期待値に等しくなる。この期待値をそれぞれ E_r 、 E_i とすると、

$$E_r = \ell \left\{ \int_0^{T/4} Q_+(t) dt + \int_{T/4}^{3T/4} Q_-(t) dt + \int_{3T/4}^T Q_+(t) dt \right\} \quad (14)$$

(14) 式に (12)、(13) 式を代入し整理すると、

$$E_r = \frac{\ell T}{2} + \frac{\ell}{2} \left\{ \int_0^{T/4} \operatorname{erf}(z_0(t)) dt - \int_{T/4}^{3T/4} \operatorname{erf}(z_0(t)) dt + \int_{3T/4}^T \operatorname{erf}(z_0(t)) dt \right\}$$

実際に注入されている PCAL 信号は $A/\sigma \ll 1$ が十分に成り立つ。したがって $z_0(t) \ll 1$ も十分に成り立っている。この場合は誤差関数は、

$$\operatorname{erf}(z_0(t)) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} z_0(t)$$

と近似できる。したがって、

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\ell T}{2} + \frac{\ell}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{T/4} z_0(t) dt - \int_{T/4}^{3T/4} z_0(t) dt + \int_{3T/4}^T z_0(t) dt \right\} \\ &= \frac{\ell T}{2} + \frac{\ell A}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left\{ \int_0^{T/4} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \theta\right) dt - \int_{T/4}^{3T/4} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \theta\right) dt + \int_{3T/4}^T \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \theta\right) dt \right\} \end{aligned}$$

積分を実行すると結局、

$$E_r = \frac{\ell T}{2} + \frac{2A\ell T}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cos \theta \quad (15)$$

同様にして E_i を求める。

$$\begin{aligned} E_i &= \ell \left\{ \int_0^{T/2} Q_+(t)dt + \int_{T/2}^T Q_-(t)dt \right\} \\ &= \frac{\ell T}{2} + \frac{\ell}{2} \left\{ \int_0^{T/2} \text{erf}(z_0(t))dt - \int_{T/2}^T \text{erf}(z_0(t))dt \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

$A/\sigma \ll 1$ の近似を用いて、

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{\ell T}{2} + \frac{\ell}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{T/2} z_0(t)dt - \int_{T/2}^T z_0(t)dt \right\} \\ &= \frac{\ell T}{2} + \frac{\ell A}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left\{ \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \theta\right) dt - \int_{T/2}^T \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \theta\right) dt \right\} \\ &= \frac{\ell T}{2} + \frac{2A\ell T}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sin\theta \end{aligned} \quad (17)$$

バンド幅合成ソフトウェア (KOMB) では PCAL 信号が入っていないとした場合のカウンタ値つまり +1、-1 の出現確率が同じである雑音信号の期待値 $\ell T/2$ で規格化を行っている。したがって、 E_r 、 E_i の規格化カウンタ値をそれぞれ、 P_r 、 P_i とすると、

$$P_r = \frac{E_r - \ell T/2}{\ell T/2} = \frac{4A}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cos\theta \quad (18)$$

$$P_i = -\frac{E_i - \ell T/2}{\ell T/2} = \frac{4A}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sin\theta \quad (19)$$

(18)(19) 式で規格化されたカウンタ値を用いて KOMB では PCAL 強度と位相を次式で求めている。

$$\text{PCAL 強度} = (P_r^2 + P_i^2)^{1/2} = \frac{4A}{\sqrt{2\pi\sigma}} = 0.507(A/\sigma) \quad (20)$$

$$\text{PCAL 位相} = \tan^{-1}(P_i/P_r) \quad (21)$$

(20) 式で表わされる PCAL 強度を PNR_c と書くことにする。さて、スペアナで得られる PNR_s は実効値の比であるから、 A と σ を使って表現すると、

$$PNR_s = \frac{A}{\sqrt{2\sigma}} \quad (22)$$

である。(22) 式を (20) 式に代入すると、

$$PNR_c = \frac{4}{\sqrt{\pi\pi}} PNR_s = 0.718 PNR_s \quad (23)$$

つまり、1 ビットサンプリングおよび相関器での検出方法を通じて、 PNR が 0.718 劣化することを意味している。さらに (23) 式に (4) 式を代入すると、

$$PNR_c = 0.05 \times \sqrt{f_{res}} 10^{h/20} \quad (\%) \quad (24)$$

が得られる。

実際にスペアナで PCAL 信号を分解能帯域幅 1 kHz で測定した場合、バックグラウンドのノイズレベルより 10 dB 高い場合、相関器で 5% の PCAL 強度として検出されているが、 $f_{res} = 1000$ 、 $h = 10$ として (24) 式より PNR_c を求めると 5% となり、観測事実と良く一致する。