

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/234842120>

Relativistic Astrometry (in Japanese)

Book · January 2013

CITATIONS

0

READS

609

1 author:



[Toshio Fukushima](#)

National Astronomical Observatory of Japan

776 PUBLICATIONS 3,939 CITATIONS

SEE PROFILE

位置天文学特論I

福島登志夫

Contents

1	時間と空間の物理学	3
1.1	座標系と物理量	3
1.2	一般相対論以前の枠組 (質点力学)	7
1.2.1	ニュートン力学	7
1.2.2	万有引力 (ニュートンの重力理論)	8
1.3	特殊相対性理論	9
1.3.1	$L_{\mu}^{\tilde{\alpha}}$ の性質	10
1.3.2	Boost	11
1.3.3	時計の遅れ ((Lorentz) Time Dilation)	12
1.3.4	ローレンツ収縮 (Lorentz Contraction of Moving Bodies) その1 . . .	13
1.3.5	ローレンツ変換その2	13
1.3.6	ローレンツ変換その3	14
1.3.7	光行差	15
1.3.8	速度の合成則	16
1.3.9	光行差	17
1.3.10	光行差 (ニュートンの考え方)	18
1.3.11	Doppler Effect	19
1.3.12	固有時	20
1.3.13	4元速度 (4-velocity)	20
1.3.14	4元運動量	20
1.3.15	運動方程式	21
1.3.16	4元加速度	21
2	一般相対性理論概要	23
2.1	アインシュタインの一般相対性理論	23
2.1.1	指導原理	23
2.1.2	曲がった時空の導入	23

2.1.3	なぜ座標系が必要か？	24
2.1.4	絶対微分	25
2.1.5	アフィン微分	26
2.1.6	$g_{\mu\nu}, \delta_{\nu}^{\mu}, g^{\mu\nu}, (\eta_{\mu\nu})$	27
2.1.7	$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$	27
2.1.8	$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ その2	28
2.1.9	場の方程式	29
2.1.10	ニュートン近似	29
2.1.11	固有時の方程式	30
2.1.12	ジオイド上の時計	30
2.1.13	地表 ($\neq$ ジオイド上)	31
2.1.14	自由運動する時計	31
2.1.15	光の運動方程式再考	33
2.2	ポスト・ガリレイ近似	35
2.2.1	ポスト・ガリレイ近似	35
2.2.2	回転	35
2.2.3	ポスト・ガリレイ近似のメトリック	38
2.2.4	速い粒子の運動方程式	40
2.2.5	光の運動方程式	41
2.3	光の運動	43
2.3.1	光行差方程式	45
2.3.2	天体の縁を通過する光	47
2.3.3	光行差方程式の解法	48
2.3.4	光方向 (視位置)	49
2.4	ポスト・ニュートン近似	54
2.4.1	$g^{\mu\nu}$ の計算	54
2.4.2	$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ の計算	54
2.4.3	ϕ ? $\mathbf{g}$?	56
2.4.4	準アインシュタイン	57
2.4.5	静的孤立系	59
2.4.6	近点の移動	60
2.5	N 個の質点系の運動方程式	69
2.5.1	テンソル密度	69
2.5.2	質量密度	70
2.5.3	スカラー密度	70
2.5.4	EIH 方程式	72
2.5.5	非 test particle の場合の EIH 方程式	73

1 時間と空間の物理学

1.1 座標系と物理量

なぜ一般相対論？ → 新しい観測技術の発展

1. 時計

H-maser, Rb, Cs, Pulser $\sim 10^{-15}$

2. R & RR (Range & Range Rate)

Viking, Voyager, Magellan, Galileo, Cassini, Phobos, Mar Sarveyer/Path Finder/Polar Lander, Bepi Colombo

$$c(t_2 - t_1) = r + \dots$$

$$6\text{m}/0.7\text{AU} \sim 6\text{m}/10^{11}\text{m} \sim 10^{-10}$$

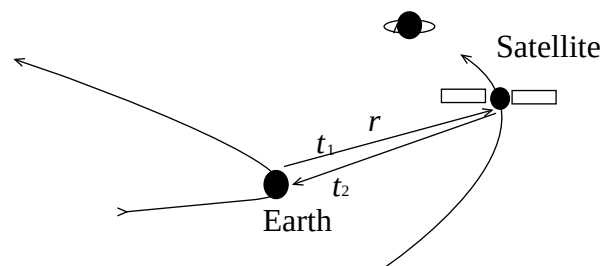


Figure 1: R & RR (Range & Range Rate)

3. LLR/SLR (Lunar/Satellite Laser Ranging)

Lageos I,II, Ajisaai, Starlette, Etalon I, II, GEOIK 1,2,3, ...

$$c(t_2 - t_1) = r + \dots$$

$$1\text{mm}/10^4\text{km} \sim 10^{-10}$$

4. VLBI (Very Large Baseline Interferometry)

For quasars, AGN, radio sources

EVN, VLBA, VERA

$$c(t_2 - t_1) = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{k}} + \dots$$

$$1\text{cm}/10^4\text{km} \sim 10^{-9}$$

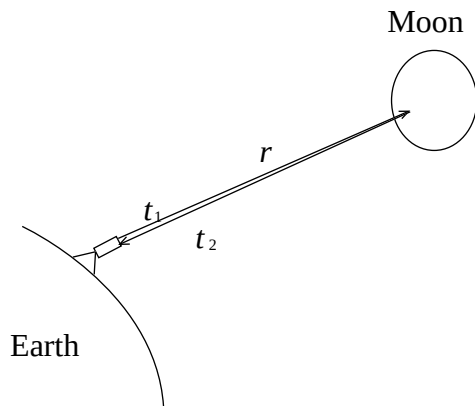


Figure 2: LLR/SLR (Lunar/Satellite Laser Ranging)

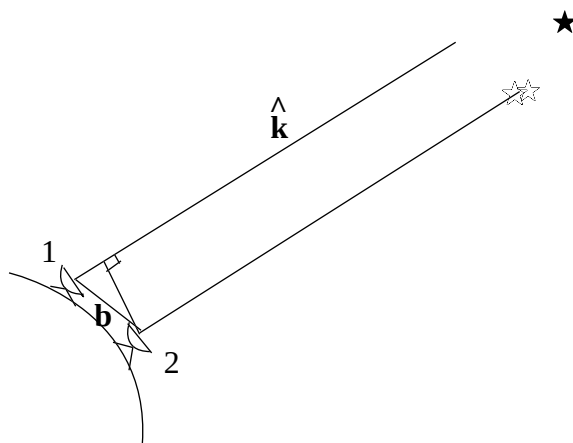


Figure 3: VLBI (Very Large Baseline Interferometry)

(a) Space VLBI
VSOP

$$c(t_2 - t_1) = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{k}} + \dots$$

$$1\text{cm}/10^5\text{km} \sim 10^{-10}$$

5. GPS/GLONASS
二重差

$$c(t_{2A} - t_{1A} - t_{2B} + t_{1B}) = r_{2A} - r_{1A} - r_{2B} + r_{1B} + \dots$$

$$1\text{mm}/10\text{km} \sim 1\text{mm}/100\text{km} \sim 10^{-7} \sim 10^{-8}$$

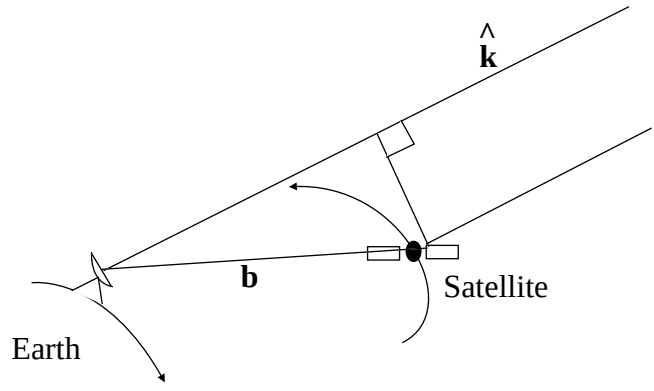


Figure 4: Space VLBI

6. Pulsar Arrival Time Analysis

$$c(t_2 - t_1) = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \hat{\mathbf{k}} + \dots$$

7. 逆 LR, SSLR (Satellite-Satellite Laser Ranging)

8. SCG (Super Conducting Gravimeter)

Order of Magnitudes

ニュートン力学		1			
特殊相対論	光行差	$\frac{v}{c}$	10^{-6}	10^{-4}	3×10^{-3}
	ドップラー偏位				
一般相対論	光の曲がり	$(\frac{v}{c})^2$	10^{-12}	10^{-8}	10^{-5}
	光の遅れ				
	近点移動				
		$(\frac{v}{c})^3$		10^{-12}	3×10^{-8}
		$(\frac{v}{c})^4$		10^{-16}	10^{-10}
	重力波	$(\frac{v}{c})^5$		10^{-20}	3×10^{-13}

Table 1: 相対論的効果とその大きさ.

方法論

弱い重力場での近似 (ポスト・ニュートン近似, 一部ポスト・ポスト・ニュートン)

手法

1 次摂動論 (まれに 2 次)

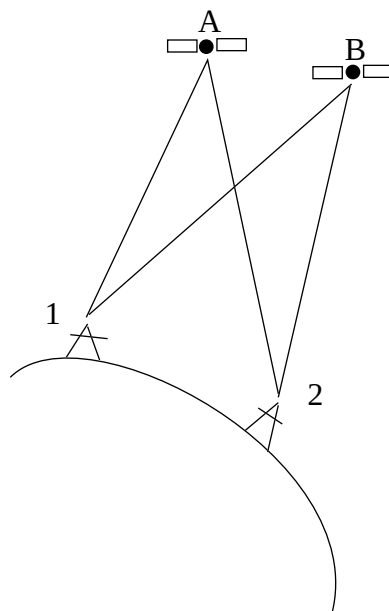


Figure 5: Space GPS

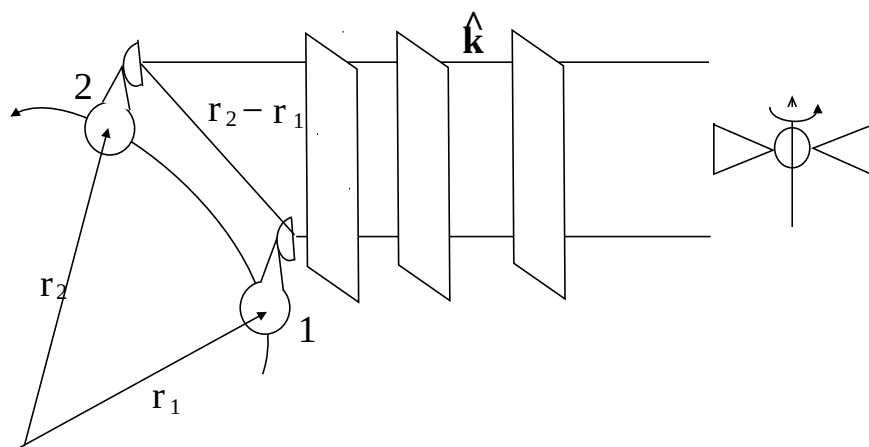


Figure 6: Pulsar Arrival Time Analysis

1.2 一般相対論以前の枠組（質点力学）

1.2.1 ニュートン力学

空間反転3, または鏡映

$$\mathcal{M}_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\mathcal{M}_y = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\mathcal{M}_z = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

および回転

$$\mathcal{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\mathcal{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\mathcal{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

質量

$$m = \int \rho(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \quad (7)$$

運動量/速度

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \quad (8)$$

不変量

$$(d\ell)^2 = (d\boldsymbol{x})^2 = \text{不変} \quad (9)$$

$$\Rightarrow 3 \text{次元直交変換 } R_i^{\bar{a}} \delta_{\bar{a}\bar{b}} R_j^{\bar{b}} = \delta_{ij} \quad (10)$$

運動の法則

1. 力が働かなければ物体は等速直線運動する.

$$\mathbf{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t \quad (11)$$

2. 運動方程式

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (12)$$

3. 作用反作用の法則

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (13)$$

1.2.2 万有引力（ニュートンの重力理論）

2 点間に働く引力

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12} \quad (14)$$

場

$$\mathbf{F} = m \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \quad (15)$$

U : 力関数 (Force Function) = - (ポテンシャル)

場の方程式 (Poisson 方程式)

$$\Delta U(\mathbf{x}) = 4\pi G\rho(\mathbf{x}). \quad (\text{線形方程式}) \quad (16)$$

$$U(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (17)$$

単連続有限体による引力

$1/r$ を (球面) 調和展開

$$U = \frac{GM}{r} + GM \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_n^m(\sin \beta) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \quad (18)$$

$$\text{基底} : r^{-(n+1)} e^{im\phi} P_n^m(\cos \theta) \quad (19)$$

1.3 特殊相対性理論

時空 (Spacetime)

$$x^\mu = (x^0 \equiv ct, \overbrace{x^1, x^2, x^3}^{\boldsymbol{x}}) \quad (20)$$

肩付き添字 ギリシャ文字 $0 \rightarrow 3$
 ラテン文字 $1 \rightarrow 3$

不変量

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta \boldsymbol{x})^2 \\ &= \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \end{aligned} \quad (21)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ミンコフスキー行列}) \quad (22)$$

$$\Delta t = t - t_0, \Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0, \text{etc ...}$$

アインシュタインの規約

上と下に同じ添字が現れたらその添字に対して足し上げる.

$$\eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad (23)$$

$$A^{ii} \neq \sum_{i=1}^3 A^{ii}, \quad A_i^i = \sum_{i=1}^3 A_i^i$$

ギリシャ文字 ; 0 から 3 まで

ラテン文字 : 1 から 3 まで

不変量はローレンツ変換という座標変換に対して不変に保たれる. すなわち,

$$\Delta x^\mu = L_{\tilde{\alpha}}^\mu \Delta x^{\tilde{\alpha}} \quad (24)$$

という座標変換¹ に対して.

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \\ &= \eta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \Delta x^{\tilde{\alpha}} \Delta x^{\tilde{\beta}} \end{aligned}$$

¹ 座標系が異なるのでそれぞれで別の添字, または座標変数を用いる.

となる．一般に $L_{\mu}^{\tilde{\alpha}}$ は 4×4 行列である．ローレンツ変換はポアンカレ変換,

$$X^{\tilde{\alpha}} = X_0^{\tilde{\alpha}} + L_{\mu}^{\tilde{\alpha}} X^{\mu}, \quad (X_0^{\tilde{\alpha}} \text{は座標原点}) \quad (25)$$

の中に含まれる座標変換の一つである．

1.3.1 $L_{\mu}^{\tilde{\alpha}}$ の性質

$$(\Delta s)^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^{\mu} \Delta x^{\nu} = \eta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \Delta x^{\tilde{\alpha}} \Delta x^{\tilde{\beta}} = \eta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} L_{\mu}^{\tilde{\alpha}} \Delta x^{\mu} L_{\nu}^{\tilde{\beta}} \Delta x^{\nu} \quad (26)$$

より,

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} L_{\mu}^{\tilde{\alpha}} L_{\nu}^{\tilde{\beta}}. \quad (27)$$

$L_{\mu}^{\tilde{\alpha}}$ は 10 成分 (10 パラメータ) を持つ一種の 4 次元直交行列 (ローレンツ群)．

$$10 = 4(\text{反転}) + 3(\text{空間回転}) + 3(\text{Boost})$$

反転

$$\mathcal{M}_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \quad (28)$$

空間回転

$$\mathcal{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \dots \quad (29)$$

Boost

$$L_x(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha & 0 & 0 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{対称行列}). \quad (30)$$

α はある種の回転角．

$$\tan \theta = \tanh \alpha = \beta = \frac{v}{c}, \quad \cosh \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \gamma, \quad \sinh \alpha = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\beta$$

注：ここで現れる β, γ は PPN パラメータではない．

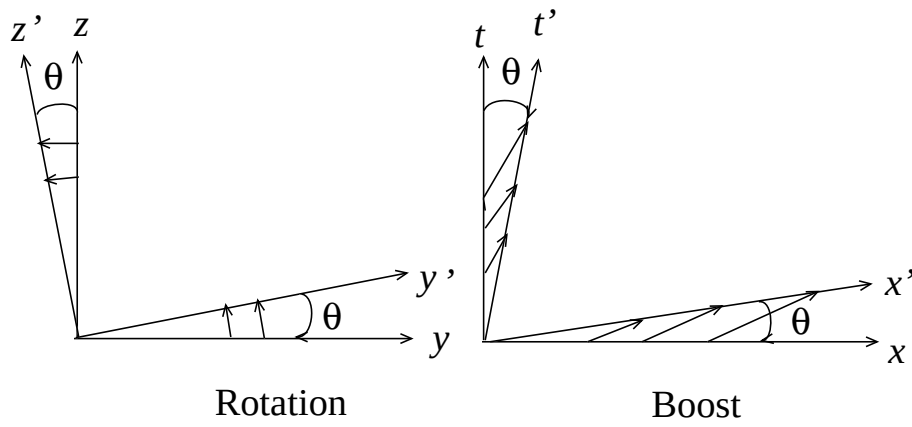


Figure 7: 回転と Boost

1.3.2 Boost

いま S' 系が S 系に対して速度 $\mathbf{v} = v\mathbf{n}$ で運動している.

$$L_{\mu}^{\alpha'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \\ -\gamma \frac{\mathbf{v}}{c} & \mathbf{I} + (\gamma - 1)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j, \quad (\text{テンソル積})$$

この逆変換は $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ とすればよい.

$$L_{\mu}^{\tilde{\alpha}}(\mathbf{v}) = L_{\tilde{\alpha}}^{\mu}(-\mathbf{v}) \quad (32)$$

$\Delta x^{\tilde{\alpha}} = L_{\mu}^{\tilde{\alpha}} \Delta x^{\mu}$ を用いて具体的に変換式を求めると,

$$\begin{cases} \Delta \tilde{t} = \gamma \left(\Delta t - \frac{\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{x}}{c^2} \right) \\ \Delta \tilde{\mathbf{x}} = \Delta \mathbf{x} - \gamma \mathbf{v} \Delta t + (\gamma - 1)(\mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \end{cases} \quad (33)$$

逆変換

$$\begin{cases} \Delta t = \gamma \left(\Delta \tilde{t} + \frac{\mathbf{v} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{x}}}{c^2} \right) \\ \Delta \mathbf{x} = \Delta \tilde{\mathbf{x}} + \gamma \mathbf{v} \Delta \tilde{t} + (\gamma - 1)(\mathbf{n} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{n} \end{cases} \quad (34)$$

$\tilde{S}$ 系の運動

$$\Delta \tilde{\mathbf{x}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta t = \gamma \Delta \tilde{t} \\ \Delta \mathbf{x} = \gamma \mathbf{v} \Delta \tilde{t} = \mathbf{v} \Delta t \end{cases} \quad (35)$$

ゆえに, S 系で $\tilde{S}$ 系の原点は

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}$$

で動いている.

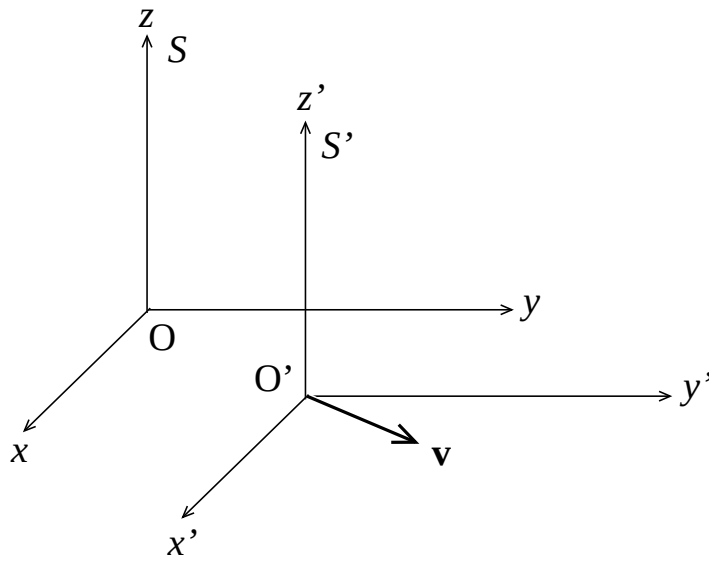


Figure 8: S 系と S' 系

1.3.3 時計の遅れ ((Lorentz) Time Dilation)

$\tilde{S}$ 系で静止している時計を S 系で見る. $\tilde{S}$ 系で静止しているの

$$\Delta \tilde{x} = 0, \quad \Delta t = \gamma \Delta \tilde{t}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} > 1$$

よって $\tilde{S}$ 系で1秒は S 系では γ 秒 $\Rightarrow \tilde{S}$ 系の時計は S 系ではゆっくり進んでいるように見える.

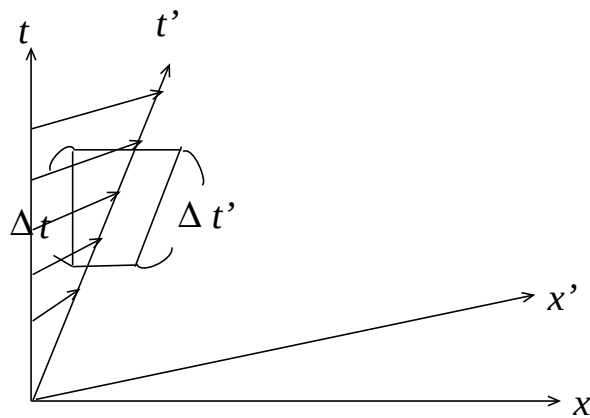


Figure 9: 時間の遅れ

1.3.4 ローレンツ収縮 (Lorentz Contraction of Moving Bodies) その 1

$\tilde{S}$ 系で静止している物指を S 系で計る.

$$\Delta t = 0, \quad (S \text{ 系で同時に計る}), \quad \Delta \tilde{\mathbf{x}} = \Delta \mathbf{x} + (\gamma - 1)(\mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{x}) \mathbf{n}$$

$\mathbf{n}_{\parallel}$ 成分

$$\Delta \tilde{x}_{\parallel} = \Delta \tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = \gamma \Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = \gamma \Delta x_{\parallel} \quad (36)$$

$\mathbf{n}_{\perp}$ 成分

$$\Delta \tilde{x}_{\perp} = \Delta x_{\perp} \quad (37)$$

したがって

- 運動方向成分 : S 系で 1 m $\rightarrow \tilde{S}$ 系で γ m.
- 垂直方向成分 : S 系で 1 m $\rightarrow \tilde{S}$ 系で 1 m.

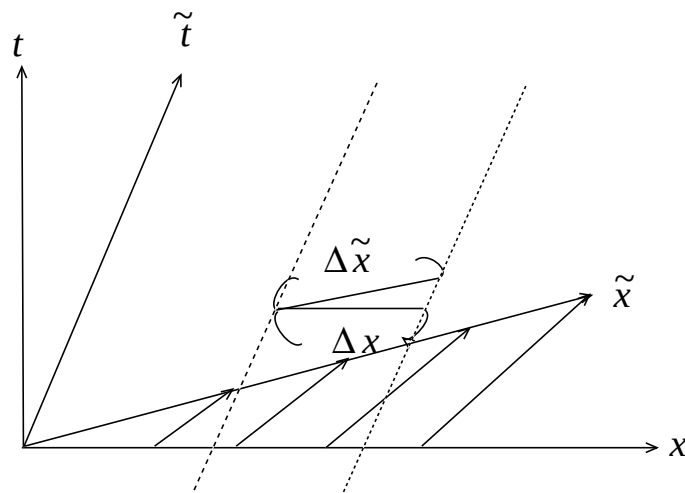


Figure 10: Lorentz 収縮

$\tilde{S}$ 系の物指は S 系では縮んで見える.

1.3.5 ローレンツ変換その 2

S 系の静止した 1 点で物指の経過時間差を計り速度 $\mathbf{v}$ をかける.

$$L = -\mathbf{v} \Delta t \quad (38)$$

— (マイナス) 符号は時間差と物指の向きが逆なため.

ローレンツ変換の式

$$\delta\tilde{\mathbf{x}} = \Delta\mathbf{x} - \gamma\mathbf{v}\Delta t + (\gamma - 1)(\mathbf{n} \cdot \Delta\mathbf{x})\mathbf{n} \quad (39)$$

において $\Delta\mathbf{x} = 0$ (S 系で静止) より,

$$\Delta\tilde{\mathbf{x}} = -\gamma\mathbf{v}\Delta t = \gamma L \quad (40)$$

よって

$$\tilde{L} = |\Delta\tilde{\mathbf{x}}|$$

とすると

$$\tilde{L} = \gamma L, \quad \text{or} \quad L = \frac{1}{\gamma} \tilde{L} \quad (41)$$

よって $\tilde{S}$ 系で 1 m の物指は S 系では $\frac{1}{\gamma}$ 倍に縮んで見える.

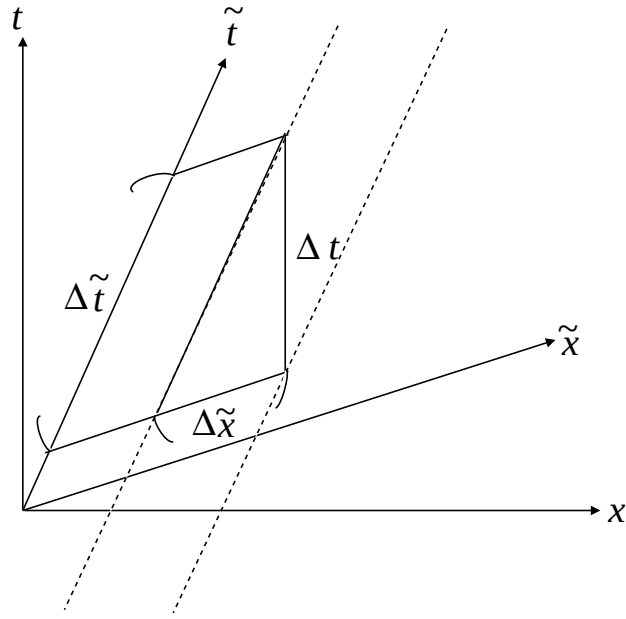


Figure 11: Lorentz 収縮

1.3.6 ローレンツ変換その3

S 系で同時に物指の両端を計りその差から長さを求める.

$$L = \delta x \quad (42)$$

逆ローレンツ変換の式から

$$\Delta x = \Delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = [\Delta\tilde{\mathbf{x}} + \gamma\mathbf{v}\Delta\tilde{t} + (\mathbf{n} \cdot \Delta\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{n}] \cdot \mathbf{n} = \gamma\Delta\tilde{x} \cdot \mathbf{n} = \gamma\Delta\tilde{x} \quad (43)$$

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta\tilde{t} + \frac{\mathbf{v} \cdot \Delta\tilde{\mathbf{x}}}{c^2} \right) = \gamma \frac{v\Delta\tilde{x}}{c^2} \quad (44)$$

これより

$$\begin{aligned}\delta x &= \Delta x - v\Delta t = \gamma\Delta\tilde{x} - \gamma\frac{v^2}{c^2}\Delta\tilde{x} = \gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Delta\tilde{x} = \frac{\Delta\tilde{x}}{\gamma} \\ \tilde{L} &= \frac{L}{\gamma}\end{aligned}\tag{45}$$

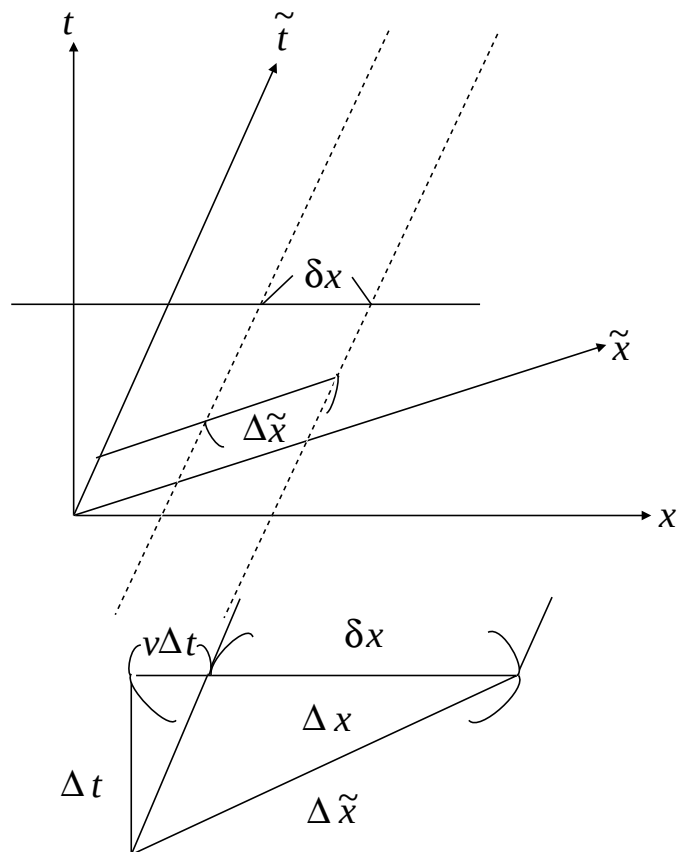


Figure 12: Lorentz 収縮

1.3.7 光行差

光の方向

$$\mathbf{k} = \frac{\Delta\mathbf{x}}{c\Delta t}\tag{46}$$

の変換 ($\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$).

$$k^{i'} = \frac{\Delta x^{i'}}{\Delta t'} = \frac{L_0^{j'}\Delta x^0 + L_i^{j'}\Delta x^i}{L_0^{0'}\Delta x^0 + L_i^{0'}\Delta x^i} = \frac{L_0^{i'} + L_i^{i'}k^i}{L_0^{0'} + L_i^{0'}k^i}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-\gamma \frac{\mathbf{v}}{c} + \mathbf{k} + (\gamma - 1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})\mathbf{n}}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{c}\right)}, \quad \left(\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{v}\right) \\
\mathbf{k}' &= \frac{\frac{\mathbf{k}}{\gamma} - \frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{\gamma-1}{\gamma}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})\mathbf{n}}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{c}} \\
&= \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{c}\right) \left\{ \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right] - \frac{v}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})\mathbf{n} \right\} \mathbf{k} + \dots, \\
&\quad \left(\frac{v}{c} \ll 1\right) \\
&= \mathbf{k} - \frac{v}{c} + \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{c}\right) \mathbf{k} - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \{\mathbf{k} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})\mathbf{n}\} + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^3\right), \\
&\quad \left(\frac{1}{\gamma} \sim 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2, \quad \gamma - 1 \sim \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \\
&\quad \mathbf{k} - \frac{v}{c} [\mathbf{n} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\mathbf{k}] - \frac{1}{2} [\mathbf{k} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})\mathbf{n}] \tag{47}
\end{aligned}$$

よって

$$k'_{\parallel} = k_{\parallel} - \frac{1}{c}(1 - k_{\parallel}^2) + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^3\right) \tag{48}$$

$$k'_{\perp} = k_{\perp} + \frac{1}{c}k_{\parallel}k_{\perp} - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 k_{\perp} + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^3\right) \tag{49}$$

光行差の式で $\mathbf{k}' = \frac{\mathbf{u}'}{c}$, $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{u}}{c}$ とおくと, 速度の合成則

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}\gamma - \frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{\gamma-1}{\gamma}(\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\mathbf{u}}{c}\right))\mathbf{n}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \tag{50}$$

を得る.

1.3.8 速度の合成則

$\mathbf{u} = \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t}$ の変換.

$$u^{j'} = c \frac{\Delta x^{j'}}{\Delta x^{0'}} = c \frac{L_0^{j'} \Delta x^0 + L_i^{j'} \Delta x^i}{L_0^{0'} \Delta x^0 + L_i^{0'} \Delta x^i} = c \frac{cL_0^{j'} + L_i^{j'} u^i}{cL_0^{0'} + L_i^{0'} u^i}$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{u}'}{c} &= \frac{-\gamma \mathbf{v} + \mathbf{u} + (\gamma - 1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})\mathbf{n}}{c\gamma - \gamma \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c}} \\
\mathbf{u}' &= \frac{\mathbf{u} - \gamma \mathbf{v} + (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}}{v^2}}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)} \tag{51}
\end{aligned}$$

特に $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ の時,

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{\gamma} - \mathbf{v} \tag{52}$$

次に $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ の時,

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad (53)$$

成分に分けると,

$$u'_{\parallel} = \frac{u_{\parallel} - v}{1 - \frac{u_{\parallel}v}{c^2}}, \quad u'_{\perp} = \frac{u_{\perp}}{\gamma \left(1 - \frac{u_{\parallel}v}{c^2}\right)} \quad (54)$$

これを展開すると²,

$$u'_{\parallel} = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{u_{\parallel}v}{c^2}\right) (u_{\parallel} - v) = u_{\parallel} - v - \frac{1}{2} \frac{u_{\parallel}v}{c^2} (u_{\parallel} - v) \quad (55)$$

$$u'_{\perp} = \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(-\frac{v^2}{2} + u_{\perp}v\right)\right] u_{\perp} = u_{\perp} + \frac{1}{c^2} \left(-\frac{v^2}{2} + u_{\perp}v\right) u_{\perp} \quad (56)$$

となる.

1.3.9 光行差

$\mathbf{k} = \frac{\Delta \mathbf{x}}{c \Delta t}$, ($|\mathbf{k}|^2 = 1$) の変換. $\mathbf{k} = c\mathbf{u}$ において速度の変換式に代入すると,

$$\mathbf{k}' = \frac{c\mathbf{k} - \gamma \mathbf{v} + (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{v}}{c^2}}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{c}\right)}$$

よって,

$$\mathbf{k}' = \frac{\mathbf{k} - \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} + (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{v}}{c^2}}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{c}\right)} \quad (57)$$

特に,

$$\begin{cases} \mathbf{k} \perp \mathbf{v} \text{ の時} & \mathbf{k}' = \frac{\mathbf{k}}{\gamma} - \frac{\mathbf{v}}{c} \\ \mathbf{k} \parallel \mathbf{v} \text{ の時} & \mathbf{k}' = \mathbf{k} \end{cases} \quad (58)$$

成分に分けると,

$$k'_{\parallel} = \frac{k_{\parallel} - \frac{v}{c}}{1 - \frac{k_{\parallel}v}{c}}, \quad k'_{\perp} = \frac{k_{\perp}}{\gamma \left(1 - \frac{k_{\parallel}v}{c}\right)} \quad (59)$$

展開すると,

$$k' \cong \left[1 + \frac{k_{\parallel}v}{c} + \left(\frac{k_{\parallel}v}{c}\right)^2\right] \left(k_{\parallel} - \frac{v}{c}\right) = k_{\parallel} - \frac{v}{c} \left(1 - k_{\parallel}^2\right) - \left(\frac{v}{c}\right)^2 k_{\parallel} (1 - k_{\parallel}^2) + \dots \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}' &\cong \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{k_{\parallel}v}{c} + \left(\frac{k_{\parallel}v}{c} + \dots\right)\right) \mathbf{k}_{\perp} \\ &= \mathbf{k}_{\perp} + \frac{v}{c} k_{\parallel} \mathbf{k}_{\perp} + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(k_{\parallel}^2 - \frac{1}{2}\right) \mathbf{k}_{\perp} + \dots \end{aligned} \quad (61)$$

² 次の展開式を用いた:

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cong 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

一般には,

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} - \frac{1}{c} [\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}] + \frac{1}{c^2} \left\{ \left[(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})^2 - \frac{v^2}{c^2} \right] \mathbf{k} - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{v} \right\} + \dots \quad (62)$$

となる.

1.3.10 光行差 (ニュートンの考え方)

$$\mathbf{k}' = \frac{\mathbf{k} - \frac{\mathbf{v}}{c}}{\left| \mathbf{k} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right|} \quad (63)$$

$$\Delta\theta' = \theta' - \theta$$

とにおいて,

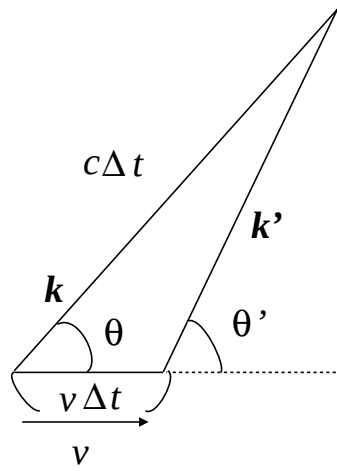


Figure 13: Newton 的光行差

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \frac{v}{c}}, \quad \text{or} \quad \tan \Delta\theta' = \frac{\frac{v}{c} \sin \theta}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \quad (64)$$

と求められる³. $\mathbf{k} \perp \mathbf{v}$ ($\theta = 90^\circ$) の時⁴,

$$\Delta\theta' = \tan^{-1} \frac{v}{c} \quad (65)$$

³ 加法定理より,

$$\tan \Delta\theta' = \frac{\tan \theta' - \tan \theta}{1 + \tan \theta' \tan \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta - \frac{v}{c}} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \frac{v}{c}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta + \frac{v}{c} \sin \theta}{\cos^2 \theta - \frac{v}{c} \cos \theta + \sin^2 \theta} = \frac{\frac{v}{c} \cos \theta}{1 - \frac{v}{c} \sin \theta}$$

を得る.

⁴ $\left| \mathbf{k} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right| = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}$

$\mathbf{k} \parallel \mathbf{v}$ の時,

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} \quad (66)$$

一般に,

$$\left| \mathbf{k} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right| = \sqrt{1 - 2 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{c} + \frac{v^2}{c^2}}$$

であり, 展開公式,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \dots$$

を用いて,

$$\frac{1}{\left| \mathbf{k} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right|} = 1 + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{c} + \frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \dots$$

と展開すると, $\mathbf{k}$ は,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}' &= \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \left[1 + \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{c} + \frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{c} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \dots \right] \\ &= \mathbf{k} - \frac{1}{c} [\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}] + \frac{1}{c^2} \left\{ \left[\frac{3}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})^2 - \frac{v^2}{2} \right] \mathbf{k} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{v} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (67)$$

となる⁵.

1.3.11 Doppler Effect

波数 $\omega \Delta t$ は別の不変量.

$$c \Delta t' = L_0' c \Delta t + L_i^{0'} \Delta x^i = \gamma c \Delta t - \gamma \frac{\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{x}}{c} \quad (68)$$

ここで $\frac{\Delta \mathbf{x}}{c \Delta t} = \mathbf{k}$ であるから, 結局,

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{c} \right) \quad (69)$$

波数は保存量

$$\omega' \Delta t' = \omega \Delta t$$

であるから

$$\omega = \omega' \gamma \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{c} \right) \quad (70)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega' \quad \text{光源：静止系での振動数} \\ \omega \quad \text{観測者：静止系での振動数（観測振動数）} \\ \mathbf{v} \quad \text{光源の観測者からみた速度} \\ \mathbf{k} \quad \text{観測者から見た光の方向ベクトル} \end{array} \right.$$

⁵ ニュートン的な光行差と特殊相対論における光行差の差は,

$$\mathbf{k}_N - \mathbf{k}_{SR} \cong \frac{1}{2c^2} [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})^2 \mathbf{k} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{v}] + \dots$$

となる.

展開すると,

$$\omega = \omega' \left[1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 + \dots \right] \quad (71)$$

$$\frac{\omega - \omega'}{\omega'} = -\frac{b d \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}{c} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 + \dots \quad (72)$$

となる⁶. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} > 0$ (光源は遠ざかる) より $\omega - \omega' < 0 \implies$ Red Shift (赤方偏移).

1.3.12 固有時

固有時 τ (Proper Time) … 運動物体と共に動く時計.

$$(\Delta s)^2 = -c^2 (\Delta \tau)^2 \quad (73)$$

$$(\Delta \tau)^2 = (\Delta t) - \frac{1}{c^2} (\Delta \mathbf{x})^2 = (\Delta t)^2 \left[1 - \left(\frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} \right)^2 \right], \quad \mathbf{v} \equiv \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} \quad (74)$$

$$\frac{\Delta \tau}{\Delta t} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2} = \frac{1}{\gamma} \leq 1, \quad (\Delta \tau = \gamma \Delta t) \quad (75)$$

1.3.13 4元速度 (4-velocity)

速度 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ の4次元化.

$$u^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau}, \quad \tau \text{ (固有時)} \quad (76)$$

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = c\gamma \quad (77)$$

$$u^j = \mathbf{u} = \frac{dx^j}{d\tau} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \gamma \mathbf{v} \quad (78)$$

$\mathbf{v}$ 3-velocity

4元速度の絶対値を求めると,

$$||u^\mu|| = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} = \sqrt{c^2 \gamma^2 - \gamma^2 \mathbf{v}^2} = c \quad (79)$$

となるから, この拘束条件より独立な成分は3成分となる.

1.3.14 4元運動量

$$\left. \begin{aligned} p^\mu &= m u^\mu, \quad m \text{ 固有質量} \\ ||p^\mu|| &= m ||u^\mu|| = mc \\ p^0 &= m u^0 = mc\gamma = \frac{E}{c} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} ||p^\mu||^2 &= m^2 c^2 = m^2 ||u^\mu||^2 = m^2 \gamma^2 c^2 - m^2 \gamma^2 \mathbf{v}^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 \\ E^2 &= m^2 c^2 + \mathbf{p}^2, \quad \mathbf{p} = m \mathbf{u} = m \gamma \mathbf{v} \end{aligned} \right. \quad (80)$$

⁶ ここで γ の展開式,

$$\gamma \sim 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 + O \left(\left(\frac{\mathbf{v}}{c} \right)^4 \right)$$

を用いた.

$$E = m\gamma c^2 = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right) = mc^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = E_0 + T \quad (81)$$

1.3.15 運動方程式

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu, \quad f^\mu \text{ 4元力, 4-force} \quad (82)$$

質点の時は,

$$\begin{aligned} \frac{dp^\mu}{d\tau} &= m \frac{du^\mu}{d\tau} = f^\mu \\ a^\mu &= \frac{f^\mu}{m} \end{aligned} \quad (83)$$

とおいて,

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{c}{\gamma^4} a^0, \quad \gamma^2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{a^0}{c} \mathbf{v} = a^j$$

より,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\gamma^2} \left(a^j - \frac{a^0}{c} \mathbf{v} \right) \quad (84)$$

よって, 座標加速度 $\boldsymbol{\alpha} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ は座標力 a^j とは平行ではない.

1.3.16 4元加速度

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} \quad (85)$$

$$a^0 = \frac{du^0}{d\tau} = c \frac{d\gamma}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} \frac{d\gamma}{dt} = c\gamma \frac{d\gamma}{dt} = \frac{c}{2} \frac{d\gamma^2}{dt} = \frac{c}{2} \left[-\frac{2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)} \right] = \gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c} \quad (86)$$

$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, 座標加速度

$$\begin{aligned} a^j &= \frac{du^j}{d\tau} = \frac{d(\gamma \mathbf{v})}{d\tau} = \frac{d\gamma}{d\tau} \mathbf{v} + \gamma \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \frac{a^0}{c} \mathbf{v} + \gamma^2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c^2} \mathbf{v} + \gamma^2 \mathbf{a} \\ &\quad (a^j \gg a^0, \quad a^\mu: \text{Space-like}) \end{aligned} \quad (87)$$

実は,

$$||u^\mu|| = c = \text{Const}$$

の関係より,

$$c^2 = -\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \quad \rightarrow \quad \frac{dc^2}{d\tau} = 0 = -\eta_{\mu\nu} a^\mu u^\nu - \eta_{\mu\nu} u^\mu a^\nu = -2\eta_{\mu\nu} a^\mu u^\nu \quad \Rightarrow \quad 0 = a^\mu u_\mu \quad (88)$$

したがって $a^\mu \perp u^\mu$ の拘束条件となるから, 独立な成分は3成分となる.

この後 ...

1. 電磁気学 → 相対論的電磁気学

2. 質点 → 有限体

(a) 剛体 → × (困難)

(b) 連続体

i. 流体 (液体・気体) → 相対論的流体力学

ii. 一般連続体 → ?

3. 万有引力 → ?

疑問

特殊相対論 → **慣性系間** (だから特殊)

⇒ 加速度運動は特殊相対論では扱えない?

(例) Thomas Precession

自転する粒子 (スピン)

$$\boldsymbol{\Omega} \cong -\frac{1}{2c^2} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}, \quad (a: \text{電磁気力による加速度}) \quad (89)$$

逐次 Lorentz 変換 → 正当?

2 一般相対性理論概要

2.1 アインシュタインの一般相対性理論

1915年にアインシュタインにより提唱（特殊は1905年）

2.1.1 指導原理

1. 一般相対性原理：すべての物理法則は一般座標変換に対して不変.
2. 等価原理：重力は力 (Force) ではない.
3. 対応原理
 - $U \rightarrow 0$ 特殊相対論に一致.
 - $c \rightarrow \infty$ ニュートン力学に一致.

一般相対論的天体力学とは歪んだ（曲がった）時空中を自由運動（重力 $\neq$ 力）を議論する学問である⁷.

2.1.2 曲がった時空の導入

不変量

1. 線素

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \text{2次形式 (2-form)} \quad (90)$$

$g_{\mu\nu}$: 計量テンソル, 対称2階共変テンソル

2. 変位

$$dx^\mu : (\text{反変}) \text{ベクトル}, \quad \partial x^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} : (\text{共変}) \text{偏微分ベクトル} \quad (91)$$

3. アフィンパラメータ $\lambda \cdots$ 世界線に固有

4. アフィン速度 $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$

5. 4元速度

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad \lambda \rightarrow \tau \quad (92)$$

時間的 (Timelike) 世界線: $cdt > dx^j$

⁷ ポアンカレ: 「天体力学とは万有引力だけが働いている運動を議論する学問。」

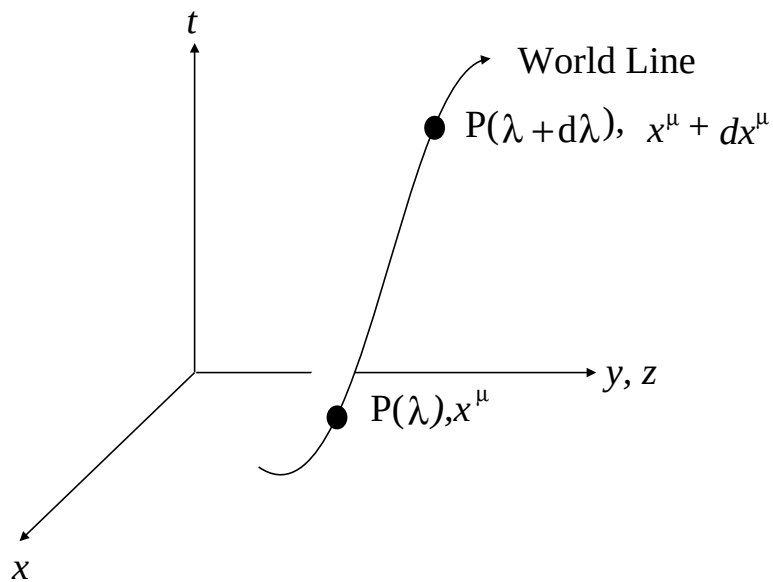


Figure 14: 世界線

6. 4 元方向余弦

$$\omega^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}, \quad \lambda \rightarrow s \quad (93)$$

空間的 (Spacelike) 世界線 : $cdt < dx^j$

7. スル (Null) 世界線

λ はそのまま, 長さ 0 の世界線 $cdt \sim dx^\mu$

2.1.3 なぜ座標系が必要か?

方程式は共変 (Covariant) : 物理法則はどの座標系を取っても不変 → 単一粒子ならどの座標系でもよい.

しかし,

多体系	固有時 → 世界線に固有	独立時間刻みの様になる
$1 \dots i \dots N$	$\tau_1 \dots \tau_i \dots \tau_N \rightarrow N$ 個存在	⇒ ITS 法

↓
多時間理論は複雑

よって一つの物指 (guage)/座標系 (Coordinate system) を導入して全ての現象をこれで記述する.

$$\left. \begin{array}{l} \text{共変 4 次元方程式 } i = i \\ \dots \\ \text{共変 4 次元方程式 } i = N \end{array} \right\} \Rightarrow \text{単一座標系 (3 次元)} \quad (94)$$

2.1.4 絶対微分

4 加速度 $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)$ は? $\Rightarrow$ これは反変ベクトルではない.

実際, (一般) 座標変換,

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\mu), \quad x^\mu \rightarrow x^{\alpha'}$$

において,

$$x^{\alpha'} = E_{\mu}^{\alpha'} x^\mu, \quad E_{\mu}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}, \quad \text{変換のヤコビヤン} \quad (95)$$

この時 $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ の全微分 du^μ の変換は,

$$u^{\alpha'} = E_{\mu}^{\alpha'} u^\mu$$

を微分して,

$$du^{\alpha'} = (dE_{\mu}^{\alpha'}) + E_{\mu}^{\alpha'} du^\mu$$

よって,

$$du^{\alpha'} \neq E_{\mu}^{\alpha'} du^\mu \quad (96)$$

である.

テンソルの性質を保存する微分は何か? $\rightarrow$ 絶対微分 D

$$D = d - \delta, \quad \delta: \text{平行移動による Path に依存する差} \quad (97)$$

曲がった Path に沿って平行移動すると $\delta \neq 0$. 一般に δu^μ は

$$\begin{aligned} \delta u^\mu &\propto dx^\mu, \quad \text{変位が小} \rightarrow \text{平行移動も小} \\ &\propto u^\mu \quad \text{元の量が小} \rightarrow \text{平行移動も小} \\ \delta u^\mu(x^\rho) &= C_{\nu\lambda}^\mu(x^\rho) u^\nu dx^\lambda \\ C_{\nu\lambda}^\mu &: \text{接続係数 (Connection Coefficient)} \end{aligned} \quad (98)$$

一般相対論では伝統的に,

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = -C_{\nu\lambda}^\mu \quad (99)$$

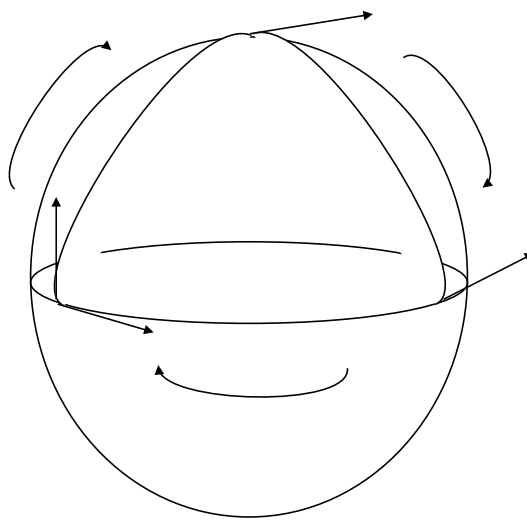


Figure 15: 曲がった時空での平行移動

と置きクリストッフェルの記号 (Christoffel's symbol) と呼ぶ. クリストッフェル記号はテンソルではない. したがって絶対微分は

$$Du^\mu = du^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu dx^\lambda \quad (100)$$

となる.

公式

$$DA = dA, \quad A: \text{スカラ関数} \quad (101)$$

$$DB^\mu = dB^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu B^\nu dx^\lambda \quad (102)$$

$$DC_\mu = dC_\mu - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu C_\nu dx^\lambda \quad (103)$$

DB^μ が成り立つとして DA に $A = B^\mu C_\mu$ を代入

$$DE^{\mu\nu} = dE^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu E^{\alpha\nu} dx^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu E^{\mu\alpha} dx^\beta \quad (104)$$

$$DF_\nu^\mu = dF_\nu^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu\nu} E_\nu^\alpha dx^\beta - \Gamma_{\nu\beta}^\alpha E_\alpha^\mu dx^\beta \quad (105)$$

2.1.5 アフィン微分

$$\frac{D}{D\lambda} \quad D: \text{絶対微分}$$

アフィン加速度

$$\frac{D}{D\lambda} \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)$$

4元加速度

$$\frac{D}{D\tau} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{Du^\mu}{d\tau}$$

$$\begin{aligned}
DB^\mu &= dB^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu B^\nu dx^\lambda \\
&= \left(\frac{dB^\mu}{dx^\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu B^\nu \right) dx^\lambda \\
&= B_{;\lambda}^\mu dx^\lambda
\end{aligned} \tag{106}$$

ここで $B_{;\lambda}^\mu$ を共変微分と呼ぶ⁸．一般に

$$D = dx^\mu \nabla_\mu, \quad \nabla_\mu = \frac{D}{\partial x^\mu}$$

より,

$$\frac{D}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \nabla_\mu = u^\mu \nabla_\mu = (\nabla_u) \tag{107}$$

2.1.6 $g_{\mu\nu}, \delta_\nu^\mu, g^{\mu\nu}, (\eta_{\mu\nu})$

線素

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu$$

$g_{\mu\nu}$ は座標に依存した表現．添字の上げ下げを $g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}$ を使って行う．

$$A_\nu^\mu = g_{\nu\rho} A^{\mu\rho} \quad \text{など}$$

$$\delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases}$$

とすると

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu \tag{108}$$

となる．ここで $g^{\mu\nu}$ は共変逆計量テンソル．

2.1.7 $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$

要請

1. 添字の上げ下げ $\leftrightarrow D$ (絶対微分) 可換
2. 積の微分法則を満たす.

$$D(A^\mu B_\nu) = (DA^\mu) B_\nu + A^\mu (DB_\nu) \quad \text{等}$$

⁸ ちなみに普通の偏微分は”,”(カンマ) を使って

$$B_{,\lambda}^\mu = \frac{\partial B^\mu}{\partial x^\lambda}$$

と表す．

これから直ちに

$$Dg^{\mu\nu} = D\delta^\mu_\nu = Dg_{\mu\nu}(= D\eta_{\mu\nu}) = 0 \quad (109)$$

すなわち $g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}$ は D に対して定数と同じように振舞う。

この要請から $g_{\mu\nu}$ の絶対微分を計算すると,

$$\begin{aligned} 0 &= Dg_{\mu\nu} = dg_{\mu\nu} - (\Gamma^\lambda_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho}g_{\mu\lambda})dx^\rho \\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho\theta}} &= \Gamma_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}g_{\mu\lambda} \end{aligned} \quad (110)$$

$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は下つき添字に対して対称,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \quad (111)$$

ϕ をスカラー場だとすると,

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right) &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \\ \frac{D}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\lambda} \right) &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} - \Gamma^\nu_{\lambda\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \\ \frac{D}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right) - \frac{D}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\lambda} \right) &= (\Gamma^\nu_{\mu\lambda} - \Gamma^\nu_{\lambda\mu}) \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \end{aligned} \quad (112)$$

直交座標系で左辺=0 ($D \rightarrow \partial$). よって,

$$0 = (\Gamma^\nu_{\mu\lambda} - \Gamma^\nu_{\lambda\mu}) \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \quad (113)$$

これは座標変換しても $0 \rightarrow 0$, 一方 ϕ は任意より結局,

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\mu\lambda} \quad (114)$$

となる.

2.1.8 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ その2

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} = \Gamma^\lambda_{\mu\rho}g_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\rho}g_{\lambda\mu}$$

を用いて $(\mu, \nu, \rho) + (\nu, \rho, \mu) - (\rho, \mu, \nu)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} &= 2\Gamma^\lambda_{\mu\rho}g_{\lambda\nu} \equiv 2\Gamma_{\nu,\mu\rho} \\ \Gamma^\lambda_{\mu\rho} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\kappa\rho}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\kappa} \right) \end{aligned}$$

添字を整理して描き直せば,

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\mu\kappa} \left(\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa} \right) \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\kappa} (g_{\nu\kappa,\lambda} + g_{\kappa\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\kappa}) \end{aligned} \quad (115)$$

2.1.9 場の方程式

大雑把に言って,

$$\text{運動方程式} \leftarrow \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} \text{ (力)} \leftarrow g_{\mu\nu} \text{ (ポテンシャル)} \leftarrow \text{場の方程式}$$

通常はアインシュタインの重力場の方程式,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (116)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}, \quad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (117)$$

$$R_{\nu\lambda\rho}^{\mu} = \Gamma_{\nu\lambda,\rho}^{\mu} - \Gamma_{\nu\rho,\lambda}^{\mu} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu}\Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu}\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} \quad (118)$$

を弱い重力場の近似のもとで解いて $g_{\mu\nu}$ の展開形を求める. ここで, $R_{\nu\lambda\rho}^{\mu}$ はリーマンテンソル, $R_{\mu\nu}$ はリッチテンソル, R はリッチスカラー (スカラー曲率) である.

しかし, 重力場の方程式は一意ではない (Brans-Dicke 理論など). $\Rightarrow$ PPN formalism (パラメータ化されたポスト・ニュートン近似).

2.1.10 ニュートン近似

弱い重力場における近似. 対応原理

$$\text{重力} \rightarrow 0 \text{ で特殊相対論} \Rightarrow g_{\mu\nu} \cong \eta_{\mu\nu}.$$

そこでメトリックを

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad h_{\mu\nu}(x) \ll 1 \quad (119)$$

とおく. ここで遅い粒子 ($v \ll c$) を考えると運動方程式は,

$$\begin{aligned} \frac{dv^k}{dt} &= -c^2\Gamma_{00}^k + c(v^k\Gamma_{00}^0 - 2v^i\Gamma_{i0}^k) + (2v^kv^i\Gamma_{i0}^0 - v^iv^j\Gamma_{ij}^k) + \frac{1}{c}(v^kv^iv^j\Gamma_{ij}^0) \\ &\simeq -c^2\Gamma_{00}^k \end{aligned} \quad (120)$$

重力ポテンシャルを ϕ とおくと, ニュートンの運動方程式は

$$\frac{dv^k}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x^k} \quad (121)$$

すなわち

$$-c^2\Gamma_{00}^k \sim \frac{\partial\phi}{\partial x^k} \quad (122)$$

となる. 一方,

$$\Gamma_{00}^k = -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \quad (123)$$

となるので, 結局,

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} \quad (124)$$

を示唆する．したがってニュートン近似のメトリックとして,

$$g_{00} \sim -1 + \frac{2\phi}{c^2} + \dots \quad (125)$$

$$g_{i0} \sim 0 \quad (126)$$

$$g_{ij} \sim \delta_{ij} \quad (127)$$

を得る．

2.1.11 固有時の方程式

固有時 τ : 任意に動いている時計の刻む時刻系．

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 \left(-g_{00} - \frac{2g_{i0}}{c} \frac{dx^i}{dt} - \frac{g_{ij}}{c^2} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right)$$

$$d\tau \sim dt \left(1 - \frac{2\phi}{c^2} - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right), \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (128)$$

ここで ϕ は時計の（この座標系での）重力力関数（rough にポテンシャルということもある）．したがって,

$$\frac{d\tau}{dt} \cong \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} (2\phi + \mathbf{v}^2)} \sim 1 - \frac{1}{c^2} \left(\phi + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + \dots \quad (129)$$

となり, この式を固有時の方程式 (Equation of Proper Time) と呼ぶ．ここで $1/c^2$ の項の ϕ は重力による時間の送れ (Gravitational Time Dilation), $\mathbf{v}^2$ は Lorentz 変換 (特殊相対論) による時間の遅れを表す．

2.1.12 ジオイド上の時計

回転している地球上（地心座標系）に固定された時計を考える．ただし, 地球以外の天体は無視する．このとき,

ϕ : 地球の重力ポテンシャル

$\mathbf{v}$: 時計の地心速度 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

すると $\phi + \mathbf{v}^2/2$ は地心座標系の有効ポテンシャル（見かけのポテンシャル）．しかし, 回転座標系 ($\prime$ で表す) では,

$$\left. \begin{array}{l} \phi' = \phi + \frac{b d v^2}{2} \\ \mathbf{v}' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \phi' + \frac{\mathbf{v}'^2}{2} = \phi + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \quad (130)$$

となり, ϕ の一次では固有時は不変．

測地学では,

重力 (Gravity) : $\phi + \mathbf{v}^2/2$ (回転)

(万有引力的) 重力 (Gravitation) : ϕ (非回転)

つまり，固有時はジオイド面（広く等重力ポテンシャル面）上では ϕ の一次 (v/c の 2 次) の精度で同等である．この事を利用して時計の（ラフな）同期が行われている．

$$W_0 = \left(\phi_E + \frac{v^2}{2} \right)_{\text{ジオイド面}} \sim 6.2636860(30) \times 10^7 \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$\frac{W_0}{c^2} \sim \frac{6.2636860(30) \times 10^7 \text{m}^2/\text{s}^2}{(2.99792458 \times 10^8 \text{m/s})^2} \sim 6.9686291(3) \times 10^{-10} \quad (131)$$

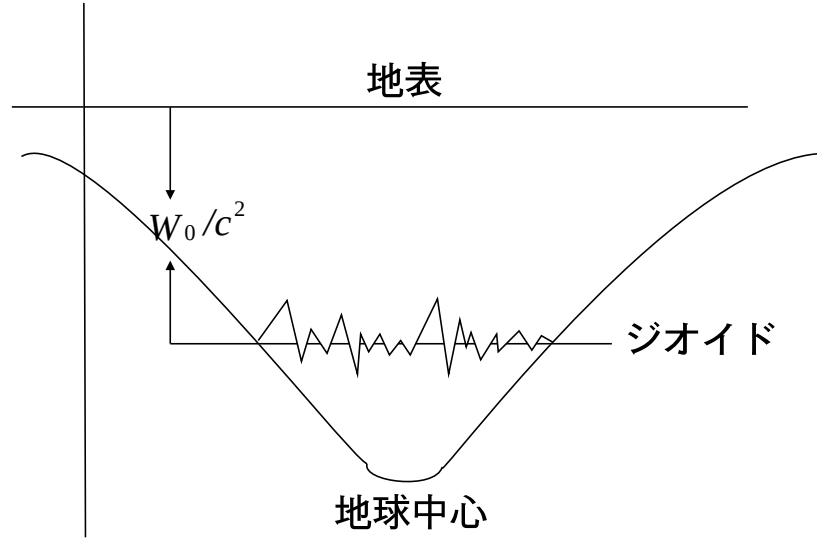


Figure 16: ジオイド

2.1.13 地表（≠ジオイド上）

$$\Delta W = W - W_0 \cong \Delta \left(\phi_E + \frac{v^2}{2} \right) \sim -gh \quad (132)$$

ここで g は重力加速度 (Gravity), h は標高．今 $g \sim 9.8 \text{ m/s}^2$, $c^2 \sim 1.0 \times 10^{17} (\text{m/s})^2$, $h = 1 \text{ m}$, とすると,

$$\frac{gh}{c^2} \sim 9.8 \times 10^{-17}$$

つまり，原子時計の Rate は概ね $1.0 \times 10^{-16}/\text{m}$ で変化する．

2.1.14 自由運動する時計

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \left(\phi + \frac{v^2}{2} \right), \quad \phi = \frac{\mu}{r}, \quad \mu = GM \quad (133)$$

ケプラー運動 ($e < 1$) の場合, エネルギー積分,

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{v}^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (134)$$

より直ちに (a : semi-major axis),

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{2a} \right) = 1 - \frac{\mu}{c^2 a} \left(\frac{2a}{r} - \frac{1}{2} \right)$$

ここで,

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos u, \quad n a dt = r du, \quad \mu = n^2 a^3$$

より (u : eccentric anomaly E とも書く, n mean motion),

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \int \left[1 - \frac{\mu}{c^2 a} \left(\frac{2a}{r} - \frac{1}{2} \right) \right] dt \\ &= \left(1 + \frac{\mu}{2c^2 a} \right) \int dt - \frac{2\mu}{c^2 a} \int \frac{a}{r} dt = \left(1 + \frac{\mu}{2c^2 a} \right) \int dt - \frac{2\mu}{c^2 n a} \int du \end{aligned}$$

ここでケプラー方程式,

$$u - e \sin u = \ell = n(t - t_0) \quad (135)$$

を用いると,

$$\tau - \tau_0 = \left(1 + \frac{\mu}{2c^2 a} \right) (t - t_0) - \frac{2\mu}{c^2 n a} (u - u_0) = \left(1 - \frac{3\mu}{2c^2 a} \right) (t - t_0) - \frac{2\mu e}{c^2 n a} \sin(136)$$

ここで, μ/c^2 を half of gravitational radius とすると,

	μ	μ/c^2
太陽	$1.327 \times 10^{20} \text{ m}^2/\text{s}^2$	1.476 km
地球	$3.99 \times 10^{14} \text{ m}^2/\text{s}^2$	4.44 mm

GPS/NAVSTAR : $a \sim 2.66 \times 10^7 \text{ km}$, $e \sim 0.003 \sim 0.010$, $n = \sqrt{n/a^3} \sim 1.459 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\mu}{c^2 a} &\sim \frac{4.44 \times 10^{-3}}{2.66 \times 10^7} \sim 2.50 \times 10^{-10} \\ 2 \frac{\mu}{c^2 a} \frac{e}{n} &\sim 2 \times \frac{4.44 \times 10^{-3}}{2.66 \times 10^7} \frac{0.003 \sim 0.010}{1.459 \times 10^{-4}} \sim (6.9 \sim 22.9) \times 10^{-9} \end{aligned}$$

<応用>太陽の回りの地球 : $e \sim 0.0167$, $n = 2\pi/(365.2422 \times 86400) \sim 1.98 \times 10^{-7} \text{ rad/s}$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\mu}{c^2 a} &\sim 1.5 \times \frac{1.48 \times 10^3}{1.50 \times 10^{11}} \sim 1.48 \times 10^{-8} \\ 2 \frac{\mu}{c^2 a} \frac{e}{n} &\sim 2 \times \frac{1.48 \times 10^3}{1.50 \times 10^{11}} \frac{0.0167}{1.98 \times 10^{-7}} \sim 1.66 \times 10^{-3} \end{aligned} \quad (137)$$

2.1.15 光の運動方程式再考

ニュートン近似で運動方程式を考えると，メトリックは

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \frac{2\phi}{c^2} \\ g_{0i} = 0 \\ g_{ij} = \delta_{ij} \end{cases} \quad (138)$$

となる⁹．したがってメトリックを μ 成分で偏微分すると，

$$g_{00,0} = \frac{2\dot{\phi}}{c^3}, \quad g_{00,i} = 0, \quad \text{others} = 0 \quad (139)$$

である¹⁰．運動方程式の計算のために，まずクリストッフエル記号を計算すると，ニュートン近似のメトリックにおいて，

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} (g_{\nu\kappa,\lambda} + g_{\kappa\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\kappa}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} (\delta_{\nu}^0 \delta_{\kappa}^0 g_{00,\lambda} + \delta_{\kappa}^0 \delta_{\lambda}^0 g_{00,\nu} - \delta_{\nu}^0 \delta_{\lambda}^0 g_{00,\kappa}) \\ &= \frac{1}{2} (g^{\mu 0} g_{00,\lambda} \delta_{\nu}^0 + g^{\mu 0} g_{00,\nu} \delta_{\lambda}^0 - g^{\mu\kappa} g_{00,\kappa} \delta_{\lambda}^0 \delta_{\nu}^0) \end{aligned} \quad (140)$$

より，

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2} (g^{i0} g_{00,0} \delta_0^0 + g^{i0} g_{00,0} \delta_0^0 - g^{i\kappa} g_{00,\kappa}) \\ &= -\frac{1}{2} \delta^{i\kappa} g_{00,\kappa} = -\frac{1}{2} g_{00,k} = -\frac{1}{c^2} \phi_{,k} \end{aligned} \quad (141)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} (g^{00} g_{00,0} + g^{00} g_{00,0} - g^{0\kappa} g_{00,\kappa}) \\ &= \frac{1}{2} g^{00} g_{00,0} = -\frac{1}{c^3} \dot{\phi} \frac{1}{1 - \frac{2\phi}{c^2}} \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{j0}^i &= \frac{1}{2} (g^{i0} g_{00,0} \delta_j^0 + g^{i0} g_{00,0} \delta_0^0 - g^{i\kappa} g_{00,\kappa} \delta_j^0 \delta_0^0) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (143)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{i0}^0 &= \frac{1}{2} (g^{00} g_{00,0} \delta_i^0 + g^{00} g_{00,i} \delta_0^0 - g^{0\kappa} g_{00,\kappa} \delta_i^0 \delta_0^0) \\ &= \frac{1}{2} g^{00} g_{00,i} = -\frac{1}{c^2} \phi_{,i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2\phi}{c^2}} \end{aligned} \quad (144)$$

⁹ $g_{\mu\nu}$ の逆行列は，

$$\begin{cases} g^{00} = \frac{1}{-1 + \frac{2\phi}{c^2}} \approx -1 - \frac{2\phi}{c^2} - \frac{4\phi^2}{c^4} - \dots \\ g^{0i} = 0 \\ g^{ij} = \delta^{ij} \end{cases}$$

となる．

¹⁰ ここで

$$,0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad ,i = \frac{\partial}{\partial x}$$

である．

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \left(g^{k0} g_{00,i} \delta_j^0 + g^{k0} g_{00,j} \delta_i^0 + g^{k\kappa} g_{00,\kappa} \delta_i^0 \delta_j^0 \right) \\ &= 0\end{aligned}\tag{145}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2} \left(g^{00} g_{00,i} \delta_j^0 + g^{00} g_{00,j} \delta_i^0 - g^{0\kappa} g_{00,\kappa} \delta_i^0 \delta_j^0 \right) \\ &= 0\end{aligned}\tag{146}$$

まとめると,

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{\phi_{,i}}{c^2}, \quad \Gamma_{00}^0 = -\frac{\dot{\phi}}{c^3} \frac{1}{1 - \frac{2\phi}{c^2}}, \quad \Gamma_{i0}^0 = -\frac{\phi_{,i}}{c^2} \frac{1}{1 - \frac{2\phi}{c^2}}, \quad \text{others} = 0\tag{147}$$

となる. よって光の運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dv^k}{dt} &= -c^2 \Gamma_{00}^k + cv^k \Gamma_{00}^0 + 2v^k v^i \Gamma_{i0}^0 \\ &= \phi_{,k} - \frac{v^k}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{1}{1 - \frac{2\phi}{c^2}} - \frac{1}{c^2} v^k v^i \phi_{,i} \frac{1}{1 - \frac{2\phi}{c^2}}\end{aligned}\tag{148}$$

ベクトル形式で書き表すと,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \phi - \frac{1}{1 - \frac{2\phi}{c^2}} \left(\dot{\phi} \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \right) \frac{\mathbf{v}}{c^2_{\phi, \dot{\phi}, v \sim c}}\tag{149}$$

$$\sim \nabla \phi - \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \nabla \phi \right) \frac{\mathbf{v}}{c}\tag{150}$$

となる. しかし, このニュートン近似による運動方程式は**間違い**.

なぜか?

$$\text{ニュートン近似} \rightarrow \mathbf{v}/c \ll 1 \rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \phi$$

しかし上の運動方程式は $v \sim c$ (勝手に拡散してしまう)

↓

よって得られた結果と最初の仮定が consistent ではない.

2.2 ポスト・ガリレイ近似

2.2.1 ポスト・ガリレイ近似

ニュートン近似の次の近似

光の運動で、光の速度を $\mathbf{v} \sim c$ の粒子と考えてある程度妥当な近似.

さて、時間反転 M_t を考え、 $g_{\mu\nu}$ のうち g_{0i} のみ符号を変える. $\mathbf{v}$ の奇数次は符号を変え、偶数次は符号を変えない.

$$g_{00} = -1 + \frac{2\phi}{c^2} + O\left(\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2\right) + \dots \quad (151)$$

$$g_{0i} = 0 + O\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right) + O\left(\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^3\right) + \dots \quad (152)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O\left(\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2\right) + O\left(\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^4\right) + \dots \quad (153)$$

2.2.2 回転

g_{0i} に $\frac{\mathbf{v}}{c}$ の項はあるのか？

↓

ない（もしあればコリオリ力が出て来る）.

いま、空間（剛体）回転（という一つの座標変換）を考えよう.

$$t' = t, \quad \mathbf{x}' = R\mathbf{x}, \quad R = R_z(\phi)R_x(\theta)R_z(\psi), \quad x^{a'} = R_j^{a'} x^j \quad (154)$$

ここで (ϕ, θ, ψ) はオイラー角. このとき,

$$\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^j} = R_j^{a'}, \quad \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^j} = 0, \quad \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^0} = \frac{1}{c} \frac{dR_j^{a'}}{dt} x^j \quad (155)$$

今、簡単のために

$$R = R_z(\omega t), \quad \omega = \text{一定} \quad (156)$$

としよう. このとき,

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x \cos \omega t + y \sin \omega t \\ y' = -x \sin \omega t + y \cos \omega t \\ z' = z \end{cases} \quad (157)$$

これより,

$$\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^0} = \frac{\partial x'}{c \partial t} = -\frac{\omega}{c} (x \sin \omega t - y \cos \omega t) = \frac{\omega y'}{c} \quad (158)$$

$$\frac{\partial y'}{c \partial t} = -\frac{\omega}{c} (x \cos \omega t - y \sin \omega t) = -\frac{\omega x'}{c} \quad (159)$$

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \cos \omega t \quad (160)$$

ここで,

$$R_{\mu}^{\alpha'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\omega}{c}y' & \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\frac{\omega}{c}x' & -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{\alpha'}^{\mu} = R \quad (161)$$

このとき,

$$g_{\mu\nu} = R_{\mu}^{\alpha'} R_{\nu}^{\beta'} g_{\alpha'\beta'}, \quad g_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha'\beta'} \quad (162)$$

とすると,

$$\begin{aligned} g_{00} &= R_0^{\alpha'} R_0^{\beta'} g_{\alpha'\beta'} \\ &= (R_0^{0'})^2 g_{0'0'} + 2R_0^{0'} R_0^{i'} g_{0'i'} + R_0^{i'} R_0^{j'} \\ &= -1 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (y'^2 + x'^2) \end{aligned} \quad (163)$$

$$\begin{aligned} g_{0j} &= R_0^{\alpha'} R_j^{\beta'} g_{\alpha'\beta'} \\ &= R_0^{0'} R_j^{0'} g_{0'0'} + R_0^{i'} R_j^{0'} g_{i'0'} + R_0^{i'} R_j^{k'} g_{i'k'} \\ &= R_0^{i'} R_j^{i'} \end{aligned} \quad (164)$$

$$g_{01} = \frac{\omega}{c} (y' \cos \omega t + x' \sin \omega t) = \frac{\omega}{c} y \quad (165)$$

$$g_{02} = \frac{\omega}{c} (y' \sin \omega t - x' \cos \omega t) = -\frac{\omega}{c} x \quad (166)$$

$$g_{03} = 0 \quad (167)$$

$$\begin{aligned} g_{ij} &= R_i^{\alpha'} R_j^{\beta'} g_{\alpha'\beta'} \\ &= R_i^{0'} R_j^{0'} g_{0'0'} + 2R_i^{k'} R_j^{0'} g_{k'0'} + R_i^{k'} R_j^{l'} g_{k'l'} \\ &= R_i^{k'} R_j^{k'} = \delta_{ij} \end{aligned} \quad (168)$$

回転 $R = R_z(\omega t)$ で

$$\eta_{\alpha'\beta'} \rightarrow g_{\mu\nu} \quad (169)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{00} = -1 + \frac{\omega^2(x'^2 + y'^2)}{c^2} \quad (\text{遠心力ポテンシャル}) \\ g_{01} = \frac{\omega y}{c} \\ g_{02} = -\frac{\omega x}{c} \\ g_{03} = 0 \\ g_{ij} = \delta_{ij} \end{array} \right. \quad (170)$$

一般に,

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \Omega \mathcal{R}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (171)$$

となり,

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \frac{\mathbf{v}_{\text{rot}}^2}{c^2} \\ g_{0i} = -\frac{\mathbf{v}_{\text{rot}}}{c} \\ g_{ij} = \delta_{ij} \end{cases} \quad (172)$$

ここで,

$$\mathbf{v}_{\text{rot}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} (= \Omega \mathbf{x}) \quad (173)$$

である. したがって, 空間 (剛体) 回転は g に密接に関係する.

もし, $g_{0i} = O(\mathbf{v}/c)$ だとすると,

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \frac{2\phi}{c} \\ g_{0i} = g_i = O\left(\frac{\mathbf{w}}{c}\right) \\ g_{ij} = \delta_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^{00} = \frac{1-g^{0j}g_{0j}}{g_{00}} \sim -1 - \frac{2\phi}{c^2} - \frac{\mathbf{w}^2}{c^2} \\ g^{0j} = g^{00}g_{0j} \sim -g_j = -\frac{\mathbf{w}}{c} \\ g^{ij} = \delta_{ij} + g^{0i}g_{0j} \sim \delta_{ij} + \mathbf{g} \otimes \mathbf{g} = \delta_{ij} + \frac{\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}}{c^2} \end{cases} \quad (174)$$

これより,

$$g_{00,0} = \frac{2\dot{\phi}}{c^3}, \quad g_{00,k} = \frac{2\phi_{,k}}{c^2}, \quad g_{0j,0} = \frac{\dot{\mathbf{w}}}{c^2}, \quad g_{0j,k} = \frac{w_{j,k}}{c}, \quad \text{others} = 0 \quad (175)$$

これらを用いてクリストッフエル記号を計算すると,

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\kappa}(g_{\nu\kappa,\lambda} + g_{\kappa\lambda,\nu} - g_{\nu\mu,\kappa}) \quad (176)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^k &= \frac{1}{2}(g^{k0}g_{00,0} + g^{k0}g_{00} - g^{k0}g_{00} + g^{kl}g_{0l,0} + g^{kl}g_{l0,0} - g^{kl}g_{00,l}) \\ &= \frac{1}{2}(g^{k0}g_{00,0} + 2g^{kl}g_{0l,0} - g^{kl}g_{00,l}) \\ &\sim \left(\frac{\dot{\mathbf{w}}}{c^2} - \frac{\nabla\phi}{c^2}\right)_k \left(\sim \frac{\dot{w}_k}{c^2} - \frac{w_{,k}}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (177)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}(g^{00}g_{00,0} + 2g^{0l}g_{0l,0} - g^{0l}g_{00,l}) \\ &\sim O(3) \end{aligned} \quad (178)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{i0}^k &= \frac{1}{2}(g^{k0}g_{i0,0} + g^{k0}g_{00,i} - g^{k0}g_{0i,0} + g^{kj}g_{ij,0} + g^{kj}g_{j0,i} - g^{kj}g_{0i,j}) \\ &= \frac{1}{2}(g_{k0,i} - g_{0i,k}) = \frac{1}{2c}(w_{k,i} - w_{i,k}) \end{aligned} \quad (179)$$

$$\text{others} = 0 \quad (180)$$

これより運動方程式は,

$$\frac{dv^k}{dt} = -c^2\Gamma_{00}^k - 2cv^i\Gamma_{i0}^k \sim -\dot{w}_k + \phi_{,k} - v^i(w_{k,i} - w_{i,k}) \quad (181)$$

ベクトル形式で表すと,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla\phi - \dot{\mathbf{w}} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} + \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \nabla\phi - \dot{\mathbf{w}} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{w}) \quad (182)$$

となる¹¹．電磁場の Lorentz 力の公式,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) \\ \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}\end{aligned}\tag{183}$$

と比べると,

$$\frac{e}{m}\Phi = -\phi, \quad \frac{e}{mc}\mathbf{A} = \mathbf{H}\tag{184}$$

という対応がつく．したがって,

回転 … (コリオリ力) → 磁場

となる．ニュートン力学の経験によれば, 適当な座標系を取れば慣性系で, 少なくとも,

$$\dot{\mathbf{w}} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{w} = 0$$

としてよい． $\mathbf{w}$ の定数部分も 2 次形式の対角化でよい．したがって, ポスト・ガリレイ近似のもとでは, g_{0i} に $O(\mathbf{v}/c)$ の項はないとしてよい．

2.2.3 ポスト・ガリレイ近似のメトリック

便宜的に,

$$g_{00} = -1 + \frac{2\phi}{c^2}\tag{185}$$

$$g_{0j} = 0\tag{186}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{2\Phi_{ij}}{c^2}\tag{187}$$

と書く． Φ_{ij} は

1. 2 階対称

2. $r \rightarrow \infty$ で $\Phi_{ij} \rightarrow 0$

3. $\rho, \mathbf{x}$ だけの関数¹²

¹¹ ここでベクトル公式,

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$$

を用いた．

¹² 一つの可能性として,

$$\delta_{ij}\phi, \quad \phi_{ij}^{(\mathbf{x})} \equiv \int \frac{\rho'(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}'_i d\mathbf{x}'_j\tag{188}$$

と置ける．

4. 空間回転に対して不変

これより,

$$\Phi_{ij} = \gamma_1 \phi \delta_{ij} + \gamma_2 \phi_{ij} \quad (189)$$

と置ける. ここでゲージ変換,

$$\begin{cases} t \rightarrow \tilde{t} \\ x^j \rightarrow x^{\tilde{j}} \equiv x^j - \frac{\gamma_2}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^j} \int d^3 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = x^j - \frac{\gamma_2}{c^2} \frac{\partial \chi}{\partial x^j} \end{cases} \quad (190)$$

$$\Delta \chi = -2\phi, \quad \text{スーパーポテンシャル, 重調和} \quad (191)$$

すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{\tilde{j}}}{\partial x^k} &= \delta_k^j - \frac{\gamma_2}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^j \partial x^k} \\ &= \delta_{jk} - \frac{\gamma_2}{c^2} \int d^3 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') \left[\frac{\delta_{jk}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_j (\mathbf{x} - \mathbf{x}')_k}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right] \\ &= \delta_{jk} - \frac{\gamma_2 \phi}{c^2} \delta_{jk} + \frac{\gamma_2 \phi_{jk}}{c^2} \end{aligned} \quad (192)$$

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^{\tilde{j}}} = \delta_{jk} + \frac{\gamma_2 \phi}{c^2} \delta_{jk} - \frac{\gamma_2 \phi_{jk}}{c^2} \quad (193)$$

これより g_{ij} の変換は,

$$\begin{aligned} g_{jk} \rightarrow g_{\tilde{j}\tilde{k}} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\tilde{i}}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\tilde{j}}} g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^l}{\partial x^{\tilde{i}}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{\tilde{j}}} g_{lm} \\ &= \left(\delta_{li} + \frac{\gamma_2 \phi}{c^2} \delta_{li} - \frac{\gamma_2 \phi_{li}}{c^2} \right) \left(\delta_{mj} + \frac{\gamma_2 \phi}{c^2} \delta_{mj} - \frac{\gamma_2 \phi_{mj}}{c^2} \right) \left(\delta_{lm} + \frac{2\gamma_1 \phi}{c^2} \delta_{lm} + \frac{2\gamma_2 \phi_{lm}}{c^2} \right) \\ &= \delta_{ij} + 2(\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\phi}{c^2} \delta_{ij} + \dots \end{aligned} \quad (194)$$

ここで,

$$\gamma \equiv \gamma_1 + \gamma_2$$

とおくと, 結局,

$$\Phi_{ij} = \gamma \phi \delta_{ij} \quad (195)$$

と置いて良い. ここで γ は PPN パラメータである (Loerntz 因子ではない). この γ はアインシュタインの相対論では

$$\gamma = 1$$

に, 一方ブランズ・ディッケ理論 (スカラーテンソル理論) では,

$$\gamma = \frac{1 + \omega}{2 + \omega}$$

となり，重力理論によって異なった値をとる¹³．よって，ポスト・ガリレイ近似のメトリックは，

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \frac{2\phi}{c^2} \\ g_{0j} = 0 \\ g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{2\gamma\phi}{c^2}\delta_{ij} \end{cases} \quad (196)$$

となる．

2.2.4 速い粒子の運動方程式

まず，ポスト・ガリレイ近似のメトリックの逆行列を求めると，

$$\begin{cases} g^{00} = \frac{1}{g_{00}} = \frac{1}{-1 + \frac{2\phi}{c^2}} \\ g^{0i} = 0 \\ g^{ij} = \delta_{ij} \frac{1}{1 + \frac{2\gamma\phi}{c^2}} \end{cases} \quad (197)$$

となる．メトリックの偏微分は，

$$g_{00,0} = \frac{2\dot{\phi}}{c^2}, \quad g_{00,k} = \frac{2\phi_{,k}}{c^2}, \quad g_{0j,\mu} = 0, \quad g_{ij,0} = \frac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{ij}, \quad g_{ij,k} = \frac{2\gamma\phi_{,k}}{c^2}\delta_{ij}$$

これらを用いてクリストッフエル記号を計算すると．

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^k &= \frac{1}{2} (g^{k0}g_{00,0} + 2g^{kj}g_{0j,0} - g^{kj}g_{00,j}) \\ &= -\frac{\phi_{,k}}{c^2} \frac{1}{1 + \frac{2\gamma\phi}{c^2}} \sim -\frac{\phi_{,k}}{c^2} \end{aligned} \quad (198)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} (g^{00}g_{00,0} + 2g^{0j}g_{0j,0} - g^{0j}g_{00,j}) \\ &= -\frac{\dot{\phi}}{c^2} \frac{1}{1 - \frac{2\gamma\phi}{c^2}} \sim -\frac{\dot{\phi}}{c^2} \end{aligned} \quad (199)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{j0}^k &= \frac{1}{2} (g^{k0}g_{00,j} + g^{kl}g_{0l,j} + g^{kl}g_{lj,0} - g^{kl}g_{0j,l}) \\ &= \frac{\gamma\phi}{c^2} \delta_j^k \frac{1}{1 + \frac{2\gamma\phi}{c^2}} \sim \frac{\gamma\phi}{c^2} \delta_j^k \end{aligned} \quad (200)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{j0}^0 &= \frac{1}{2} (g^{00}g_{00,j} + g^{0l}g_{0l,j} + g^{0l}g_{lj,0} - g^{0l}g_{0j,l}) \\ &= -\frac{\phi_{,j}}{c^2} \frac{1}{1 - \frac{2\gamma\phi}{c^2}} \sim -\frac{\phi_{,j}}{c^2} \end{aligned} \quad (201)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} (g^{k0}g_{0i,j} + g^{k0}g_{0j,i} - g^{k0}g_{ij,0} + g^{kl}g_{li,j} + g^{kl}g_{lj,i} - g^{kl}g_{ij,l}) \\ &= \frac{\gamma}{c^2} (\phi_{,i}\delta_j^k + \phi_{,j}\delta_i^k - \phi_{,k}\delta_j^i) \frac{1}{1 + \frac{2\gamma\phi}{c^2}} \end{aligned} \quad (202)$$

¹³ $\omega \rightarrow \infty$ でアインシュタインの理論に一致する．

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2} \left(g^{00} g_{0i,j} + g^{00} g_{0j,i} - g^{00} g_{ij,0} + g^{0l} g_{li,j} + g^{0l} g_{lj,i} - g^{0l} g_{ij,l} \right) \\
&= \frac{\gamma \dot{\phi}}{c^3} \delta_{ij} \frac{1}{1 - \frac{2\gamma\phi}{c^2}} \sim \frac{\gamma \dot{\phi}}{c^3} \delta_{ij}
\end{aligned} \tag{203}$$

これらを用いると運動方程式は、

$$\begin{aligned}
\frac{dv^k}{dt} &= -c^2 \Gamma_{00}^k + cv^k \Gamma_{00}^0 - 2cv^i \Gamma_{i0}^k - v^i v^j \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{c} v^i v^j v^k \Gamma_{ij}^0 \\
&= \phi_{,k} - \frac{\dot{\phi}}{c^2} v^k - 2cv^i \frac{\gamma \dot{\phi}}{c^2} \delta_i^k + 2v^k v^i \left(-\frac{\phi_{,i}}{c^2} \right) \\
&\quad - v^i v^j \frac{\gamma}{c} (\phi_{,i} \delta_{kj} + \phi_{,j} \delta_{ki} - \phi_{,k} \delta_{ij}) + \frac{1}{c} v^k v^i v^j \frac{\gamma \dot{\phi}}{c^3} \delta_{ij} \\
&= \phi_{,k} - (1 + 2\gamma) \frac{\dot{\phi}}{c^2} v^k - 2 \frac{v^i \phi_{,i}}{c^2} v^k \\
&\quad - \frac{\gamma}{c} \left(v^i \phi_{,i} v^k + v^j \phi_{,j} v^k - v^i v^i \phi_{,k} \right) + \frac{\gamma \dot{\phi}}{c^4} v^i v^i v^k
\end{aligned} \tag{204}$$

ベクトル形式で書くと、

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \nabla\phi - (1 + 2\gamma) \frac{\dot{\phi}}{c^2} \mathbf{v} - 2(1 - \gamma) \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla\phi}{c^2} \mathbf{v} + \frac{\gamma \mathbf{v}^2}{c^2} \nabla\phi + \frac{\gamma \mathbf{v}^2 \dot{\phi}}{c^4} \mathbf{v} \\
&= \left(1 + \gamma \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right) \nabla\phi - \left[(1 + 2\gamma) - \gamma \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right] \frac{\dot{\phi}}{c^2} \mathbf{v} - 2(1 + \gamma) \frac{\mathbf{v} \nabla\phi}{c^2} \mathbf{v}
\end{aligned} \tag{205}$$

これが、ポスト・ガリレイ近似における速い粒子 $\mathbf{v} \sim c$ の運動方程式である。ただし、アンダーラインの項は無視して来た g_{0i} のオーダーと同じなので本当は正しくない。

2.2.5 光の運動方程式

光は長さゼロの測地線 $ds^2 = 0$ なので、拘束条件、

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

から、

$$\begin{aligned}
0 &= g_{00} + 2g_{0j} \frac{dx^j}{dx^0} + g_{ij} \frac{dx^i}{dx^0} \frac{dx^j}{dx^0} - 1 + \frac{2\phi}{c^2} + \left(1 + \frac{2\gamma\phi}{c^2} \right) \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \\
\frac{\mathbf{v}^2}{c^2} &= \frac{1 - \frac{2\phi}{c^2}}{1 + \frac{2\gamma\phi}{c^2}} \cong 1 - 2(a + \gamma) \frac{\phi}{c^2}
\end{aligned} \tag{206}$$

ここで $\mathbf{v}^2/c^2 = 1$ と近似して、

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (1 + \gamma) \nabla\phi - \underline{\frac{\dot{\phi}}{c^2}} - 2(1 + \gamma) \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \nabla\phi \right) \frac{\mathbf{v}}{c} \tag{207}$$

ここでアンダーラインの項は一つしたのオーダーである。結局、

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (1 + \gamma) \left[\nabla\phi - 2 \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \nabla\phi \right) \frac{\mathbf{v}}{c} \right] - \frac{\dot{\phi}}{c^2} \mathbf{v} \tag{208}$$

最後の項は小さい量となる．これがポスト・ガリレイ近似における光の運動方程式である¹⁴．

¹⁴ ここでは積分，

$$\left| \frac{\boldsymbol{v}}{c} \right| = 1 - (1 + \gamma) \frac{\phi}{c^2}$$

がある．

2.3 光の運動

光に及ぼす重力場の影響は小さい（例えば太陽の運動）．

$$\dot{\phi} \sim \frac{|\nabla\phi|}{c} \quad (209)$$

このとき $(\dot{\phi}/c^2)\mathbf{v}$ は次のオーダーになる．光の運動方程式は，

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (1+\gamma) \left[\nabla\phi - 2 \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \nabla\phi \right) \frac{\mathbf{v}}{c} \right] \quad (210)$$

$$\nabla\phi = -GM_J \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_J}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_J|^3} \quad (211)$$

ここで， GM_J は天体 J の重力定数×質量を， $\mathbf{x}_J$ は天体 J の位置を表す．いま

$$\frac{|\nabla\phi|}{c^2} \ll 1$$

より，この方程式を摂動論で解く．

0次の解：

$$\frac{d\mathbf{v}^{(0)}}{dt} = 0, \quad \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) \end{cases} \quad (\text{等速直線運動}) \quad (212)$$

1次の補正項：

$$\frac{d\mathbf{v}^{(1)}}{dt} = (1+\gamma) \left[\nabla\phi(\mathbf{x}^{(0)}) - 2 \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}^{(0)}) \right) \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \right] \quad (213)$$

$$\frac{d\mathbf{x}^{(1)}}{dt} = \mathbf{v}^{(1)} \quad (214)$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = 0, \quad \mathbf{x}^{(1)} = 0, \quad \text{at } t = t_0$$

さて， $1+\gamma$ は定数， $\mathbf{v}^{(0)}$ は定ベクトルであるから，もし，

$$\frac{d\Delta\mathbf{v}}{dt} = \nabla\phi(\mathbf{x}^{(0)}), \quad \frac{d\Delta\mathbf{x}}{dt} = \Delta\mathbf{v}$$

が解ければ，

$$\mathbf{v}^{(1)} = (1+\gamma) \left[\Delta\mathbf{v} + 2 \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \Delta\mathbf{v} \right) \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \right] \quad (215)$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = (1+\gamma) \left[\Delta\mathbf{x} + 2 \left(\frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \cdot \Delta\mathbf{x} \right) \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c} \right] \quad (216)$$

は求める運動方程式の解である．

ここで積分公式，

$$\int dt \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}t}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}t|^3} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}t}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}t|} \times \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ は定ベクトル} \quad (217)$$

を用いて¹⁵,

$$\Delta \mathbf{v} = - \int_0^{t-t_0} dt' GM_J \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_J + \mathbf{v}_0 t'}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_J + \mathbf{v}_0 t'|^3}, \quad t' = t - t_0 \quad (219)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_0 &= \frac{\mathbf{v}^{(0)}}{c}, \quad \mathbf{r}_{0J} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_J, \quad \mathbf{r}_J = \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}_J = \mathbf{r}_{0J} + c\mathbf{n}_0(t - t_0) \\ \mathbf{s}_{0J} &= \mathbf{r}_{0J} \times \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{r}_{0J} \times \mathbf{v}_0}{c} \end{aligned}$$

等とおくと,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v} &= -GM_J \left[\frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_J + \mathbf{v}_0 t}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_J + \mathbf{v}_0 t|} \right]_0^{t-t_0} \times \frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_J) \times \mathbf{v}_0}{|(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_J) \times \mathbf{v}_0|} \\ &= -GM_J \left(\frac{\mathbf{r}_J}{r_J} - \frac{\mathbf{r}_{0J}}{r_{0J}} \right) \times \frac{c}{c^2} \frac{\mathbf{s}_J}{|\mathbf{s}_J|^2} \\ &= -\frac{GM_J}{c} \left(\frac{\mathbf{r}_J}{r_J} - \frac{\mathbf{r}_{0J}}{r_{0J}} \right) \times \frac{\mathbf{s}_J}{|\mathbf{s}_J|^2} \end{aligned} \quad (220)$$

これをさらに積分公式,

$$\int \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}t}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}t|} dt = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} |\mathbf{a} + \mathbf{b}t| + \frac{\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^3} \ln [|\mathbf{b}| |\mathbf{a} + \mathbf{b}t| + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}t)] \quad (221)$$

を用いてもう一度積分すると¹⁶,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x} &= -\frac{GM_J}{c} \left[\frac{\mathbf{v}_0}{|\mathbf{v}|^2} |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_J + \mathbf{v}_0 t'| + \frac{\mathbf{v}_0 \times ((\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_J) \times \mathbf{v}_0)}{|\mathbf{v}_0|^3} \right. \\ &\quad \times \ln \{ |\mathbf{v}_0| |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_J + \mathbf{v}_0 t'| + \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_J + \mathbf{v}_0 t') \} - \left. \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_J}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_J|} t' \right]_0^{t-t_0} \times \frac{\mathbf{s}_{0J}}{|\mathbf{s}_{0J}|^2} \end{aligned} \quad (222)$$

つまり,

$$\Delta \mathbf{x} = -\frac{GM_J}{c} \left[\frac{\mathbf{n}_0}{c} (r_J - r_{0J}) + \frac{\mathbf{n}_0 \times \mathbf{s}_{0J}}{c} \ln \left| \frac{n_0 r_0 + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_0}{n_0 r_{0J} + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_{0J}} \right| - \frac{\mathbf{r}_{0J}}{r_{0J}} (t - t_0) \right] \times \frac{\mathbf{s}_{0J}}{s_{0J}^2} \quad (224)$$

¹⁵ 数学大公式集 (丸善, 大槻訳), 2, 265, 5-6 より,

$$\int \frac{d + et}{\sqrt{a + 2bt + ct^2}^3} dt = \frac{(db - ae) - (cd - be)t}{(ac - b^2)\sqrt{a + 2bt + ct^2}} \quad (218)$$

から, $\mathbf{b}^2 \rightarrow c, \mathbf{a}^2 \rightarrow a, \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \rightarrow b, \mathbf{a} \rightarrow d, \mathbf{b} \rightarrow e$ と置き換え, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \rightarrow ac - b, \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - \mathbf{a}^2 \mathbf{b} \rightarrow db - ae, \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b} \rightarrow cd - be$ とすればよい.

¹⁶ 数学大公式集, 2.261, 2.264,2 より,

$$\begin{aligned} \int \frac{d + et}{\sqrt{a + 2bt + ct^2}} &= \frac{e\sqrt{a + 2bt + ct^2}}{c} + \left(d - \frac{b}{c} e \frac{1}{\sqrt{c}} \right) \ln \left(\sqrt{c} \sqrt{a + 2bt + ct^2} + ct + b \right) \\ &= \frac{1}{c} \left\{ e\sqrt{a + 2bt + ct^2} + (cd - be) \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left[\sqrt{c} \sqrt{a + 2bt + ct^2} + ct + b \right] \right\} \end{aligned} \quad (222)$$

より, $\mathbf{b}^2 \rightarrow c, \mathbf{a}^2 \rightarrow a, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \rightarrow b, \mathbf{a} \rightarrow d, \mathbf{b} \rightarrow e$ と置き換える.

この $\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{v}$ を用いて,

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}_0 + c\mathbf{n}_0(t - t_0) + (1 + \gamma) [\Delta \mathbf{x} - (\mathbf{n}_0 \cdot \Delta \mathbf{x})\mathbf{n}_0] \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)} = c\mathbf{n}_0 + (1 + \gamma) [\Delta \mathbf{v} + (\mathbf{n}_0 \cdot \Delta \mathbf{v})\mathbf{n}_0] \end{cases} \quad (225)$$

これが1次の解である (2次の解は Richter & Matzmaer (198?) にある)。

2.3.1 光行差方程式

いま $t = t_1$ に $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ を発した光が $t = t_2$ に $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$ に達したとすると,

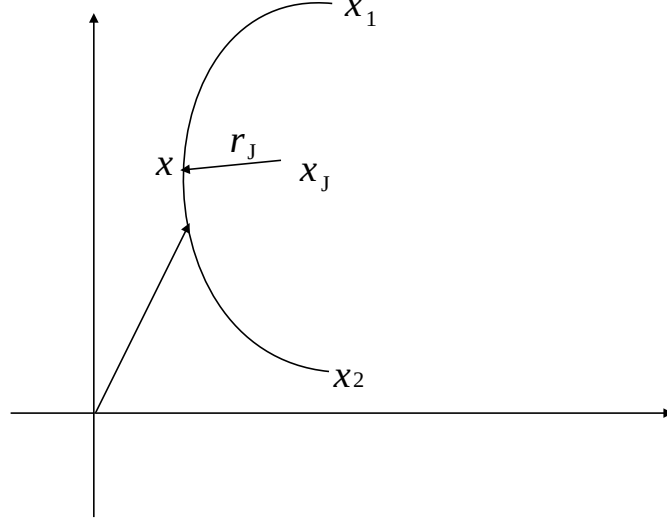


Figure 17: 光行差

$$\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1(t_2 - t_1) + (1 + \gamma) [\Delta \mathbf{x}_{21} - 2(\mathbf{n}_1 \cdot \Delta \mathbf{x}_{21})\mathbf{n}_1] \quad (226)$$

$$\mathbf{v}_1 = c\mathbf{n}_1 \quad (227)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_{21} = & -\frac{GM_J}{c} [\mathbf{n}_1(r_{2J} - r_{1J}) + \mathbf{n}_1 \times \mathbf{s}_{1J} \\ & \times \ln \left| \frac{n_1 r_{1J} + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_{2J}}{n_1 r_{2J} + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_{1J}} \right| - c \frac{\mathbf{r}_{1J}}{r_{1J}} (t_2 - t_1)] \times \frac{\mathbf{s}_{1J}}{s_{1J}^2} \end{aligned} \quad (228)$$

2乗を取ると,

$$\begin{aligned} r_{21}^2 = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2 = & c^2 n_1^2 (t_2 - t_1)^2 + 2(1 + \gamma)(\Delta \mathbf{x}_{21} \cdot c\mathbf{n}_1)(t_2 - t_1) \\ & - 2(1 + \gamma)(\mathbf{n}_1 \cdot \Delta \mathbf{x}_{21})(\mathbf{n}_1 \cdot c\mathbf{n}_1)(t_2 - t_1) + O(|\Delta \mathbf{x}_{21}|^2) \end{aligned}$$

ここで $n_1^2 \sim 1$ より,

$$\begin{aligned} r_{21}^2 & \cong c^2 n_1^2 (t_2 - t_1)^2 - 2(1 + \gamma)(\Delta \mathbf{x}_{21} \cdot c\mathbf{n}_1)(t_2 - t_1) \\ r_{21} & = c n_1 (t_2 - t_1) - (1 + \gamma)(\mathbf{n}_1 \cdot \Delta \mathbf{x}_{21}) \end{aligned} \quad (229)$$

さて,

$$\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{s}_{1J}) = 0, \mathbf{n}_1 \cdot \{(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{s}_{1J}) \times \mathbf{s}_{1J}\} = (\mathbf{s}_{1J} \times \mathbf{n}_1)^2 - \mathbf{s}_{1J}^2 \mathbf{n}_1^2 \sim -\mathbf{s}_{1J}^2 \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{r}_{1J} \times \mathbf{s}_{1J}) = -\mathbf{s}_{1J}^2$$

より¹⁷,

$$\mathbf{n}_1 \cdot \Delta \mathbf{x}_{21} = \frac{GM_J}{c^2} \left[\ln \left| \frac{n_1 r_{1J} + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_{2J}}{n_1 r_{2J} + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_{1J}} \right| - c \frac{t_2 - t_1}{r_{1J}} \right] \quad (230)$$

したがって,

$$\begin{aligned} r_{21} &= cn_1(t_2 - t_1) - (1 + \gamma) \frac{GM_J}{c^2} \ln \left| \frac{n_1 r_{1J} + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_{2J}}{n_1 r_{2J} + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_{1J}} \right| + \frac{GM_J}{c} \frac{t_2 - t_1}{r_{21}} \\ &= c \left\{ n_1 + (1 + \gamma) \frac{GM_J}{c^2} \frac{1}{r_{21}} \right\} (t_2 - t_1) - (1 + \gamma) \frac{GM_J}{c^2} \ln \left| \frac{n_1 r_{1J} + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_{2J}}{n_1 r_{2J} + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_{1J}} \right| \end{aligned}$$

拘束条件より,

$$n_1 = 1 - (1 + \gamma) \frac{GM_J}{c^2} \frac{1}{r_{21}}$$

より,

$$\left\{ n_1 + (1 + \gamma) \frac{GM_J}{c^2} \frac{1}{r_{21}} \right\} = 1$$

これより,

$$c(t_2 - t_1) = r_{21} - (1 + \gamma) \frac{GM_J}{c^2} \ln \left| \frac{n_1 r_{1J} + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_{2J}}{n_1 r_{2J} + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_{1J}} \right| \quad (231)$$

今までの議論は GM_J に関して Linear であり, | | の中では $n_1 \sim 1$ としてよいので,

$$c(t_2 - t_1) = r_{21} - (1 + \gamma) \sum_J \frac{GM_J}{c^2} \ln \left| \frac{r_{1J} + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_{2J}}{r_{2J} + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_{1J}} \right| \quad (232)$$

これが光行差方程式である. ここで,

$$r_{21} = |\mathbf{x}_2(t_2) - \mathbf{x}_1(t_1)|, \quad r_{2J} = |\mathbf{x}_2(t_2) - \mathbf{x}_J(t_1)|, \quad r_{1J} = |\mathbf{x}_1(t_1) - \mathbf{x}_J(t_1)|$$

である.

さて, いま図より,

$$\text{JH}^2 = r_{2J}^2 - (\mathbf{r}_{2J} \cdot \mathbf{n})^2 = r_{1J}^2 (\mathbf{r}_{1J} \cdot \mathbf{n})^2$$

加比の理から,

$$\begin{aligned} \frac{r_{2J} - \mathbf{r}_{2J} \cdot \mathbf{n}}{r_{1J} - \mathbf{r}_{1J} \cdot \mathbf{n}} &= \frac{r_{1J} - \mathbf{r}_{1J} \cdot \mathbf{n}}{r_{1J} - \mathbf{r}_{2J} \cdot \mathbf{n}} \\ &= \frac{r_{1J} + r_{2J} + \mathbf{r}_{2J} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{r}_{1J} \cdot \mathbf{n}}{r_{1J} + r_{2J} + \mathbf{r}_{1J} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{r}_{2J} \cdot \mathbf{n}} \\ &= \frac{r_{1J} + r_{2J} + r_{12}}{r_{1J} + r_{2J} - r_{12}} \end{aligned} \quad (233)$$

¹⁷ $\mathbf{n}_1^2 \sim 1$ およびベクトル公式,

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}$$

を用いた.

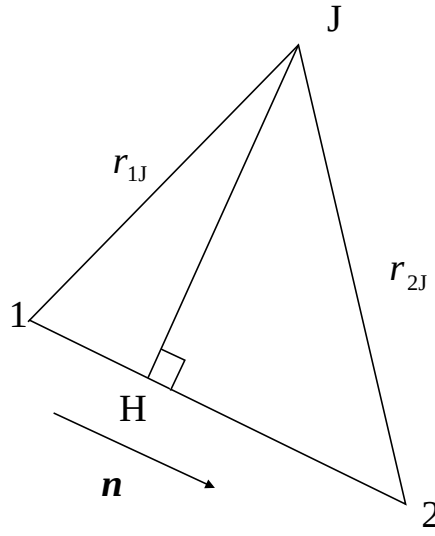


Figure 18: 光行差

となる。ここで、

$$\mathbf{r}_{1J} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{r}_{2J} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_{21} \cdot \mathbf{n} = r_{21}$$

を用いた。これより光行差方程式は

$$c(t_2 - t_1) = r_{21} + (1 + \gamma) \sum_J \frac{GM_J}{c^2} \ln \left| \frac{r_{1J} + r_{2J} + r_{12}}{r_{1J} + r_{2J} - r_{12}} \right| \quad (234)$$

となる。

2.3.2 天体の縁を通過する光

いま、線分 12 までの距離 (impact parameter) を b とすると、

$$r_{21} = \sqrt{r_{1J}^2 - b^2} + \sqrt{r_{2J}^2 - b^2}$$

いま、 $r_{1J}, r_{2J} \gg b$ とすると、

$$\sqrt{r_{1J}^2 - b^2} = r_{1J} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{r_{1J}} \right)^2} \sim r_{1J} - \frac{b^2}{2r_{1J}}$$

を用いて (添字 2 についても同様)、 $\ln$ の中身は、

$$\frac{r_{1J} + r_{2J} + \sqrt{r_{1J}^2 - b^2} + \sqrt{r_{2J}^2 - b^2}}{r_{1J} + r_{2J} - \sqrt{r_{1J}^2 - b^2} - \sqrt{r_{2J}^2 - b^2}} \cong \frac{2(r_{1J} + r_{2J})}{\frac{b^2}{2r_{1J}} + \frac{b^2}{2r_{2J}}} \sim \frac{4r_{1J}r_{2J}}{b^2} \quad (235)$$

となる。これから、

$$c\Delta_J t = (1 + \gamma) \frac{GM_J}{c^2} \ln \left(\frac{4r_{1J}r_{2J}}{b^2} \right)$$

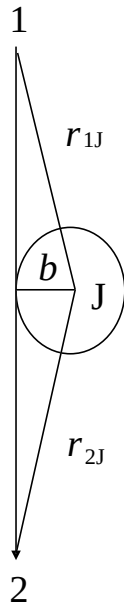


Figure 19: 天体の縁を通過する光

$$\begin{aligned}
 &= (1 + \gamma) \frac{GM_J}{c^2} \left(\ln 4 + \ln \frac{r_{1J}}{b} + \ln \frac{r_{2J}}{b} \right) \\
 &= (1 + \gamma) \frac{GM_J}{c^2} \left(1.39 + \ln \frac{r_{1J}}{b} + \ln \frac{r_{2J}}{b} \right) \quad (236)
 \end{aligned}$$

を得る．例として太陽の縁を通過して来る光を考えると， $b_{\min} = R_{\odot} = 6.96 \times 10^8 \text{m}$ ，天体 2 を地球，天体 1 を金星とすると，

$$\begin{aligned}
 r_{2J} &\sim 1\text{AU} = 1.50 \times 10^{11} \text{m}, \quad \ln \frac{r_{2J}}{R_{\odot}} \sim 5.39 \\
 r_{1J} &\sim 0.72\text{AU} = 1.08 \times 10^{11} \text{m}, \quad \ln \frac{r_{1J}}{R_{\odot}} \sim 5.05 \\
 \frac{GM_{\odot}}{c^2} &\sim 1476 \text{m}
 \end{aligned}$$

したがって

$$c\Delta_{\odot} \cong 2 \times 1476 \times (1.30 + 5.37 + 5.05) \sim 34.86 \text{km} \quad (237)$$

往復で 0.23 ms 遅れる¹⁸．

2.3.3 光行差方程式の解法

光行差方程式

$$c(t_2 - t_1) = r_{21} + (1 + \gamma) \sum_J \frac{GM_J}{c^2} \left| \frac{r_{1J} + r_{2J} + r_{21}}{r_{1J} + r_{2J} - r_{21}} \right| \quad (238)$$

¹⁸ 1 ns = 30 cm, 1 μ s = 300 m, 1 ms = 300 km である．

$$r_{21} = |\mathbf{x}_2(t_2) - \mathbf{x}_1(t_1)|$$

において $t_2, \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_J$ が与えられたとき, t_1 を求める (視位置 (光方向) を求めるのに必要) .

Newton-Raphson 法

$$\begin{aligned} t_1^{(0)} &= t_2 \\ t_1^{(1)} &= t_1^{(0)} - \frac{c(t_2 - t_1^{(0)})r_{21}}{c + \mathbf{v}_1^{(0)} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{21}^{(0)}} \\ &= t_2 - \frac{|\mathbf{x}_2(t_2) - \mathbf{x}_1(t_2)|}{c + \mathbf{v}_1(t_2) \cdot \frac{\mathbf{x}_1(t_2) - \mathbf{x}_2(t_2)}{|\mathbf{x}_2(t_2) - \mathbf{x}_1(t_2)|}} \\ &= t_2 - \frac{r_{12}^{(0)2}}{cr_{12}^{(0)} + \mathbf{v}_1(t_2) \cdot \{\mathbf{x}_1(t_2) - \mathbf{x}_2(t_2)\}} \end{aligned} \quad (239)$$

$$t_1^{(2)} = t_1^{(1)} - \frac{c(t_2 - t_1^{(1)}) - r_{12}^{(1)} - (1 + \gamma) \sum_J \frac{GM_J}{c^2} \left| \frac{r_{1J} + r_{2J} + r_{21}}{r_{1J} + r_{2J} - r_{21}} \right|}{c + \mathbf{v}_1(t_1^{(1)}) \cdot \mathbf{r}_{12}^{(1)}} \quad (240)$$

$t_1^{(2)}$ はポスト・ガリレイ近似のオーダーで正しい.

2.3.4 光方向 (視位置)

$\mathbf{x}_2$ での光の到達方向,

$$\mathbf{d}_{12} = -\frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|} \quad (241)$$

$$\mathbf{v}_1 = c\mathbf{n}_1 \quad (242)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + (1 + \gamma) [\Delta\mathbf{v} - 2(\mathbf{b}_1 \cdot \Delta\mathbf{v})\mathbf{n}_1] \quad (243)$$

$$\Delta\mathbf{v} = \sum_J \frac{GM_J}{c^2} \frac{\mathbf{s}_{1J}}{s_{1J}^2} \left(\frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}} - \frac{\mathbf{r}_{1J}}{r_{1J}} \right) \quad (244)$$

これより,

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_2|^2 &= \mathbf{v}_1^2 + 2\mathbf{v}_1(1 + \gamma) [\Delta\mathbf{v} - 2(\mathbf{b}_1 \cdot \Delta\mathbf{v})\mathbf{n}_1] + (1 + \gamma)^2 [\Delta\mathbf{v} - 2(\mathbf{b}_1 \cdot \Delta\mathbf{v})\mathbf{n}_1]^2 \\ &\cong v_1^2 + 2(1 + \gamma) \{ \mathbf{v}_1 \cdot \Delta\mathbf{v} - 2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \Delta\mathbf{v}) \} \\ &= v_1^2 + 2(1 + \gamma) \mathbf{v}_1 \cdot \Delta\mathbf{v} (1 - 2n^2) \\ &\simeq v_1^2 - 2(1 + \gamma) \mathbf{v}_1 \cdot \Delta\mathbf{v}, \quad \left(n^2 \sim \frac{v_1^2}{c^2} \sim 1 + O\left(\frac{v_1}{c}\right) \right) \\ v_2 &\simeq v_1 - (1 + \gamma) \mathbf{v}_1 \cdot \Delta\mathbf{v} \end{aligned} \quad (245)$$

これを用いて,

$$-\mathbf{d}_{12} = \frac{\mathbf{v}_2}{v_2} = \frac{\mathbf{v}_1 + (1 + \gamma) [\Delta\mathbf{v} - 2(\mathbf{n}_1 \cdot \Delta\mathbf{v})\mathbf{n}_1]}{v_1 - (1 + \gamma) \mathbf{n}_1 \cdot \Delta\mathbf{v}}$$

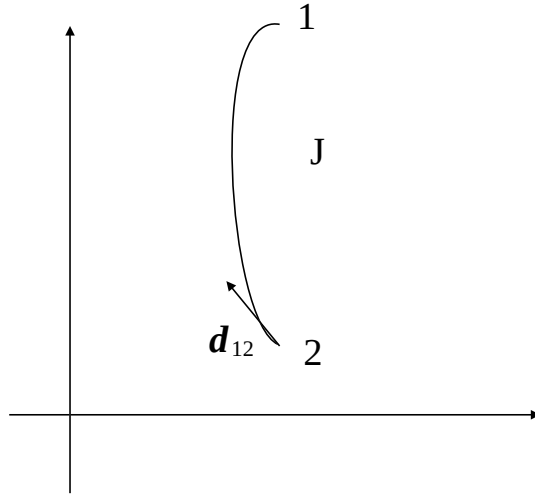


Figure 20: 光方向（視位置）

$$\begin{aligned}
&\cong \frac{\mathbf{v}_1}{v_1} + (1 + \gamma) \left\{ \frac{\Delta \mathbf{v}}{v_1} - 2 \left(\mathbf{n}_1 \cdot \frac{\Delta \mathbf{v}}{c} \right) \mathbf{n}_1 \right\} + (1 + \gamma) \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \Delta \mathbf{v}}{v_1^2} \cdot \mathbf{v}_1 \\
&\cong \frac{\mathbf{v}_1}{v_1} + (1 + \gamma) \left\{ \frac{\Delta \mathbf{v}}{c} - \left(\mathbf{n}_1 \cdot \frac{\Delta \mathbf{v}}{c} \right) \mathbf{n}_1 \right\}, \quad \left(\mathbf{v}_1 \sim c, \quad \frac{\mathbf{v}_1}{v_1} \sim \mathbf{n}_1 + \dots \right) \\
&\cong \frac{\mathbf{v}_1}{v_1} + (1 + \gamma) \mathbf{n}_1 \times \left(\frac{\Delta \mathbf{v}}{c} \times \mathbf{n}_1 \right)
\end{aligned} \tag{246}$$

となる¹⁹．一方,

$$-\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{21} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1(t_2 - t_1) + (1 + \gamma)[\Delta \mathbf{x} - 2(\mathbf{n}_1 \cdot \Delta \mathbf{x})\mathbf{n}_1] \tag{248}$$

より, 同様にして,

$$-\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{\mathbf{v}_1}{v_1} + (1 + \gamma)\mathbf{n}_1 \cdot \left(\frac{\Delta \mathbf{x}}{r_{12}} \times \mathbf{n}_1 \right) \tag{249}$$

両辺を見比べて,

$$\mathbf{d}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} + (1 + \gamma)\mathbf{n}_1 \times \left(\frac{\delta \mathbf{x}}{r_{12}} - \frac{\Delta \mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{n}_1 \tag{250}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{v} &= \sum_J \frac{GM_J}{c} \frac{\mathbf{s}_{1J}}{|\mathbf{s}_{1J}|^2} \times \left(\frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}} - \frac{\mathbf{r}_{1J}}{r_{1J}} \right) \\
\Delta \mathbf{x} &= \sum_J \frac{GM_J}{c^2} \frac{\mathbf{s}_{1J}}{|\mathbf{s}_{1J}|^2} \times \left[(r_{2J} - r_{1J})\mathbf{n}_1 + \mathbf{n} \right]_1 \times \mathbf{s}_{1J} \ln \left| \frac{r_{1J} + r_{2J} + r_{21}}{r_{1J} + r_{2J} - r_{21}} \right| - \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} c(t_2 - t_1)
\end{aligned}$$

¹⁹ 最後の式変形でベクトル公式,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} = \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \tag{247}$$

を用いた.

より,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\Delta \mathbf{x}}{r_{12}} - \frac{\Delta \mathbf{v}}{c}\right) \times \mathbf{n}_1 &= \sum_J \frac{GM_J}{c^2} \frac{\mathbf{s}_{1J}}{|\mathbf{s}_{1J}|^2} \times \left[\frac{r_{2J} - r_{1J}}{r_{12}} \mathbf{n}_1 + \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{s}_{1J}}{r_{12}} \ln \left| \frac{r_{1J} + r_{2J} + r_{21}}{r_{1J} + r_{2J} - r_{21}} \right| \right. \\
&\quad \left. - \frac{\mathbf{r}_{1J} c(t_2 - t_1)}{r_{1J} r_{12}} - \frac{\mathbf{r}_{1J}}{r_{1J}} + \frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}} \right] \times \mathbf{n}_1 \\
&\simeq \sum_J \frac{GM_J}{c^2} \frac{\mathbf{s}_{1J}}{|\mathbf{s}_{1J}|^2} \times \left[\frac{r_{2J} - r_{1J}}{r_{12}} \mathbf{n}_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{s}_{1J}}{r_{12}} \ln \left| \frac{r_{1J} + r_{2J} + r_{21}}{r_{1J} + r_{2J} - r_{21}} \right| - \frac{\mathbf{r}_{1J}}{r_{1J}} \right] \times \mathbf{n}_1 \\
&\quad \left(c(t_2 - t_1) = r_{12} + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \quad \text{より} \right)
\end{aligned} \tag{251}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_{1J} &= \mathbf{r}_{1J} \times \mathbf{n}_1 \\
(\mathbf{s}_{1J} \times \mathbf{n}_1) \times \mathbf{s}_{1J} &= \{(\mathbf{r}_{1J} \cdot \mathbf{n}_1) \mathbf{n}_1 - \mathbf{r}_{1J}\} \times \mathbf{n}_1 = -\mathbf{s}_{1J} \\
\{\mathbf{s}_{1J} \times (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{s}_{1J})\} \times \mathbf{s}_{1J} &= \{s_{1J}^2 \mathbf{n}_1 - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{s}_{1J}) \mathbf{s}_{1J}\} \times \mathbf{n}_1 = s_{1J}^2 \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_1 = 0 \\
(\mathbf{s}_{1J} \times \mathbf{r}_{2J}) \times \mathbf{n}_1 &= \{(\mathbf{r}_{1J} \times \mathbf{n}_1) \times \mathbf{r}_{2J}\} \times \mathbf{n}_1 \\
&= \{(\mathbf{r}_{1J} \cdot \mathbf{r}_{2J}) \mathbf{n}_1 - (\mathbf{r}_{2J} \cdot \mathbf{n}_1) \mathbf{r}_{1J}\} \times \mathbf{n}_1 = -(\mathbf{r}_{2J} \cdot \mathbf{n}_1) \mathbf{s}_{1J}
\end{aligned}$$

等を用いると,

$$\text{与式} = \sum_J \frac{GM_J}{c^2} \left(\frac{r_{2J} - r_{1J}}{r_{12}} - \frac{\mathbf{r}_{2J} \cdot \mathbf{n}_1}{r_{2J}} \right) \cdot \left(-\frac{\mathbf{s}_{1J}}{s_{1J}^2} \right)$$

さらにここで,

$$\mathbf{n}_1 \sim \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}, \quad \mathbf{r}_{12} \sim \mathbf{r}_{2J}$$

より,

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_{1J} &= \mathbf{r}_{1J} \times \mathbf{n}_1 \cong -\mathbf{r}_{1J} \times \frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{12}} \\
s_{1J}^2 &\cong \frac{1}{r_{12}^2} |\mathbf{r}_{1J} \times \mathbf{r}_{2J}|^2 = \frac{r_{1J}^2 r_{2J}^2 - (\mathbf{r}_{1J} \cdot \mathbf{r}_{2J})^2}{r_{12}^2}
\end{aligned}$$

これらを用いると,

$$\begin{aligned}
& -\frac{\mathbf{s}_{1J}}{s_{1J}^2} \left(\frac{r_{2J} - r_{1J}}{r_{12}} - \frac{\mathbf{r}_{1J} \cdot \mathbf{r}_{2J}}{r_{12} r_{2J}} \right) \\
& \sim \frac{r_{12}^2}{r_{1J}^2 r_{2J}^2 - (\mathbf{r}_{1J} \cdot \mathbf{r}_{2J})^2} \left(\frac{r_{2J} - r_{1J}}{r_{12}} + \frac{\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{2J}}{r_{12} r_{2J}} \right) \left(-\frac{\mathbf{r}_{1J} \times \mathbf{r}_{2J}}{r_{12}} \right) \\
& \sim \frac{1}{r_{1J}^2 r_{2J}^2 - (\mathbf{r}_{1J} \cdot \mathbf{r}_{2J})^2} \left(r_{2J} - r_{1J} \frac{\mathbf{r}_{1J} \cdot \mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}} - r_{2J} \right) (-\mathbf{r}_{1J} \times \mathbf{r}_{2J}) \\
& \sim \frac{1}{r_{2J}} \frac{r_{1J} r_{2J} - \mathbf{r}_{1J} \cdot \mathbf{r}_{2J}}{r_{1J}^2 r_{2J}^2 - (\mathbf{r}_{1J} \cdot \mathbf{r}_{2J})^2} (\mathbf{r}_{1J} \times \mathbf{r}_{2J}) = \frac{1}{r_{2J}} \frac{\mathbf{r}_{1J} \times \mathbf{r}_{2J}}{r_{1J} r_{2J} + \mathbf{r}_{1J} \cdot \mathbf{r}_{2J}}
\end{aligned}$$

となり，結局，

$$\mathbf{d}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} + \left[(1 + \gamma) \sum_J \frac{GM_J}{c^2} \frac{1}{r_{2J}} \frac{\frac{\mathbf{r}_{1J}}{r_{1J}} \times \frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}}}{1 + \frac{\mathbf{r}_{1J}}{r_{1J}} \times \frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}}} \right] \times \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (252)$$

これが有限距離（太陽系内など）の Equation of light deflection. もし，天体 1 が十分遠方なら，

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{\mathbf{r}_{1J}}{r_{1J}}$$

とおいて，

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{k} + \left[(1 + \gamma) \sum_J \frac{GM_J}{c^2} \frac{1}{r_{2J}} \frac{\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}}}{1 + \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}}} \right] \times \mathbf{k} \quad (253)$$

となる．

$$\left(\mathbf{k} \times \frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}} \right) \times \mathbf{k} = \left(\frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}} \cdot \mathbf{k} \right) \mathbf{k} - \frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}}, \quad \frac{\mathbf{r}_{2J}}{r_{2J}} \cdot \mathbf{k} = -\cos \theta$$

より，

$$\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} - (1 + \gamma) \frac{GM_J}{c^2} \frac{1}{r_{2J}} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \begin{pmatrix} -k_y \\ k_x \end{pmatrix}$$

ここで，

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2}$$

より，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \psi' \\ \sin \psi' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} - \frac{1 + \gamma}{2} \frac{r_{gJ}}{r_{2J}} \cot \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix} \\ \psi' &= \psi - \frac{1 + \gamma}{2} \frac{r_{gJ}}{r_{2J}} \cot \frac{\theta}{2} \\ &= \psi - \frac{1 + \gamma}{2} \frac{r_{gJ}}{r_{2J}} \cot \frac{\psi - \varphi}{2} \end{aligned} \quad (254)$$

ここで，

$$r_{gJ} = \frac{GM_J}{c^2}, \quad \psi + \theta = \varphi$$

太陽による無限遠の星に対する見かけの角度の変化は，

$$\Delta \theta = \frac{1 + \gamma}{2} \frac{r_{gJ}}{r_{2J}} \cot \frac{\theta}{2} \quad (255)$$

となる．例えば太陽の場合，

$$\sin \theta_{\min} = \frac{R_{\odot}}{r_{2J}} \cong \frac{6.96 \times 10^8}{1.50 \times 10^{11}} \simeq 4.64 \times 10^{-3}, \quad \theta_{\min} = 15'57''$$

これより,

$$\tan \frac{\theta_{\min}}{2} \sim \frac{1}{2} \sin \theta_{\min} \sim 2.32 \times 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \cot \frac{\theta_{\min}}{2} \sim 4.31 \times 10^2$$

$$\frac{r_{gJ}}{r_{2J}} \sim \frac{2.96 \times 10^3}{1.50 \times 10^{11}} \sim 1.96 \times 10^{-9} \sim 4.08 \text{mas}$$

したがって,

$$\Delta\theta_{\max} \sim \frac{1+\gamma}{2} \frac{r_{gJ}}{r_{2J}} \cot \frac{\theta_{\min}}{2} \cong 4.08 \times 4.31 \times 10^2 \cong 1''.76$$

となる²⁰. よって, 重力レンズの公式として,

$$\Delta\theta \propto \cot \frac{\theta}{c} \tag{256}$$

となる.

²⁰ ここで, $1\text{mas} = 0''.001 \cong 4.848 \times 10^{-9}$ である.

2.4 ポスト・ニュートン近似

形式的にメトリックを,

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \frac{2\phi}{c^2} + \frac{2\psi}{c^4} \\ g_{0j} = 0 + \frac{\underline{g}}{c^3} \\ g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{2\gamma\phi}{c^2}\delta_{ij} \end{cases} \quad (257)$$

と置く. $\psi, \underline{g}$ の具体的な形については後で考える.

2.4.1 $g^{\mu\nu}$ の計算

まず, 運動方程式は形式的に,

$$\frac{dv^k}{dt} = -\underbrace{c^2\Gamma_{00}^k}_{O(\frac{1}{c^4})} + \underbrace{cv^k\Gamma_{00}^0}_{O(\frac{1}{c^3})} - \underbrace{2cv^j\Gamma_{0j}^k}_{O(\frac{1}{c^2})} + \underbrace{2cv^kv^j\Gamma_{0j}^0}_{O(\frac{1}{c^2})} - \underbrace{v^iv^j\Gamma_{ij}^k}_{O(\frac{1}{c^2})} + \underbrace{\frac{v^kv^iv^j}{c}\Gamma_{ij}^0}_{O(\frac{1}{c})} \quad (258)$$

となる.

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu\lambda}$$

より, 明らかに,

$$\begin{cases} g^{00} = -1 - \frac{2\phi}{c^2} + \dots \\ g^{0i} = -\frac{\underline{g}_i}{c^3} \\ g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{2\gamma\phi}{c^2}\delta_{ij} \end{cases} \quad (259)$$

2.4.2 $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ の計算

まず, $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}$ を計算する.

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} = \frac{2\dot{\phi}}{c^3} + \dots \quad (x^0 = ct) \quad (260)$$

$$\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0} = \frac{\dot{g}_j}{c^4} + \dots \quad (261)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} = \frac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{ij} + \dots \quad (262)$$

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x^k} = \frac{2a_k}{cc^2} - \frac{2b_k}{c^4} + \dots \quad \left(a_k = \frac{\partial\phi}{\partial x^k}, \quad b_k = \frac{\partial\psi}{\partial x^k} \right) \quad (263)$$

$$\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^k} = \frac{1}{c^3} \frac{\partial g_j}{\partial x^k} + \dots \quad (264)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{2\gamma b_k}{c^2}\delta_{ij} + \dots \quad (265)$$

これらより

$$\frac{1}{c^3} : \Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{0\mu} \left(2 \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + g^{0j} \left(2 \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(-1) \frac{2\dot{\phi}}{c^3} + \left(-\frac{g_j}{c^3} \right) \left(2 \frac{2\dot{g}_j}{c^4} - \frac{2a_j}{c^2} - \frac{2b_j}{c^4} \right) \right] \\
&= -\frac{\dot{\phi}}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^5}\right)
\end{aligned} \tag{266}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2} : \Gamma_{0j}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\mu} \left(\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^\mu} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} + g^{0l} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0l}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^l} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(-1) \frac{2a_j}{c^2} + \left(-\frac{g_l}{c^3} \right) \left(\frac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3} \delta_{lj} + \frac{1}{c^3} \left(\frac{\partial g_l}{\partial x^j} - \frac{\partial g_j}{\partial x^l} \right) \right) \right] \\
&= -\frac{a_j}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)
\end{aligned} \tag{267}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c} : \Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2} g^{0\mu} \left(\frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\mu j}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[g^{00} \left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) + g^{0l} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(-1) \left(\frac{1}{c^3} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x^j} + \frac{\partial g_j}{\partial x^i} \right) - \frac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3} \delta_{ij} \right) + \left(-\frac{g_l}{c^3} \right) \left(\frac{2\gamma a_j}{c^2} \delta_{il} + \frac{2\gamma a_i}{c^2} \delta_{lj} - \frac{2\gamma a_l}{c^2} \delta_{ij} \right) \right] \\
&= O\left(\frac{1}{c^4}\right)
\end{aligned} \tag{268}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^4} : \Gamma_{00}^l &= \frac{1}{2} g^{k\mu} \left(2 \frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[g^{k0} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + g^{kj} \left(2 \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{g_k}{c^3} \right) \frac{2\dot{\phi}}{c^3} + \delta_{kj} \left(1 - \frac{2\gamma\phi}{c^2} \right) \left(2 \frac{\dot{\phi}}{c^4} - \frac{2a_j}{c^2} - \frac{2b_j}{c^4} \right) \right] \\
&= -\frac{a_k}{c^2} - \frac{1}{c^4} [b_k - 2\gamma\phi a_k - \dot{g}_k] + O\left(\frac{1}{c^6}\right)
\end{aligned} \tag{269}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^3} : \Gamma_{0j}^k &= \frac{1}{2} g^{k\mu} \left(\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^\mu} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[g^{k0} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} + g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0l}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^l} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{g_k}{c^3} \right) \frac{2a_k}{c^2} + \delta^{kl} \left(\frac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3} \delta_{lj} + \frac{1}{c^3} \left(\frac{\partial g_l}{\partial x^j} - \frac{\partial g_j}{\partial x^l} \right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{c^3} \left[\gamma\dot{\phi} \delta_{kj} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_l}{\partial x^j} - \frac{\partial g_j}{\partial x^l} \right) \right] + O\left(\frac{1}{c^5}\right)
\end{aligned} \tag{270}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2} : \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{k\mu} \left(\frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\mu j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[g^{k0} \left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) + g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{g_k}{c^3} \left(\frac{1}{c^3} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x^j} + \frac{\partial g_j}{\partial x^i} \right) - \frac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3} \delta_{ij} \right) + \delta^{kl} \frac{2\gamma}{c^2} (a_j \delta^{il} + a_i \delta^{lj} - a_l \delta^{ij}) \right] \\
&= \frac{\gamma}{c^2} (a_j \delta^{ik} + a_i \delta^{kj} - a_k \delta^{ij})
\end{aligned} \tag{271}$$

これより，運動方程式は，

$$\begin{aligned}
\frac{dv^k}{dt} &= -c^2 \Gamma_{00}^k + cv^k \Gamma_{00}^0 - 2cv^i \Gamma_{0i}^k - v^i v^j \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{c} v^k v^i v^j \Gamma_{ij}^0 \\
&= -c^2 \left(-\frac{a_k}{c^2} - \frac{1}{c^4} (b_k - 2\gamma\phi a_k - \dot{g}_k) \right) \\
&\quad + cv^k \left(-\frac{\dot{\phi}}{c^3} \right) - 2cv^i \left[\frac{1}{c^3} \gamma \dot{\phi} \delta_{ki} + \frac{1}{2c^3} \left(\frac{\partial g_k}{\partial x^i} - \frac{\partial g_i}{\partial x^k} \right) \right] \\
&\quad + 2v^k v^i \left(-\frac{a_i}{c^2} \right) - v^i v^j \frac{\gamma}{c^2} (a_j \delta_{ik} + a_i \delta_{jk} - a_k \delta_{ij}) \\
&= a_k + \frac{1}{c^2} \left[b_k - 2\gamma\phi a_k - \dot{g}_k - v^k \dot{\phi} - 2\gamma\dot{\phi} v^k \right. \\
&\quad \left. - v^i \left(\frac{\partial g_k}{\partial x^i} - \frac{\partial g_i}{\partial x^k} \right) - 2v^k v^i a_k - 2\gamma v^k v^j a_j - \gamma v^i v^i a_k \right] \\
&= a_k + \frac{1}{c^2} \left[b_k + \gamma(\mathbf{v}^2 - 2\phi) a_k - \dot{g}_k - (1 + 2\gamma) \dot{\phi} v^k - 2(1 + \gamma)(v^i a_i) v^k + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \right]
\end{aligned}$$

ベクトル形式で書くと，

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{a} + \frac{1}{c^2} \left[\mathbf{b} + \gamma(\mathbf{v}^2 - 2\phi) \mathbf{a} - \dot{\mathbf{g}} - \left\{ (1 + 2\gamma) \dot{\phi} + 2(1 + \gamma)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \right\} \right] \\
\mathbf{a} &= \nabla \phi, \quad \mathbf{b} = \nabla \psi, \quad (\mathbf{g})_i = c^3 g_{0i}
\end{aligned} \tag{274}$$

2.4.3 ϕ ? $\mathbf{g}$?

Fully PPN (標準 PPN ゲージ)

$$\begin{aligned}
\psi &= -\beta\phi^2 - \xi\phi_w + \frac{1}{2}(2\gamma + 2 + \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi)\phi_1 \\
&\quad (3\gamma - 2\beta + 1 + \zeta_2 + \xi)\phi_2 + (1 + \zeta_3)\phi_3 \\
&\quad + (3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi)\phi_4 - \frac{1}{2}(\zeta_1 - 2\xi)\mathcal{A}
\end{aligned} \tag{275}$$

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1 - 2\xi)\mathbf{V} - \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi)\mathbf{W} \tag{276}$$

ここで，

$$\phi_w = \int \rho' \rho'' \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}''}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}''}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|} \right) d^3 x' d^3 x'' \tag{277}$$

$$\phi_1 = \int d^3 x \frac{\rho'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} v'^2 \tag{278}$$

$$\phi_2 = \int d^3 x \frac{\rho'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \phi', \quad \phi' = \phi(\mathbf{x}') \tag{279}$$

$$\phi_3 = \int d^3 \frac{\phi'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Pi, \quad \Pi = \text{internal energy} \tag{280}$$

$$\phi_4 = \int d^3x \frac{\rho'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} p'. \quad p' = \text{pressure} \quad (281)$$

$$\mathcal{A} = \int d^3x' \frac{\rho' \{\mathbf{v}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')\}^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \quad \left(\mathcal{B} = \int d^3x' \frac{\rho' \mathbf{a}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad \mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right) \quad (282)$$

$$\mathbf{V} = \int d^3x' \frac{\rho'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{v}' \quad (283)$$

$$\mathbf{W} = \int d^3x' \frac{\rho' \mathbf{v}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (284)$$

ここで各パラメータは,

	major term	notion	meanings	GTR	B-D
γ			space curvature	1	$\frac{1+\omega}{2+\omega}$
β	ϕ^2		non-linearity	1	1
ξ	ϕ_w	Whitehead		0	0
α_1	$\mathbf{V}$			0	0
α_2	$\mathbf{W}$			0	0
α_3	ϕ_1			0	0
ζ_1	$\mathcal{A}$			0	0
ζ_2	ϕ_2			0	0
ζ_3	ϕ_3			0	0
ζ_4	ϕ_4			0	0

2.4.4 準アインシュタイン

PPN パラメータの中で β, γ だけ残す. このとき,

$$\psi = -\beta\phi^2 + (\gamma+1)\phi_1 + (3\gamma-2\beta+1)\phi_2 + \phi_3 + 3\gamma\phi_4 \quad (285)$$

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{2}(4\gamma+3)\mathbf{V} - \frac{1}{2}\mathbf{W} \quad (286)$$

EIH ゲージ変換

$$x_0 \rightarrow \tilde{x}_0 = x_0 + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial \chi}{\partial x^0} \quad (287)$$

$$x_i \rightarrow \tilde{x}_i = x_i \quad (288)$$

$$\chi(x) = \int d^3x' \rho' |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (\text{Superpotential}) \quad (289)$$

すると,

$$\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0} = 1 + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 \chi}{(\partial x^0)^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2c^4}(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \phi_1) \quad (290)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^0} \sim 1 + \frac{1}{2c^2}(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \phi_1) \right) \\ \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^j} &= \frac{1}{2c^4} \frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^j} \\ &= \frac{1}{2c^2} \left[\int d^3 x' \rho' \frac{\mathbf{v}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \int d^3 x' \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{v}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right] \\ &= \frac{1}{2c^2} (\mathbf{V} - \mathbf{W}) \quad (291) \\ & \left(\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^j} = -\frac{1}{c^2} (\mathbf{V} - \mathbf{W}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x^0} &= \frac{1}{c} \int d^3 x' \rho' \frac{d}{dx^0} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \\ &= -\frac{1}{c} \int d^3 x' \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{v}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (292) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi}{(\partial x^0)^2} &= -\frac{1}{c^2} \int d^3 x' \rho' \frac{d}{dt} \left[\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{v}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \\ &= -\frac{1}{c^2} \int d^3 x' \rho' \left[\frac{\{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{v}'\}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} + \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{a}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{\mathbf{v}'^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \\ &= -\frac{1}{c^2} (\mathcal{A} + \mathcal{B} - \phi_1) \quad (293) \end{aligned}$$

このとき

$$g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\tilde{\alpha}}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\tilde{\beta}}} g_{\mu\nu} \quad (294)$$

より²¹,

$$g_{\tilde{i}\tilde{j}} = g_{ij} \quad (296)$$

$$g_{\tilde{0}\tilde{j}} = g_{0j} - \frac{1}{2c^3} \mathbf{V} + \frac{1}{2^3} \mathbf{W} \quad (297)$$

$$g_{\tilde{0}\tilde{0}} = g_{00} - \frac{1}{c^4} (\mathcal{A} + \mathcal{B} - \phi_1) \quad (298)$$

結局,

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &= \psi - \frac{1}{2} (\mathcal{A} + \mathcal{B} - \phi_1) \\ &= -\beta \phi^2 + \left(\gamma + \frac{3}{2} \right) \phi_1 + (3\gamma - 2\beta + 1) \phi_2 + \phi_3 + 3\gamma \phi_4 - \frac{1}{2} (\mathcal{A} + \mathcal{B}) \quad (299) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}} &= \mathbf{g} - \frac{1}{2} \mathbf{V} + \frac{1}{2} \mathbf{W} \\ &= -(2\gamma + 2) \mathbf{V} \quad (300) \end{aligned}$$

²¹ このとき,

$$E_{\tilde{\alpha}}^\mu = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2c^2} (\mathcal{A} + \mathcal{B} - \phi_1) & -\frac{1}{2c^3} \mathbf{V} + \frac{1}{2c^3} \mathbf{W} \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (295)$$

となる.

2.4.5 静的孤立系

1. 静的 $\rightarrow \mathbf{v}' = 0, \mathbf{a}' = 0 \Rightarrow \phi_1 = \mathcal{A} = \mathcal{B} = 0, \mathbf{V} = \mathbf{W} = 0$

2. 孤立系 & $\mathbf{v}' \rightarrow \dot{\phi}' = \dot{\Pi}' = \dot{p}' = 0$ より, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 は ϕ に繰り込まれる.

このとき,

$$\tilde{\psi} = -\beta\phi^2 \quad (301)$$

$$\tilde{\mathbf{g}} = 0 \quad (302)$$

$$\mathbf{b} = -2\beta\phi\nabla\phi = -2\beta\phi\mathbf{a} \quad (303)$$

で²²,

$$\dot{\phi} = 0 \quad (304)$$

より, 運動方程式は,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{a} + \frac{1}{c^2} \left[-2\beta\phi\mathbf{a} + \gamma(\mathbf{v}^2 - 2\phi)\mathbf{a} - 2(\gamma+1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} \right] \\ &= \mathbf{a} + \frac{1}{2} \left[\left\{ \gamma\mathbf{v}^2 - (2\gamma+2\beta)\phi \right\} \mathbf{a} - 2(\gamma+1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} \right] \end{aligned} \quad (305)$$

となる.

ここで質点近似をすると,

$$\mathbf{a} = -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mu = GM, \quad \phi = \frac{\mu}{r} \quad (306)$$

となり²³,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} \left[1 + \underbrace{\frac{1}{c^2} \left\{ \gamma\mathbf{v}^2 - (2\gamma+2\beta)\frac{\mu}{r} \right\}}_{\text{secular term}} \right] + \underbrace{\frac{2(1+\gamma)\mu}{c^2 r^3} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v}}_{\text{periodic term}} \quad (307)$$

である²⁴. 実際, 0次近似で Kepler 運動だとすると,

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

²² $\beta = 1$ なら Schwarzschild の外部解の PN 近似.

²³ 変数を

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_J$$

と変換した.

²⁴ 円運動のときは運動方程式の右辺は,

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \left[1 + \underbrace{\text{const}}_{\text{見かけ上の質量の減少}} \right] + \underbrace{0}_{\propto e}$$

の形になる.

$$\boldsymbol{v}^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \quad (308)$$

運動方程式の中かっこの部分は,

$$\left\{ \gamma \boldsymbol{v}^2 - (2\gamma + 2\beta) \frac{\mu}{r} \right\} = \gamma \left(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \right) - (2\gamma + 2\beta) \frac{\mu}{r} = -2\beta \frac{\mu}{r} - \gamma \frac{\mu}{a} \quad (309)$$

円運動なら $r = a$ より,

$$\sim -(2\beta + \gamma) \frac{\mu}{a} \sim -3 \frac{\mu}{a} \quad (310)$$

を得る²⁵.

2.4.6 近点の移動

$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$ に対する摂動論で解を求めると, 形式的に,

$$0 \text{ 次} \quad \frac{d\boldsymbol{v}^{(0)}}{dt} = -\frac{\mu \boldsymbol{r}^{(0)}}{r^{(0)3}} \quad (311)$$

$$1 \text{ 次} \quad \frac{d\boldsymbol{v}^{(1)}}{dt} = \cdot \quad (312)$$

$$(313)$$

この方法は見通しが良くない. そこで, **要素変化法**を用いて, 解を求める. いま, 軌道要素 E に対して,

$$0 \text{ 次} \quad \frac{dE^{(0)}}{dt} = 0, \quad \boldsymbol{r}^{(0)} = \boldsymbol{r}(E^{(0)}; t) \quad (314)$$

$$1 \text{ 次} \quad \frac{dE^{(1)}}{dt} = f(E^{(0)}; t) \quad (315)$$

$$(316)$$

のように解を求める.

Kepler 要素²⁶

a : 軌道長半径 (Semi-major axis)

e : 軌道離心率 (Eccentricity)

i : 軌道傾斜角 (Inclination)

Ω : 昇交点経度 (Longitude of ascending node)

ω : 近点引数 (Longitude of pericenter)

t_0 : 近点通過時刻 (Time of pericenter passage)

} Euler 角

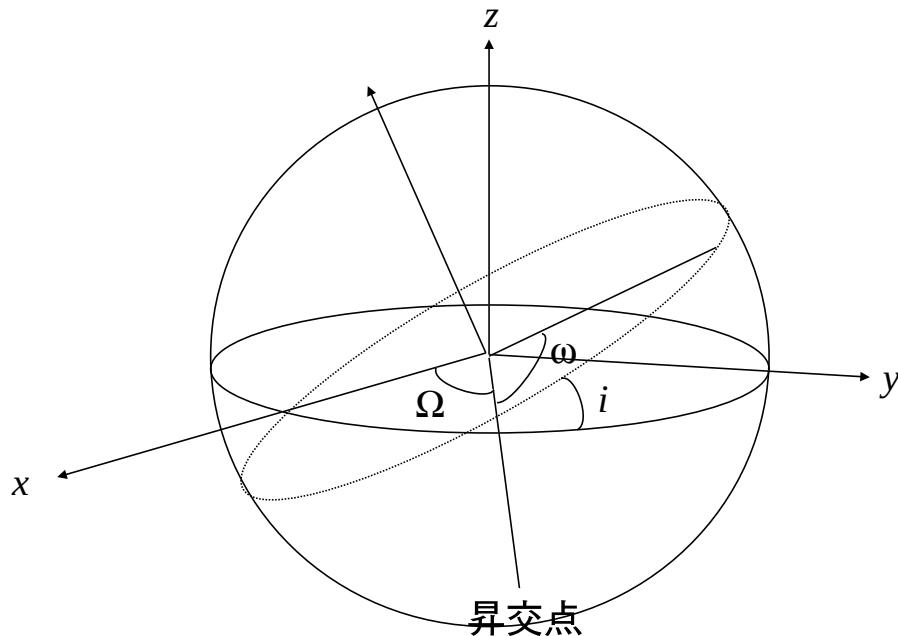
$$(317)$$

$t, E \rightarrow \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v} \Rightarrow \text{explicit}$ には書けない.

解法:

²⁵ $-3\frac{\mu}{a}$ の大きさは, 太陽重力の地球近傍で 3×10^{-8} , 地球重力の地表近傍で 3×10^{-10} 程度となる.

²⁶ 近日点は Perihelion, 近地点は perigee, 遠点は apocenter という.



1. $n = \sqrt{\mu/a^3}$: 平均運動 (Mean motion)
2. $\ell = n(t - t_0)$: 平均近点角 (Mean anomaly)
3. Kepler 方程式 $u - e \sin u = \ell$ を u について解く。
 u : 離心近点離角 (Eccentric anomaly)
- 4.

$$x_p = a(\cos u - e), \quad y_p = a\sqrt{1 - e^2} \sin u$$

5. $r = a(1 - e \cos u)$
6. $\dot{u} = n/r$
- 7.

$$\dot{x}_p = -a \sin u \cdot \dot{u}, \quad \dot{y}_p = a \sqrt{1 - e^2} \cos u \cdot \dot{u}$$

- 8.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = R_x(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega) \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ 0 \\ \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ 0 \end{pmatrix}$$

要素の変化式

- Lagrange 流
- Gauss 流 : $\Delta \mathbf{a} = \Delta \mathbf{x}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ given

Gauss 流

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \Delta \mathbf{a} \quad (318)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{a} &= \frac{1}{c^2} \left[\left\{ \gamma \mathbf{v}^2 - 2(\beta + \gamma) \frac{\mu}{r} \right\} \left(-\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} \right) + 2(1 + \gamma) \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} \right) \mathbf{v} \right] \\ &= S \hat{\mathbf{r}} + T(\hat{\mathbf{h}} \times \hat{\mathbf{r}}) + W \hat{\mathbf{h}} \end{aligned} \quad (319)$$

ここで, S, T, W はそれぞれ, 摂動力の動径方向, 動径ベクトルと軌道角運動量ベクトルの外積方向 (接線方向 $\hat{\mathbf{v}}$ ではない), 軌道面方向を表す. このとき, 軌道要素の変化式は,

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[S e \sin f + T \frac{a(1-e^2)}{r} \right] \quad (320)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [S \sin f + T(\cos f + \cos u)] \quad (321)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} W \frac{r}{a} \cos(\omega + f) \quad (322)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\cos i \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[-S \cos f + T \left(1 + \frac{r}{a(1-e^2)} \right) \sin f \right] \quad (323)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{1}{a} W \frac{r}{a} \sin(\omega + f) \quad (324)$$

$$\frac{d\ell_0}{dt} = \sqrt{1-e^2} \left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) + S \frac{2r}{na^2} \quad (325)$$

と書ける. ここで f は真近点角であり, $x_p = r \cos f, y_p = r \sin f$ と表される. S, T, W は

$$S = \Delta \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{r}}, \quad T = \Delta \mathbf{a} \cdot (\hat{\mathbf{h}} \times \hat{\mathbf{r}}), \quad W = \Delta \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{h}}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (326)$$

まず,

- $W = 0 \rightarrow di/dt = d\Omega/dt = 0 \Rightarrow$ 軌道面の向きは不変
-

$$S = \frac{1}{c^2} \left[\left\{ \gamma \mathbf{v}^2 - 2(\gamma + \beta) \frac{\mu}{r} \right\} \left(-\frac{\mu \mathbf{r}}{r^2} \right) + 2(\gamma + 1) \frac{\mu}{r^4} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 \right]$$

•

$$T = 2(\gamma + 1) \frac{1}{c^2} \frac{\mu}{r^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}) \cdot \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{r}$$

となる²⁷．ここで，

エネルギー積分：

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}, \quad \mathbf{v}^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$$

角運動量積分：

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = h = r^2 \dot{f} = \text{一定} = \sqrt{\mu a(1-e^2)} = na^2 \sqrt{1-r^2}, \quad \mu = n^2 a^3$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} \text{ より,}$$

$$\dot{r} = \frac{a(1-e^2)}{(1+e \cos f)^2} e \sin f \dot{f} = \frac{r^2 e}{a(1-e^2)} \sin f \dot{f} = \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}} \sin f$$

これより，

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = r \dot{r} = \frac{nae}{\sqrt{1-e^2} r \sin f}$$

これらから S, T を具体的に求めると，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{c^2} \left[\left\{ \gamma \left(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{c} \right) - 2(\gamma + \beta) \frac{\mu}{r} \right\} \left(-\frac{\mu}{r^2} \right) + \frac{2(1+\gamma)\mu}{r^4} \frac{n^2 a^2 r^2 e^2 \sin^2 f}{1-e^2} \right] \\ &= \frac{\mu}{c^2} \left[2\beta \frac{\mu}{r^2} + \gamma \frac{\mu}{ar^2} + 2(1+\gamma) \frac{\mu}{ar^2} \frac{e^2}{1-e^2} \sin^2 f \right] \\ &= \frac{\mu}{c^2} \frac{\mu}{a^3} \left[2\beta \left(\frac{a}{r} \right)^3 + \gamma \left(\frac{a}{r} \right)^2 + 2(1+\gamma) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{e^2}{1-e^2} \sin^2 f \right] \\ &\quad \left(\frac{a}{r} = \frac{1+e \cos f}{1-e^2} \text{ より} \right) \\ &= \frac{\mu}{c^2} \frac{\mu}{a^3(1-e^2)^3} (1+e \cos f)^2 \left[2\beta(1+e \cos f) + \gamma(1-e^2) + 2(1-e^2)e^2 \sin^2 f \right] \\ &= \frac{\mu}{c^2} \frac{\mu}{a^3(1-e^2)^3} (1+e \cos f)^2 \left[(2\beta + \gamma) + (\gamma + 2)e^2 + 2\beta e \cos f - 2(1+\gamma)e^2 \sin^2 f \right] \\ &= \frac{\mu}{c^2} \frac{\mu}{a^3} \frac{1}{1-e^2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left[(2\beta + \gamma) + (\gamma + 2)e^2 + 2\beta e \cos f - 2(1+\gamma)e^2 \sin^2 f \right] \quad (327) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{\mu}{c^2} \frac{2(1+\gamma)}{r^3} \frac{nare}{\sqrt{1-e^2}} \frac{na^2 \sqrt{1-e^2}}{r} \\ &= \frac{\mu}{c^2} \frac{\mu}{r^3} 2(1+\gamma) e \sin f \\ &= \frac{\mu}{c^2} \frac{\mu}{a^3(1-e^2)^3} (1+e \cos f)^2 \cdot 2(1+\gamma) e \sin f \\ &= \frac{\mu}{c^2} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{1+e \cos f}{1-e^2} \cdot 2(1+\gamma) e \sin f \quad (328) \end{aligned}$$

ここで，角運動量から，

$$r^2 \dot{f} = na^2 \sqrt{1-e^2} \quad dt = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a} \right)^2 df \quad (329)$$

²⁷ $\mathbf{v} \cdot (\hat{\mathbf{h}} \times \hat{\mathbf{r}}) = \hat{\mathbf{h}} \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}) = \frac{1}{r} (b d \hat{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{h}) = \frac{b}{r}$

となり, これを用いると,

$$\begin{aligned}
\frac{da}{df} = \frac{da}{dt} \frac{dt}{df} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \frac{\mu}{c^2} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \\
&\times \left[\frac{e \sin f}{1-e^2} \left\{ (2\beta + \gamma) + (\gamma + 2)e^2 + 2\beta e \cos f - 2(1 + \gamma)e^2 \sin^2 f \right\} \right. \\
&\left. + \frac{1 + e \cos f}{1 - e^2} \cdot 2\gamma e \sin f (1 - e^2) \right] \times \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \\
&\quad \left(\frac{a}{r} (1 - e^2) = 1 + e \cos f \right) \\
&= \frac{2}{n^2(1-e^2)} \frac{\mu}{c^2} \frac{\mu}{a^3} \frac{1}{1-e^2} \\
&\times \left[\left\{ (2\beta + \gamma) + (\gamma + 2)e^2 + 2\beta e \cos f - 2(1 + \gamma)e^2 \sin^2 f \right\} e \sin f \right. \\
&\left. + 2(1 + \gamma)e \sin f (1 + e \cos f)^2 \right] \\
&= \frac{2\mu e}{c^2(1-e^2)} \left[\left\{ (2\beta + \gamma) + (\gamma + 2)e^2 + 2\beta e \cos f - 2(1 + \gamma)e^2 \cos^2 f \right\} \sin f \right. \\
&\left. + 2(1 + \gamma)(1 + 2e \cos f + e^2 \cos^2 f) \sin f \right] \\
&= \frac{2\mu e}{c^2(1-e^2)^2} [(2 + 2\beta + 3\gamma) \sin f + 2(\gamma + 2) \sin f + (4 + 2\beta + 4\gamma)e \sin f \cos f] \\
&= \frac{2\mu e}{c^2(1-e^2)^2} [(2 + 2\beta + 3\gamma) \sin f + 2(\gamma + 2) \sin f + (2 + \beta + 2\gamma)e \sin 2f] \quad (330) \\
\Delta a &= a' - a \\
&= \frac{2\mu e}{c^2(1-e^2)^2} \left[- \left\{ (2 + 2\beta + 3\gamma) + (\gamma + 2)e^2 \right\} \cos f - \frac{1}{2}(2 + \beta + 2\gamma)e \cos 2f \right] \quad (331)
\end{aligned}$$

次に,

$$\begin{aligned}
\frac{de}{df} = \frac{de}{dt} \frac{dt}{df} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \frac{\mu}{c^2} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \\
&\times \left[\frac{\sin f}{1-e^2} \left\{ (2\beta + \gamma) + (\gamma + 2)e^2 + 2\beta e \cos f - 2(1 + \gamma)e^2 \sin^2 f \right\} \right. \\
&\left. + \frac{1 + e \cos f}{1 - e^2} \cdot 2(1 + \gamma)e \sin f \left(\cos f + e + \frac{r}{a} \cos f \right) \right] \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^2 a} \frac{\mu}{c^2} \frac{\mu}{a^3} \frac{\sin f}{1-e^2} \left[(2\beta + \gamma) + (\gamma + 2)e^2 + 2\beta e \cos f \right. \\
&\quad \left. - 2(\gamma + 1)e^2 \cos^2 f + 2(1 + \gamma)e \left\{ (1 + e \cos f)(\cos f + e) + (1 - e^2) \cos f \right\} \right] \\
&= \frac{1}{a(1-e^2)} \frac{\mu}{c^2} \sin f \left[(2\beta + \gamma) + (\gamma + 2)e^2 + 2\beta e \sin f - 2(1 + \gamma)e^2 \cos^2 f \right. \\
&\quad \left. + 2(1 + \gamma)e^2 + 4(1 + \gamma)e - \cos f + 2(1 + \gamma)e^2 \cos^2 f \right] \\
&= \frac{1}{a(1-e^2)} \frac{\mu}{c^2} \left[\left\{ (2\beta + \gamma) + (4 + 3\gamma)e^2 \right\} \sin f - \frac{1}{2}(2 + \beta + 2\gamma)e \sin 2f \right] \quad (332) \\
\Delta e &= e' - e \\
&= \frac{\mu}{c^2 a(1-e^2)} \left[- \left\{ (2\beta + \gamma) + (4 + 3\gamma)e^2 \right\} \cos f - \frac{1}{2}(2 + \beta + 2\gamma)e \cos 2f \right] \quad (333)
\end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{df} &= \frac{d\omega}{dt} \frac{dt}{df} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \frac{\mu}{c^3} \frac{\mu}{a^3} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \\
&\times \left[-\frac{\cos f}{1-e^2} \left\{ (2\beta + \gamma) + (\gamma + 2)e^2 + 2\beta e \cos f - 2(1 + \gamma)e^2 \sin^2 f \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{1 + e \cos f} \right) \sin f \cdot \frac{1 + e \cos f}{1 - e^2} \cdot 2(1 + \gamma)e \sin f \right] \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^2 a e} \frac{\mu}{c^2} \frac{\mu}{a^2} \frac{1}{1-e^2} \left[-\cos f \left\{ (2\beta + \gamma) + (\gamma + 2)e^2 + 2\beta e \cos f - 2(1 + \gamma)e^2 \sin^2 f \right\} \right. \\
&\quad \left. + 2(1 + \gamma)e \sin^2 f (2 + e \sin f) \right] \\
&= \frac{1\mu}{c^2 a e (1-e^2)} \left[\left\{ (2\beta + \gamma) + (2 + \gamma)e^2 + 2\beta e \cos f - 2(1 + \gamma)e^2 \cos^2 f \right\} (-\cos f) \right. \\
&\quad \left. + 2(1 + \gamma)2e \underbrace{\sin^2 f}_{1-\cos^2 f} + e^2 \underbrace{\sin^2 f \cos f}_{\cos f - \cos^3 f} \right] \\
[\quad] &= \left[-2\beta - \gamma - (\gamma + 2)e^2 + 2(1 + \gamma)e^2 \right] \cos f \\
&\quad + [-2\beta e - 4(1 + \gamma)e] \underbrace{\cos^2 f}_{\frac{1+\cos 2f}{2}} + \left[2(1 + \gamma)e^2 - 2(1 + \gamma)e^2 \right] \cos^3 f + 4(1 + \gamma)e \\
&= (2 + 2\gamma - \beta)e + [-2\beta - \gamma + \gamma e^2] \cos f - e [2 + 2\gamma - \beta] \cos 2f \tag{334}
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\Delta\omega &= \omega' - \omega \\
&= \frac{\mu}{c^2 a e (1-e^2)} \left[(2 + 2\gamma - \beta)ef + (-2\beta - \gamma + \gamma e^2) \sin f - \frac{1}{2}e(2 + 2\gamma\beta) \sin 2f \right] \tag{335}
\end{aligned}$$

ここで, 一周平均,

$$\langle f \rangle = 0, \langle \sin f \rangle = 0$$

より,

$$\langle \Delta\omega \rangle = \frac{\mu}{c^2 a (1-e^2)} (2 + 2\gamma - \beta) \cdot 2\pi \tag{336}$$

ここで $\beta = \gamma = 1$ のとき,

$$\frac{6\pi GM}{c^2 a (1-e^2)} / \text{Period}$$

ずつ近点が前進 (+) する.

最後に,

$$\frac{d\ell_0}{dt} = \sqrt{1-e^2} \frac{d\omega}{dt} S \frac{2r}{na^2} \tag{337}$$

$$S \frac{r}{a} = \frac{\mu}{c^2} \frac{\mu}{a^3} \left[2\beta \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \gamma \frac{a}{r} + 2(\gamma + 1) \frac{a}{r} \frac{e^2}{1-e^2} \sin f \right] \tag{338}$$

ここで,

$$\begin{aligned}\frac{dt}{df} &= \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad \frac{dt}{du} = \frac{r}{na}, \quad \sin f = \frac{r}{a}\sqrt{1-e^2} \\ \frac{r}{a} &= 1 - e \cos u, \quad \frac{a}{r} = \frac{1 + e \cos f}{1 - e^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \frac{a}{r} \left[\gamma + 2(1 + \gamma) \frac{e^2}{1 - e^2} \sin^2 f \right] \\ &= \frac{a}{r} \left[\gamma + 2(1 + \gamma) \frac{e^2}{1 - e^2} (1 - \cos^2 f) \right] \\ &= \frac{1}{1 - e^2} \frac{a}{r} \left[\left\{ \gamma(1 - e^2) + 2(1 + \gamma)(1 - e^2)e^2 \right\} - 2(1 + \gamma)e^2 \cos^2 f \right] \\ &= \frac{1}{1 - e^2} \frac{a}{r} \left[-(2 + \gamma)(1 - e^2) + 2(1 + \gamma)(1 - e^2 \cos^2 f) \right] \\ &= \frac{a}{r} \left[-(2 + \gamma) + 2(\gamma + 1) \frac{1 - e^2 \cos^2 f}{1 - e^2} \right]\end{aligned}$$

したがって,

$$S \frac{r}{a} = \frac{\mu}{c^2} \frac{\mu}{a^3} \left[2\beta \left(\frac{a}{r}\right)^2 - (2 + \gamma) \frac{a}{r} + 2(1 + \gamma) \frac{a}{r} \frac{1 - e^2 \cos^2 f}{1 - e^2} \right] \quad (339)$$

ここで,

$$\int \left(\frac{a}{r}\right)^2 dt = \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} \int df = \frac{f}{n\sqrt{1-e^2}} \quad (340)$$

$$\int \frac{a}{r} dt = \frac{1}{n} \int du = \frac{u}{n} \quad (341)$$

$$\begin{aligned}\int \frac{a}{r} (1 - e^2 \cos^2 f) dt &= \int \left(\frac{a}{r}\right)^2 (1 - e \cos f) dt = \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} \int (1 - e \cos f) df \\ &= \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}} (f - e \sin f)\end{aligned} \quad (342)$$

より,

$$\frac{2}{na} \int S \frac{r}{a} dt = \frac{\mu}{c^2} \frac{\mu}{a^3} \frac{2}{na} \left[\frac{2\beta f}{n\sqrt{1-e^2}} - (2 + \gamma) \frac{u}{n} + 2(1 + \gamma) \frac{f - e \sin f}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (343)$$

したがって,

$$\begin{aligned}\Delta \ell &= \ell'_0 - \ell_0 \\ &= \sqrt{1 - e^2} \Delta \omega + \frac{2\mu}{c^2 a \sqrt{1 - e^2}^3} \\ &\quad \times \left[2 \left\{ 1 + \gamma + \beta - \beta e^2 \right\} f - (2 + \gamma) \sqrt{1 - e^2} u - 2(1 + \gamma) e \sin f \right]\end{aligned} \quad (344)$$

一周平均を取ると,

$$\langle \Delta \ell_0 \rangle = \frac{2\mu}{c^2 a \sqrt{1 - e^2}^3} \cdot 2\pi \cdot \left[2(1 + \gamma + \beta - \beta e^2) - (2 + \gamma) \sqrt{1 - e^2} \right] \quad (345)$$

惑星の近日点（永年）移動

$$\langle \Delta \omega \rangle = \frac{GM(2 + 2\gamma - \beta)}{c^2 a \sqrt{1 - e^2}} n \sim \frac{3GM_\odot}{c^2} \frac{n}{a \sqrt{1 - e^2}}$$

惑星	a AU	e	$n \times 10^8$ "/cy	$\langle \Delta \dot{\omega} \rangle$ "/cy	$\langle \Delta \dot{\omega} \rangle$ "/cy
水星	0.387	0.206	5.381	43.00	8.86
金星	0.723	0.007	2.107	8.63	0.06
地球	1.000	0.017	1.269	3.84	0.07
火星	1.524	0.003	0.689	1.35	0.13
木星	5.203	0.049	0.109	0.06	0.003
土星	9.555	0.056	0.01		
天王星	19.22	0.046	0.015		
海王星	30.11	0.009	0.099		
冥王星	39.54	0.249	0.052		

Table 2: 惑星の近日点移動量

Newcomb (1885) Ex. 月

惑星	$e\Delta\dot{\omega}_{\text{Obs.}}$	$e\Delta\dot{\omega}_{\text{Newton}}$	Diff.
水星	118.24 ± 0.40	109.76 ± 0.16	$+8.48 \pm 0.43$
金星	0.29 ± 0.20	0.34 ± 0.15	-0.05 ± 0.25
地球	19.48 ± 0.12	19.38 ± 0.05	$+0.10 \pm 0.13$
火星	149.55 ± 0.35	$148, 80 \pm 0.04$	$+0.75 \pm 0.35$

Table 3: Newcomb による惑星の近日点移動量

$$\frac{3GM_\oplus}{c^2} \frac{n}{a \sqrt{1 - e^2}} \sim \frac{3 \times 4.44 \times 10^{-3} \times 13.176 \times 3600 \times 36525}{3.844 \times 10^8 \times (1 - 0.055^2)} \sim 0.06'' \text{cy}$$

よって, $e\langle \Delta \dot{\omega} \rangle = 0.003'' \text{cy}$

Dancomb (1956)

惑星	$e\Delta\dot{\omega}_{\text{Obs.}}$	$e\Delta\dot{\omega}_{\text{Newton}}$	Diff.
水星	1151.593 ± 0.084	1142.730 ± 0.040	8.963 ± 0.093
金星	34.529 ± 0.032	34.472 ± 0.006	0.057 ± 0.033
地球	103.604 ± 0.020	103.520 ± 0.004	0.084 ± 0.020

Table 4: Dancomb による惑星の近日点移動量

2.5 N 個の質点系の運動方程式

N 個の質点系 (Ex 惑星) の運動方程式は？

だが,

1. 質点 (mass point) とは？

2. 質量の定義 $M = \int \rho d^3x$, $\rho = \underbrace{\rho_0}_{\text{Newton 的密度}} + \frac{1}{c^2} [\quad]$?

2.5.1 テンソル密度

デカルト座標系を用いると,

$$d\Omega \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (346)$$

変数変換

$$x' = x'(x), \quad d\Omega \rightarrow d\Omega'$$

によって,

$$d\Omega = \frac{1}{J} d\Omega'. \quad J = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \quad \text{ヤコビアン} \quad (347)$$

J ?

$$\underbrace{\eta_{\mu\nu}}_{\text{ガリレイ}} \rightarrow \underbrace{g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}_{\text{一般曲線}} \quad (348)$$

$$\eta_{\mu\nu} = g_{\alpha'\beta'} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\nu} \quad (349)$$

det を取ると,

$$\begin{aligned} |\eta_{\mu\nu}| &= |g_{\alpha'\beta'}| J^2 \\ -1 &= g J^2 \end{aligned} \quad (350)$$

したがって,

$$\frac{1}{J} = \sqrt{-g}, \quad \sqrt{-g} = \det(g_{\mu\nu}) \quad (351)$$

よって,

$$\frac{1}{J} d\Omega' = \sqrt{-g} d^4x$$

は不変量²⁸ .

²⁸ テンソル $A_{[\dots]}^{[\dots]}$ に対して,

$$A_{[\dots]}^{[\dots]} \sqrt{-g}$$

をテンソル密度という.

2.5.2 質量密度

ρ とは？

$$\rho \cong \rho_0 \left(1 + \frac{\Pi}{c^2}\right), \quad \Delta\phi = 4\pi G\rho_0 \quad (352)$$

ここで, ρ_0 は rest mass (Baryon number?). このとき, 圧力 p がゼロとする. 結局,

$$\rho^\dagger \cong \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + 3\gamma\phi\right)\right] \cong \rho_0 \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \Pi + 3\gamma\phi\right)\right] \quad (353)$$

2.5.3 スカラー密度

質量密度 $\rho \rightarrow \rho\sqrt{-g} \rightarrow$ 質量は一意的ではない.

質量の4次元化 (?)

ニュートンの

$$M = \int \rho_0 dV, \quad dV = d^3x \quad (354)$$

しかし, 4次元において $M = \int \rho dV$ は？

一つの考え方

$\int M dt$ を考える.

ニュートンの

$$\int_{t_0}^t M dt' = M(t - t_0) \quad (355)$$

$$\int M dt \int \rho \underbrace{d\Omega}_{4\text{次元}} = \int \rho\sqrt{-g} d^4x \quad (356)$$

したがって

$$M = \frac{d}{dt} \int \rho\sqrt{-g} d^4x \quad (357)$$

ここで t は何を取るべきか？

一つの考え方

t は M とともに動く固有時 τ . したがって,

$$M = \frac{d}{d\tau} \int \rho\sqrt{-g} d^4x = \int \rho\sqrt{-g} \frac{dt}{d\tau} d^3x \equiv \int \rho^\dagger d^3x \quad (358)$$

$$\begin{aligned} \rho^\dagger &= \rho \frac{dt}{d\tau} = \rho \left(1 + (3\gamma - 1) \frac{\phi}{c^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \phi\right) + \dots\right) \\ &\cong \rho \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + 3\gamma\phi\right)\right] \end{aligned} \quad (359)$$

さて, EIH ゲージにおいて,

$$g_{00} = -1 + \frac{2\phi}{c^2} + \frac{2\psi}{c^4} + \text{cdots} \quad (360)$$

$$\psi = -\beta\phi^2 + \left(\gamma + \frac{3}{2}\right)\phi_1 + (3\gamma - 2\beta + 1)\phi_2 + \phi_3 + 3\gamma\phi_4 - \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \quad (361)$$

$$\phi_1 = \sum_J \frac{GM_J}{r_J} \mathbf{v}_J^2, \quad r_J = |\mathbf{r}_J|, \mathbf{r}_J = \mathbf{x} - \mathbf{x}_J \quad (362)$$

$$\phi_2 = \sum_J \frac{GM_J}{r_J} \sum_{K \neq J} \frac{GM_K}{r_{JK}}, \quad \mathbf{r}_{JK} = |\mathbf{r}_{JK}|, \mathbf{r}_{JK} = \mathbf{r}_J - \mathbf{r}_K \quad (363)$$

$$M = \int \rho_0 \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \Pi + 3\gamma\phi \right) \right] d^3x \quad (364)$$

$$\begin{aligned} \phi &= \int \frac{G\rho_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ &= \int \frac{G\rho_0[\dots]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \Pi + 3\gamma\phi \right) \right] \\ &= \sum_J \frac{GM_J}{r_J} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\phi_1}{2} + \phi_3 + 3\gamma\phi_2 \right) \end{aligned} \quad (365)$$

$$\phi_4 = 0, \quad (p=0) \quad (366)$$

結局,

$$\begin{aligned} \phi + \frac{\psi}{c^2} \rightarrow & \sum_J \frac{GM_J}{r_J} + \frac{1}{c^2} \left[-\beta \left(\sum_J \frac{GM_J}{r_J} \right)^2 + (\gamma + 1) \sum_J \frac{GM_J}{r_J} \mathbf{v}_J^2 \right. \\ & \left. - (2\beta - 1) \sum_J \frac{GM}{r_J} \sum_{K \neq J} \frac{GM_K}{r_{JK}} - \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \right] \end{aligned} \quad (367)$$

$$\mathcal{A} = \sum_J \frac{GM_J (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J)^2}{r_J^3} \quad (368)$$

$$\mathcal{B} = \sum_J \frac{GM_J \mathbf{a}_J \cdot \mathbf{r}_J}{r_J} = - \sum_J \frac{GM_J \mathbf{r}_J}{r_J} \sum_{K \neq J} \frac{GM_K \mathbf{r}_{JK}}{r_{JK}^3} \quad (369)$$

ここで,

$$\phi = \sum_J \frac{GM_J}{r_J}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \psi &= -\beta \left(\sum_J \frac{GM_J}{r_J} \right)^2 + (\gamma + 1) \sum_J \frac{GM_J}{r_J} \mathbf{v}_J^2 - (2\beta - 1) \sum_J \frac{GM_J}{r_J} \sum_{K \neq J} \frac{GM_K}{r_{JK}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_J \frac{GM_J (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J)^2}{r_J^3} + \frac{1}{2} \sum_J \frac{GM_J}{r_J} \mathbf{r}_J \sum_{K \neq J} \frac{GM_K \mathbf{r}_{JK}}{r_{JK}^3} \end{aligned} \quad (370)$$

$$\mathbf{g} = -2(\gamma + 1)\mathbf{V} = -2(\gamma + 1) \sum_J \frac{GM_J}{r_J} \mathbf{v}_J \quad (371)$$

2.5.4 EIH 方程式

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = & \mathbf{a} + \frac{1}{c^2} \left[\mathbf{b} + \gamma(\mathbf{v}^2 + 2\phi)\mathbf{a} - \dot{\mathbf{g}} - \left\{ (1 + 2\gamma)\dot{\phi} + 2(\gamma + 1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \right\} \right. \\ & \left. + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{g}) \right] \end{aligned} \quad (372)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = \nabla\phi = & -2\beta \sum_J \frac{GM_J}{r_J} \left(-\frac{GM_J \mathbf{r}_J}{r_J^3} \right) - (\gamma + 1) \sum_J \frac{GM_J \mathbf{r}_J}{r_J^3} \mathbf{v}_J^2 \\ & + (2\beta + 1) \sum_J \frac{GM_J \mathbf{r}_J}{r_J^3} \sum_{K \neq J} \frac{GM_K}{r_{JK}} \\ & - \frac{1}{2} \sum_J \left(\frac{2GM_J \mathbf{v}_J}{r_J^3} (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J) - \frac{3GM_J (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J)^2}{r_J^5} \mathbf{r}_J \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_J \left[\frac{GM_J}{r_J} \left(\sum_{K \neq J} \frac{GM_K \mathbf{r}_{JK}}{r_{JK}^3} \right) - \left\{ \frac{GM_J \mathbf{r}_J}{r_J^3} \cdot \left(\sum_{K \neq J} \frac{GM_K \mathbf{r}_{JK}}{r_{JK}^3} \right) \right\} \right] \\ \gamma(\mathbf{v}^2 - 2\phi)\mathbf{a} = & -\gamma \sum_J \frac{GM_J \mathbf{r}_J}{r_J^3} \mathbf{v}_J^2 + 2\gamma \sum_J \frac{GM_J \mathbf{r}_J}{r_J^3} \cdot \sum_I \frac{GM_I}{r_I} \end{aligned} \quad (374)$$

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{g}} = & 2(\gamma + 1) \left[\sum_J \frac{GM_J}{r_J} \mathbf{a}_J + \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J) \mathbf{v}_J \right] \\ = & -2(\gamma + 1) \left[\sum_J \frac{GM_J}{r_J} \sum_{K \neq J} \frac{GM_K \mathbf{r}_{JK}}{r_{JK}^3} - \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J) \mathbf{v}_J \right] \end{aligned} \quad (375)$$

$$-(1 + 2\gamma)\dot{\phi} \mathbf{v}_J = -(1 + 2\gamma) \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J) \mathbf{v}_J \quad (376)$$

$$-2(\gamma + 1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} = 2(1 + \gamma) \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J) \mathbf{v}_J \quad (377)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{g}) = & -2(1 + \gamma) \mathbf{v} \times \left(\nabla \times \sum_J \frac{GM_J}{r_J} \mathbf{v}_J \right) \\ = & -2(1 + \gamma) \sum_J \mathbf{v}_J \times \left[\left(-\frac{GM_J \mathbf{r}_J}{r_J^3} \right) \times \mathbf{v}_J \right] \\ = & 2(\gamma + 1) \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} \mathbf{v} \times (\mathbf{r}_J \times \mathbf{v}_J) \\ = & 2(\gamma + 1) \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} \{ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_J) \mathbf{r}_J - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_J) \mathbf{v}_J \} \end{aligned} \quad (378)$$

これらを用いると,

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{b} + \gamma(\mathbf{v}^2 + 2\phi)\mathbf{a} - \dot{\mathbf{g}} - \left\{ (1 + 2\gamma)\dot{\phi} + 2(\gamma + 1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \right\} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{g}) \right] \\ = & 2\beta \left(\sum_J \frac{GM_I}{r_I} \right) \left(\sum_J \frac{GM_J \mathbf{r}_J}{r_J^3} \right) - (\gamma + 1) \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} \mathbf{v}_J^2 \mathbf{r}_J + (2\beta - 1) \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} \sum_{K \neq J} \frac{GM_K}{r_{JK}} \mathbf{r}_J \\ & - \sum_J \frac{GM_J^3}{r_J} (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J) \mathbf{v}_J + \frac{3}{2} \sum_J \frac{GM_J}{r_J^5} (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J)^2 \mathbf{r}_J + \frac{1}{2} \sum_J \frac{GM_J}{r_J} \sum_{K \neq J} \frac{GM_K}{r_{JK}^3} \mathbf{r}_{JK} \\ & - \frac{1}{2} \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} \sum_{K \neq J} \frac{GM_K}{r_{JK}^3} (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{r}_{JK}) \mathbf{r}_J - \gamma \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} \mathbf{v}^2 \mathbf{r}_J + 2\gamma \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} \sum_I \frac{GM_I}{r_I} \mathbf{r}_I - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(\gamma+1) \sum_J \frac{GM_J}{r_J} \sum_K \frac{GM_K}{r_{JK}^3} \mathbf{r}_{JK} + 2(\gamma+1) \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J) \mathbf{v}_J \\
& - (2\gamma+1) \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J) \mathbf{v} + 2(1+\gamma) \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \\
& + 2(\gamma+1) \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_J) \mathbf{r}_J - 2(\gamma+1) \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}_J \\
= & \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} \mathbf{r}_J \left[2(\beta+\gamma) \sum_I \frac{GM_I}{r_I} - (\gamma+1) \mathbf{v}_J^2 - \gamma \mathbf{v}^2 + 2(\gamma+1) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \right. \\
& + \sum_{K \neq J} \frac{GM_K}{r_{JK}} \left\{ (2\beta-1) - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{r}_{JK}}{r_{JK}^2} \right\} + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J)^2}{r_J^2} \Bigg] \\
& + \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} [-(2\gamma+1) (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J) \mathbf{v} + 2(\gamma+1) (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \\
& - 2(1+\gamma) (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}_J + (2\gamma+1) (\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J) \mathbf{v}_J] \\
& - \left(2\gamma + \frac{3}{2} \right) \sum_J \frac{GM_J}{r_J} \sum_{K \neq J} \frac{GM_K}{r_{JK}^3} \mathbf{r}_{JK} \tag{379}
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}}{dt} = & - \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3} \mathbf{r}_J \\
& + \frac{1}{c^2} \left[\sum_J \frac{GM_J}{r_J} \left\{ \frac{\mathbf{r}_J}{r_J^2} \left[2(\beta+\gamma) \sum_I \frac{GM_I}{r_I} - (\gamma+1) \mathbf{v}_J^2 + 2(\gamma+1) \mathbf{v}_J \cdot \mathbf{v} - \gamma \mathbf{v}^2 \right. \right. \right. \\
& + \frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{v}_J}{r_J} \right)^2 + \sum_{K \neq J} \frac{GM_K}{r_{JK}} \left\{ (2\beta-1) - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}_J \cdot \mathbf{r}_{JK}}{r_{JK}^2} \right\} \Bigg] \\
& + \left(\frac{\mathbf{r}_J}{r_J^2} \cdot \{ (2\gamma+1) \mathbf{v}_J - 2(1+\gamma) \mathbf{v} \} \right) (\mathbf{v}_J - \mathbf{v}) \\
& \left. - (2\gamma+2) \sum \frac{GM_K}{r_{JK}^3} \mathbf{r}_{JK} \right\} \Bigg] \tag{380}
\end{aligned}$$

これが、 N 個の質点の作る重力場中の test particle (それ自身の重力は無視) の運動方程式のポスト・ニュートン近似、すなわち Einstein-Infeld-Hoffmann (流) の運動方程式である。

用途 … 太陽系天体 (天然, 人工) の精密軌道計算.

2.5.5 非 test particle の場合の EIH 方程式

$$\underbrace{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \sum_J \frac{GM_J \mathbf{r}_J}{r_J}}_{\text{test particle}} \Rightarrow \underbrace{\frac{d\mathbf{v}_L}{dt} = - \sum_{J \neq L} \frac{GM_J \mathbf{r}_{LJ}}{r_{LJ}}}_{\text{質点同士}} \tag{381}$$

測地線仮説 (geodesic (motion) hypothesis) :

自己重力場が自分の軌跡に与える影響は無視する.

このとき EIH 方程式は,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{v}_L}{dt} = & - \sum_{J \neq L} \frac{GM_J}{r_{LJ}^3} \mathbf{r}_{LJ} \\
 & + \frac{1}{c^2} \left[\sum_{J \neq L} \frac{GM_J}{r_{LJ}} \left\{ \frac{\mathbf{r}_{LJ}}{r_{LJ}^2} \left[2(\beta + \gamma) \sum_{I \neq L} \frac{GM_I}{r_{LI}} - (\gamma + 1) \mathbf{v}_J^2 + 2(\gamma + 1) \mathbf{v}_J \cdot \mathbf{v}_L - \gamma \mathbf{V}_L^2 \right. \right. \right. \\
 & + \frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{r}_{LJ} \cdot \mathbf{v}_J}{r_{LJ}} \right)^2 + \sum_{K \neq J} \frac{GM_K}{r_{JK}} \left\{ (2\beta - 1) - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}_{LJ} \cdot \mathbf{r}_{JK}}{r_{JK}^2} \right\} \Bigg] \\
 & + \left(\frac{\mathbf{r}_{LJ}}{r_{LJ}^2} \cdot \{ (2\gamma + 1) \mathbf{v}_J - 2(1 + \gamma) \mathbf{v}_L \} \right) (\mathbf{v}_J - \mathbf{v}_L) \\
 & \left. - (2\gamma + 2) \sum \frac{GM_K}{r_{JK}^3} \mathbf{r}_{JK} \right] \tag{382}
 \end{aligned}$$

となる. これが本来の EIH 方程式 (1935). これは現代版の太陽系天体運動理論の基本方程式となっている.

- JPL : DE (Developement Ephemeris) シリーズ (最新は DE405/406) … AA
- 水路部 : FE … 天体位置表
- BdL : VSOP … CdT

References

- [1] V. A. Brumberg, “Essential Relativistic Celestial Mecahnics”, 1991, Adams Hilgar, Bristol
- [2] V. Fock, “The Theory of Space Time and Gravitation”, 1964, Pergamon Press, Oxford London New York Paris
- [3] L. Infeld and J. Plebanski, “Motion and Relativity”, 1960, Pergamon Press, Oxford London New York Paris
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, “The Classical Theory of fields”, 1962, Addison-Wesley, Reading, Mass
(邦題：「場の古典論」, 恒藤敏彦, 広重徹 訳, 1978, 東京図書)
- [5] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, “Gravitation”, 1973, W. H. Freeman & Company, New York
- [6] C. Moller, “The Theory of Relativity”, 1962, Oxford Univ. Press, Oxford
- [7] J. L. Synge, “Relativity : The Specail Theory”, 1955, North-Holland Public Co. Netherlands
- [8] J. L. Synge, “Relativity : The General Theory”, 1960, North-Holland Public Co. Netherlands
- [9] P. K. Seidelmann, “Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac”, 1992, University Science Books, Sausalito California
- [10] M. H. Soffe, “Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy”, 1989, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo
- [11] S. Weinberg, “Gravitation and Cosmology”, 1972, John Wiley & Sons, New York Chichester Brisbane Toronto Shingapore
- [12] C. M. Will, “Theory and Experiment in Gravitational Physics”, 1981 (Revised 1993), Cambridge Univ. Press, Cambridge
- [13] C. M. Will, “Was Einstein Right ?”, 1986, Basic Books, New York
(邦題：アインシュタインは正しかったか?, 松田卓也, 二間瀬敏史 訳, 1989, TBSブリタニカ)